

Аномалии в спектре собственных электромагнитных волн в анизотропных пластинах

© В.И. Альшиц, В.Н. Любимов

Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова Российской академии наук,
117333 Москва, Россия

E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

(Поступила в Редакцию 5 апреля 2002 г.)

Исследована радикальная перестройка спектра собственных электромагнитных волн в анизотропных пластинах оптически двуосных и одноосных кристаллов при небольших отклонениях направления распространения от симметричной ориентации. Если сагиттальная плоскость и грани пластины являются плоскостями симметрии тензора диэлектрической проницаемости ϵ , то существует четыре независимых семейства объемных собственных волн, каждое из которых характеризуется бесконечной последовательностью дисперсных кривых. Кривые независимых семейств пересекаются, образуя сетчатую структуру. В результате возмущений, при которых сагиттальная плоскость и грани пластины перестают быть плоскостями симметрии, происходит взаимодействие волн, принадлежащих различным семействам, возникают моды смешанных поляризаций, а дисперсионные кривые расталкиваются: точки пересечения исчезают. В окрестности таких точек даже небольшие изменения частоты приводят к резким изменениям поляризации волновых полей.

Подобно тому как натянутая струна имеет характерные собственные частоты звучания, анизотропная кристаллическая пластина имеет бесконечный набор собственных электромагнитных волн. Свойства этих волн зависят от компонент тензора диэлектрических проницаемостей ϵ кристалла, от ориентации поверхностей пластины относительно кристаллографических осей, от конкретных граничных условий на этих поверхностях и от направления распространения. Используя стандартные положения кристаллооптики [1–3], исследуем далее собственные волны в анизотропных пластинах оптически двуосных и одноосных кристаллов и опишем ситуации, при которых даже очень небольшие изменения в условиях распространения приводят к радикальным изменениям в структуре волновых полей и как следствие в структуре дисперсионных кривых.

Если сагиттальная плоскость (плоскость волновых векторов) и грани пластины являются плоскостями симметрии тензора диэлектрической проницаемости ϵ , то существует четыре независимых семейства объемных собственных волн, каждое из которых характеризуется бесконечной последовательностью дисперсионных кривых, а каждой кривой отвечает характерная поляризация волнового поля. Кривые независимых семейств пересекаются, образуя сетчатую структуру. Возмущения, при которых сагиттальная плоскость и грани перестают быть плоскостями симметрии, приводят к взаимодействию волн, принадлежащих различным семействам, возникновению мод смешанных поляризаций и расталкиванию дисперсионных кривых в точках пересечения. В окрестности этих точек даже небольшие изменения частоты приводят к резким изменениям поляризации волновых полей. Это явление и будет далее аналитически описано.

1. Четыре независимых семейства объемных собственных волн

Рассмотрим анизотропную пластину толщиной $2d$, вырезанную из оптически двуосного кристалла, грани которой параллельны плоскостям симметрии оптических свойств кристалла, характеризуемых тензором диэлектрической проницаемости ϵ (рис. 1, *a*). С обеих сторон пластина граничит с изотропной средой, определенной диэлектрической проницаемостью ϵ . Все свойства собственных электромагнитных волн в такой пластине определяются уравнениями Максвелла и стандартными граничными условиями.

Электрическая компонента волнового поля в пластине и в прилегающий к ней изотропной среде может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z; t) = \mathbf{E}(z) \times \exp \left\{ i\omega \left[\frac{1}{c} n(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \right] - t \right\}. \quad (1)$$

Здесь x, y, z — координаты текущей точки (оси координат направлены вдоль главных осей тензора ϵ , так что $\epsilon_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$); t — время; ω — частота; c — скорость света в вакууме; $n = c/v$; v — скорость распространения волнового поля; угол φ задает направление распространения. Магнитная компонента поля $\mathbf{H}(x, y, z; t)$ имеет вид, аналогичный (1).

В условиях, когда грани пластины параллельны плоскостям симметрии, при любом направлении распространения (любом значении угла φ) рассматриваемые волновые поля существуют в виде двух независимых семейств. Во-первых, как симметричные по электрическим компонентам волнового поля и одновременно

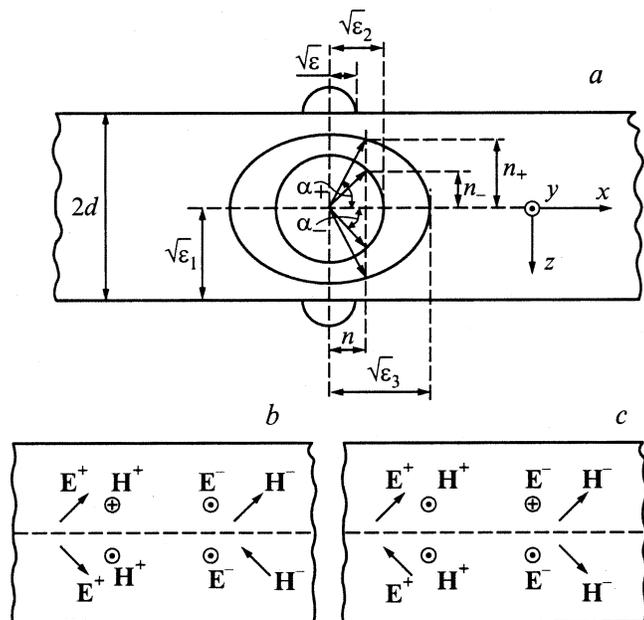


Рис. 1. Характеристики волновых полей в случае, когда сагиттальная плоскость и грани пластины являются плоскостями симметрии тензора ϵ . *a* — сечения поверхностей показателей преломления сагиттальной плоскостью и векторы рефракции объемных волн в пластине; *b* — ориентации векторов поляризации электромагнитных полей для объемных собственных волн семейств $(S_{EAH})_+$ и $(S_{EAH})_-$; *c* — ориентации векторов поляризации для объемных собственных волн семейств $(A_{ESH})_+$ и $(A_{ESH})_-$.

антисимметричные по магнитным компонентам

$$\begin{aligned} E_{x,y}(z) &= E_{x,y}(-z), & E_z(z) &= -E_z(-z); \\ H_{x,y}(z) &= -H_{x,y}(-z), & H_z(z) &= H_z(-z) \end{aligned} \quad (2)$$

(рис. 1, *b*). Обозначим структуру таких полей символами S_{EAH} . Соотношения (2) характеризуют поведение волновых полей по отношению к отражению в центральной плоскости пластины, когда $z \rightarrow -z$.

Во-вторых, волновые поля существуют как антисимметричные по электрическим компонентам и одновременно симметричные по магнитным компонентам (A_{ESH}) ; в соотношениях (2) электрические и магнитные величины следует соответственно поменять местами (рис. 1, *c*).

В каждом из семейств векторная амплитуда $\mathbf{E}(z)$ в пластине состоит из парциальных вкладов волн ветвей двух типов, которые будем отмечать знаками „плюс“ и „минус“

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}^+(z) + \mathbf{E}^-(z) \quad (3)$$

(эти ветви соответствуют двум независимым решениям уравнений Максвелла). Зависимость от координаты z величин, входящих в (3), имеет вид

$$\mathbf{E}^\pm(z) = \mathbf{E}_1^\pm \exp(i\omega n_\pm z/c) + \mathbf{E}_2^\pm \exp(-i\omega n_\pm z/c). \quad (4)$$

Здесь координата z меняется в пределах $-d \leq z \leq d$; выражения для векторов \mathbf{E}^\pm , определяющих поляризацию

волнового поля, и для параметров $n_\pm = n_\pm(n^2)$ будут конкретизированы далее.

Волновое поле в прилегающей изотропной среде при $z \geq d$ описывается формулой (1), в которой следует положить

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_1 \exp(-\omega pz/c), \quad p = p(n^2) = \sqrt{n^2 - \epsilon}. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{E}_1 — вектор поляризации, p — параметр локализации волнового поля в изотропной среде ($p > 0$). При $z \leq -d$ в (5) нужно произвести замену $\mathbf{E}_1 \rightarrow \mathbf{E}_2$, $p \rightarrow -p$. Таким образом, волновое поле вне пластины экспоненциально затухает по мере удаления от ее поверхностей.

Если волновые поля в пластине формируются объемными волнами, то для них $n_\pm^2 \geq 0$, а волновые нормали таких волн составляют с гранями пластины углы α_\pm , определяемые выражением $\alpha_\pm = \arctg(n_\pm/n)$ (рис. 1, *a*).

При симметричных направлениях распространения, когда $\varphi = 0$ или $\pi/2$, сагиттальная плоскость оказывается плоскостью симметрии и каждое из двух упомянутых выше независимых семейств собственных волн в свою очередь распадается еще на два, одно из которых сформировано волнами „плюс“-ветвей, а другое — волнами „минус“-ветвей (рис. 1, *b, c*). При этом дисперсионные соотношения для собственных волн всех четырех семейств легко записать в явной форме. Так, при $\varphi = 0$ имеем следующие четыре выражения для безразмерных частот $\Omega = \omega d/c$:

$$\Omega(n^2) = \begin{cases} [-\arctg(n_+ \epsilon / p \epsilon_1) + \pi m] / n_+, & (S_{EAH})_+, & (6) \\ [\arctg(p / n_-) + \pi s] / n_-, & (S_{EAH})_-, & (7) \\ [\arctg(p \epsilon_1 / n_+ \epsilon) + \pi k] / n_+, & (A_{ESH})_+, & (8) \\ [-\arctg(n_- / p) + \pi l] / n_-, & (A_{ESH})_-, & (9) \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_+ &= n_+(n^2) = \sqrt{\epsilon_1 - n^2 \epsilon_1 / \epsilon_3}, \\ n_- &= n_-(n^2) = \sqrt{\epsilon_2 - n^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

m, s, k, l — числа натурального ряда, определяющие номер соответствующей дисперсионной ветви. Семейства дисперсионных кривых, описываемых соотношениями (6)–(9), приведены на рис. 2, *a, b*. При построении этих кривых удобно использовать асимптотические выражения при малых и больших значениях аргументов тригонометрических функций, т. е. когда $p \rightarrow 0$ (при $n^2 \rightarrow \epsilon$); $n_+ \rightarrow 0$ (при $n^2 \rightarrow \epsilon_3$); $n_- \rightarrow 0$ (при $n^2 \rightarrow \epsilon_2$).

Векторные амплитуды волновых полей для конфигураций $(S_{EAH})_\pm$, описываемых дисперсионными соотношениями (6) и (7), имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+(z) &= a^+ \begin{bmatrix} (n_+ / \epsilon_1) \cos(\Omega n_+ z / d) \\ 0 \\ -(n_+ / \epsilon_3) i \sin(\Omega n_+ z / d) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}^+(z) &= a^+ \begin{bmatrix} 0 \\ i \sin(\Omega n_+ z / d) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^-(z) = a^- \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\Omega n_- z/d) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}^-(z) = a^- \begin{bmatrix} -n_- i \sin(\Omega n_- z/d) \\ 0 \\ n_- \cos(\Omega n_- z/d) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Здесь a^\pm — амплитудные множители. Для конфигураций $(A_E S_H)_\pm$, описываемых соотношениями (8) и (9), векторные амплитуды волновых полей получаются из (11), (12) при замене $\cos \leftrightarrow i \sin$ (рис. 1, *b, c*).

Принимая во внимание конфигурацию кривых (рис. 2, *a, b*), приближающихся к разным асимптотическим уровням $n^2 \rightarrow \varepsilon_3$ и $n^2 \rightarrow \varepsilon_2$, нетрудно понять, что при наложении рис. 2, *a* на рис. 2, *b* должны возникнуть множественные пересечения соответствующих дисперсионных кривых в области

$$\varepsilon < n^2 < \min(\varepsilon_2, \varepsilon_3). \quad (13)$$

Для второй ориентации сагиттальной плоскости, когда она также совпадает с плоскостью симметрии (при $\varphi = \pi/2$), приведенные результаты сохраняют силу, если учесть изменения в направлениях осей координат: $x \rightarrow y, y \rightarrow -x$. При этом в выписанных соотношениях следует произвести замену $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$.

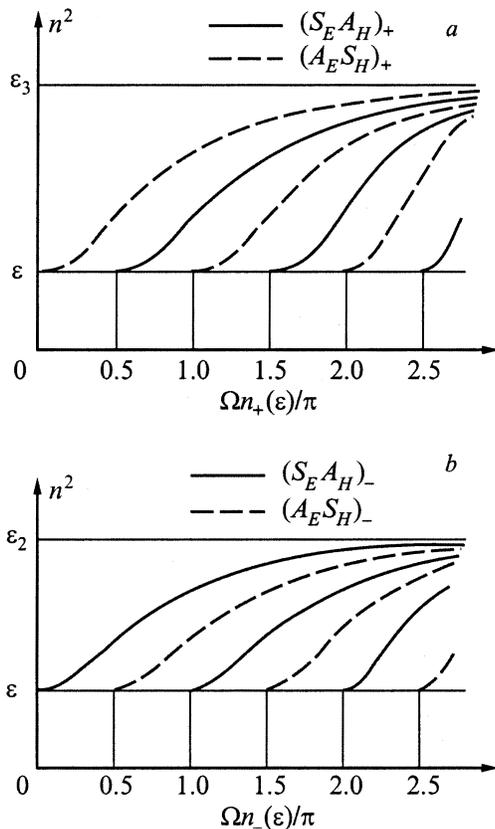


Рис. 2. Дисперсионные кривые четырех независимых семейств объемных собственных волн.

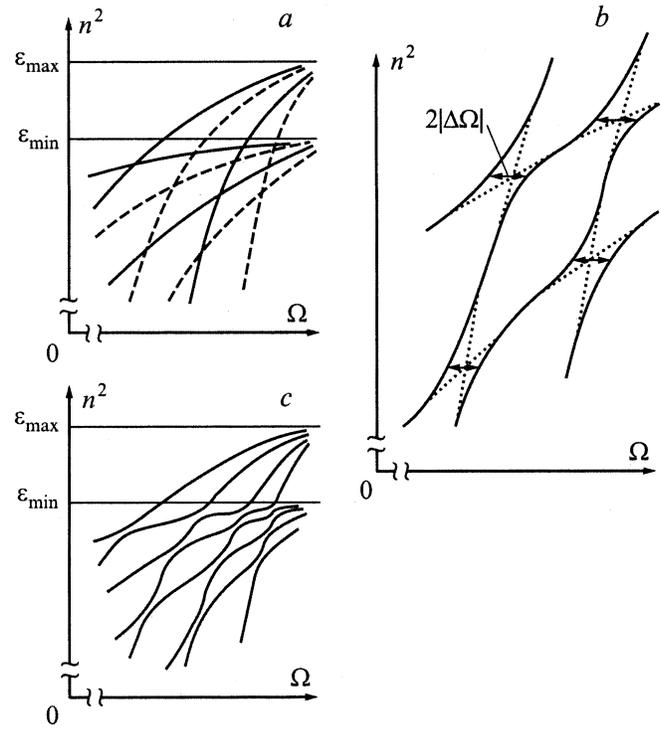


Рис. 3. Схема возникновения мод смешанных поляризации. *a* — пересечения семейств дисперсионных кривых собственных волн независимых поляризации при отсутствии возмущения; *b* — принципиальная схема расталкивания дисперсионных кривых при возмущении (пунктиром показан ход кривых при отсутствии возмущения); *c* — трансформация дисперсионных кривых, показанных на рис. 3, *a*, под влиянием возмущения.

2. Возникновение мод гибридной поляризации

Если в результате общего возмущения и сагиттальная плоскость, и грани пластины одновременно перестают совпадать с плоскостями симметрии, все четыре семейства собственных волн перестают быть независимыми: возникают моды гибридной поляризации, а все точки пересечения дисперсионных кривых исчезают, кривые расталкиваются (рис. 3, *a-c*). Это происходит, например, при небольшом повороте граней вокруг общего (несимметричного) направления, лежащего в плоскости xu . Величина расщепления $\Delta\Omega$ оказывается при этом пропорциональной углу такого поворота. Отметим, что аналогичный эффект расталкивания описан авторами для упругих волн в кристаллах [4].

Рассмотрим подробнее один из видов возмущений, в результате которого только сагиттальная плоскость перестает быть плоскостью симметрии, а грани пластины по-прежнему остаются плоскостями симметрии. Таким возмущением является небольшое изменение направления распространения — его отклонение от оси x на малый угол $\Delta\varphi$. При этом происходит гибридизация волн одинаковой четности, принадлежащих

„плюс“- и „минус“-ветвям. Описанные выше четыре серии решений объединяются в два независимых семейства, образованных линейными комбинациями типа (3) ранее независимых конфигураций $(S_E A_H)_+$, $(S_E A_H)_-$ с одной стороны и $(A_E S_H)_+$, $(A_E S_H)_-$ с другой. Анализ поведения дисперсионных кривых волновых полей одинаковой четности вблизи любой из точек их пересечения показывает, что возмущение ликвидирует пересечение ветвей: происходит расталкивание кривых на величину, пропорциональную параметру возмущения ($\Delta\Omega \sim \Delta\varphi$). Опуская достаточно громоздкие выкладки, приведем конечный результат

$$\Delta\Omega = \pm(\Delta\varphi)n^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_3(f_+ \varepsilon_1 / \varepsilon - 1)(f_- - 1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon)[(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon^2)n^2 - \varepsilon \varepsilon_3(\varepsilon_1 - \varepsilon)]}}. \quad (14)$$

Здесь для краткости введены обозначения

$$f_{\pm} = f_{\pm}(n^2) = \frac{p^2(\delta_3 - \delta_1) + \delta_3 \varepsilon \varepsilon_3 / \varepsilon_1}{\delta_1 n_{\pm}^2 + \delta_3 n^2},$$

$$\delta_1 = 1/\varepsilon_1 - 1/\varepsilon_2, \quad \delta_3 = 1/\varepsilon_3 - 1/\varepsilon_2. \quad (15)$$

Величины n^2 в этих выражениях определены по положениям точек пересечения дисперсионных кривых при отсутствии возмущения. Соответствующие условия получаются в результате приравнивания правых частей (6) и (7) или (8) и (9).

Поляризация волновых полей при этом оказывается гибридной и резко меняется при небольших изменениях частоты Ω на тех участках дисперсионных кривых, которые близки к точкам разрыва. Несмотря на малость возмущения, общая структура и направленность дисперсионных кривых резко поменялись. Гладкие линии приобрели ярко выраженную волнообразность. Появилось новое качество: при плавном движении по отдельной дисперсионной кривой поляризация с определенной периодичностью резко меняется. Векторы поляризации при этом совершают движение между взаимно ортогональными предельными ориентациями (это видно из соотношений (11), (12) и рис. 1, *b, c*). Возникают большие эффекты, вызванные малым возмущением.

Наконец, отметим, что данное возмущение не ликвидирует точки пересечения ветвей, отвечающих волновым полям разной четности. Такие поля остаются независимыми до тех пор, пока поверхности пластины параллельны плоскостям симметрии тензора ε .

Выражение (14), справедливое для оптически двуосных кристаллов, сильно упрощается для случая оптически одноосных сред. Так, если в исходном невозмущенном состоянии оптическая ось перпендикулярна сагиттальной плоскости, т.е. направлена вдоль оси y , то формула (14) приобретает вид

$$\Delta\Omega = \pm(\Delta\varphi)n^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon_0(\varepsilon_e - \varepsilon)[(\varepsilon_0 + \varepsilon)n^2 - \varepsilon \varepsilon_0]}}. \quad (16)$$

Здесь ε_0 и ε_e — диэлектрические проницаемости оптически одноосных кристаллов [1–3], причем в нашем случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_e = \varepsilon_2$.

Если же в исходном состоянии оптическая ось лежит в сагиттальной плоскости и направлена вдоль оси x , то выражение (14) принимает форму

$$\Delta\Omega = \pm(\Delta\varphi) \frac{n^2}{\varepsilon_0 - n^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_0 - \varepsilon)}{(\varepsilon_0 \varepsilon_e - \varepsilon^2)n^2 - \varepsilon \varepsilon_0(\varepsilon_e - \varepsilon)n^2}}. \quad (17)$$

В этом случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_e = \varepsilon_1$. Заметим, что формулы (14), (16), (17), полученные в линейном приближении по возмущению $\Delta\varphi$, допускают лишь такие варианты параметров, при которых величина $\Delta\Omega$ остается малой.

3. Обсуждение

Обсудим характерные черты влияния различных типов возмущений на картину дисперсионных кривых. При повороте граней пластины относительно кристаллографических осей на небольшой угол $\Delta\vartheta$ вокруг нормали к сагиттальной плоскости (вокруг направления оси y) сагиттальная плоскость остается плоскостью симметрии, а грани перестают совпадать с плоскостями симметрии. При этом четыре изначально независимых семейства также попарно гибридизируются. Однако соответствующие пары формируются уже по иному принципу: одна из них образуется волнами только „плюс“-ветвей, а другая — волнами только „минус“-ветвей. Возмущение искажает структуру волновых полей, так что свойства четности (2) исчезают, однако расталкивания пересекающихся дисперсионных кривых не происходит. Действительно, рассматриваемое малое возмущение лишь слегка искажает дисперсионные кривые на рис. 2, *a, b*, что не может устранить пересечения „плюс“- и „минус“-ветвей. Если же, сохраняя данное возмущение, ввести еще и небольшое изменение направления распространения $\Delta\varphi$, то и сагиттальная плоскость перестает быть плоскостью симметрии, при этом должны исчезать все точки пересечения ветвей. Расталкивание ветвей, отвечающих полям изначально (до возмущения) одинаковой четности, приближенно будет описываться приведенными выше соотношениями, в которых $\Delta\Omega \sim \Delta\varphi$, а расталкивание ветвей, относящихся к полям (до возмущения) разной четности, оказывается более слабым и определяется произведением двух малых параметров: $\Delta\Omega \sim (\Delta\varphi)(\Delta\vartheta)$.

При этом возмущении — повороте граней пластины на угол $\Delta\vartheta$ вокруг направления распространения, параллельного оси x , — одновременно и сагиттальная плоскость, и грани перестают совпадать с плоскостями симметрии. При этом исчезают любые точки пересечения дисперсионных кривых. Анализ показывает, что в этом случае расщепление ветвей, пропорциональное параметру возмущения $\Delta\Omega \sim \Delta\vartheta$, существует лишь для ветвей, отвечающих изначально разной четности волновых полей, а расщепление ветвей, отвечающих (до возмущения) одинаковой четности, имеет более высокий порядок малости: $\Delta\Omega \sim (\Delta\vartheta)^2$.

Возбуждение описанных полей можно осуществить методом нарушенного полного внутреннего отражения подобно тому, как это делается при возбуждении поверхностных электромагнитных и упругих волн в твердых телах. Принципы методики описаны в работах [5,6]. При этом на практике особенно легко управлять гибридными волновыми полями и величиной расщепления дисперсионных кривых, меняя лишь направление распространения (угол φ). Важно, что даже очень небольшие изменения в направлении распространения приводят к существенным изменениям в структуре волновых полей.

Список литературы

- [1] А.Ф. Константинова, Б.Н. Гречушников, Б.В. Бокуть, Е.Г. Валяшко. Оптические свойства кристаллов. Наука і тэхніка, Минск. (1995). 304 с.
- [2] Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. Основы кристаллофизики. Наука, М. (1979). 640 с.
- [3] В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. Наука, М. (1965). 376 с.
- [4] В.И. Альшиц, В.Н. Любимов. Кристаллография **33**, 2, 279 (1988).
- [5] В.И. Альшиц, В.Н. Любимов, Л.А. Шувалов. ФТТ **43**, 7, 1322 (2001).
- [6] V.I. Alshits, A.S. Gorkunova, V.N. Lyubimov, W. Gierulski, A. Radowicz, R. Kotowski. Proc. Int. Symp. Trends in Continuum Physics. World Scientific, Singapore–New Jersey–Hong Kong (1999). P. 28.