

05

Применение новой модели остаточной намагниченности железа для расчета поворотного магнита ускорителя

© М.Э. Рояк¹, И.М. Ступаков¹, Н.С. Кондратьева¹,
Н.А. Винокуров^{2,¶}, О.А. Шевченко²,
С.С. Середняков², Я.И. Горбачёв²

¹ Новосибирский государственный технический университет

² Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН, Новосибирск

¶ E-mail: vinokurov@inp.nsk.su

Поступило в Редакцию 27 декабря 2016 г.

Учет остаточной намагниченности железа необходим при расчете магнитного поля элементов электронно-оптических каналов ускорителей заряженных частиц, так как вклад остаточной намагниченности в поле в рабочем зазоре может быть порядка мТ. Кроме того, величина и знак этого вклада зависят от процесса намагничивания. Ранее авторами была предложена модель остаточной намагниченности железа, использующая небольшое число сортов магнитных доменов. Здесь описан алгоритм расчета магнитного поля с применением этой модели. Работоспособность алгоритма продемонстрирована для случая простейшего электромагнита с *O*-образным магнитопроводом. Сравнение с результатами измерений показало удовлетворительную точность учета остаточной намагниченности.

DOI: 10.21883/PJTF.2017.20.45147.16647

В большинстве существующих программных комплексов для расчета магнитных полей фрагментов ускорителей используется подход, основанный на использовании зависимости магнитной проницаемости среды от поля, рассчитанной по главной кривой намагничивания. Этот подход никак не учитывает гистерезис, что часто приводит к расхождению рассчитанных характеристик магнита с экспериментальными. Основная цель настоящей публикации — разработка эффективных методов численного моделирования магнитных полей в магнитах с ферромагнитным магнитопроводом, позволяющих учитывать остаточную

намагниченность ферромагнетиков, зависящую от „истории“ изменения возбуждающих поле токов.

Будем считать, что вся область моделирования состоит из двух подобластей: подобласти Ω_H , в которой отсутствуют сторонние токи и содержатся все магнитные материалы, и подобласти Ω_A , в которой нет магнитных материалов и есть сторонние токи. Используем математическую модель на основе полного и неполного скалярных потенциалов [1].

Представим напряженность поля \mathbf{H} в подобласти Ω_H в виде градиента полного потенциала: $\mathbf{H} = -\nabla u$. Тогда индукция определяется формулой $\mathbf{B} = \mu_0(-\nabla u + \mathbf{M})$, где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, \mathbf{M} — намагниченность среды, которая может зависеть от напряженности поля, времени и предыстории намагниченности, а из условия $\nabla \mathbf{B} = 0$ получаем уравнение для нахождения полного скалярного потенциала u в подобласти Ω_H

$$\Delta u = \nabla \mathbf{M}. \tag{1}$$

Построим для уравнения (1) вариационную постановку. Запишем это уравнение в слабой форме, домножив обе его части на некоторую пробную функцию v из пространства H^1 и проинтегрировав их по Ω_H . Тогда, используя интегрирование по частям и то, что $\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} = -\nabla u + \mathbf{M}$, получим

$$-\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial\Omega_H} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v d\Gamma = \int_{\Omega_H} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \nabla v d\Omega. \tag{2}$$

В подобласти Ω_A будем искать \mathbf{H} в виде $-\nabla u + \mathbf{H}_{ext}$, где u — неполный потенциал, \mathbf{H}_{ext} — поле токов в однородном пространстве, удовлетворяющее уравнению $\nabla \cdot \mathbf{H}_{ext} = 0$. Тогда для нахождения неполного потенциала u в подобласти Ω_A получаем уравнение $\Delta u = 0$. Аналогично выводу (2), записывая вариационную постановку в подобласти Ω_A , получим

$$-\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v d\Gamma = \int_{\Omega_A} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} v d\Gamma. \tag{3}$$

На границе между подобластями необходимо потребовать непрерывности нормальной компоненты вектора \mathbf{B} и касательной компоненты

вектора \mathbf{H} . Первое условие обеспечивается, если сложить уравнения (2) и (3) и учесть, что подинтегральные выражения их левых частей различаются на границе подобластей только знаком нормали:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \nabla v d\Omega + \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} v d\Gamma. \quad (4)$$

Для выполнения второго условия потенциал u должен быть полным в подобласти Ω_H и неполным в подобласти Ω_A , т.е. функция должна иметь разрыв на границе между подобластями, и касательная компонента градиента этого разрыва должна быть равна касательной компоненте вектора \mathbf{H}_{ext} . Это можно обеспечить специальным выбором базисных функций для представления u .

Для построения конечно-элементной дискретизации представим потенциал u в виде разложения по базису $u = \sum_j q_j \varphi_j$ и выберем пробные функции из того же конечно-мерного пространства. Тогда для пробной функции φ_i уравнение (4) примет вид

$$\sum_j q_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} \varphi_i d\Gamma. \quad (5)$$

Будем считать, что на каждом конечном элементе Ω_k намагниченность \mathbf{M}^{Ω_k} постоянна и зависит от среднего на элементе значения напряженности. Введем обозначения $A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \times \nabla \varphi_j d\Omega$, $\mathbf{B}_i^k = \int_{\Omega_k} \nabla \varphi_i d\Omega$, $f_i = \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} \varphi_i d\Gamma$, тогда $\int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \nabla \varphi_i d\Omega \approx \sum_k \mathbf{M}^{\Omega_k} (\mathbf{H}^k) \cdot \mathbf{B}_i^k$, где $\mathbf{H}^k = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_i q_i \mathbf{B}_i^k$, а систему уравнений (5) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{f} + \sum_k \mathbf{F}^{\Omega_k}(\mathbf{q}), \quad (6)$$

где матрица \mathbf{A} состоит из компонент A_{ij} , вектор \mathbf{q} — из компонент q_i , вектор \mathbf{f} — из компонент f_i , а вектор \mathbf{F}^{Ω_k} — из компонент

$$F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^{\Omega_k}(\mathbf{H}) \cdot \mathbf{B}_i^k. \quad (7)$$

Обратим внимание на то, что система уравнений (6) является нелинейной. Поскольку ее решение методом простой итерации, как показали вычислительные эксперименты, оказывается чрезвычайно неэффективным, построим итерационный процесс с линеаризацией этой системы в окрестности некоторого начального решения \mathbf{q}^0 :

$$F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}) = F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}^0) + \sum_j \frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} (q_j - q_j^0),$$

где с учетом (7)

$$\frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^3 B_{il}^k \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{M}_l^{\Omega_k}}{\partial \mathbf{H}_m} \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial q_j} = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{M}_l^{\Omega_k}}{\partial \mathbf{H}_m} B_{il}^k B_{jm}^k. \quad (8)$$

Выражение (8) фактически определяет вклады в матрицу и правую часть от конечного элемента для метода Ньютона (см. [1]).

Используем для описания зависимости $\mathbf{M}^{\Omega_k}(\mathbf{H})$ на конечном элементе одну из скалярных макромоделей вида $M(H)$, рассмотренных в [2]. Для перехода от скалярной модели к изотропной векторной можно использовать усреднение по направлениям [3], т. е.

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{3}{4\pi} \int_S \mathbf{r} M(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}) dS, \quad (9)$$

где S — сфера единичного радиуса. Вычислим интеграл в (9) численно. Обозначим через N число точек используемой квадратуры, через \mathbf{r}_n сами точки, а через w_n — соответствующие им веса с учетом коэффициента нормировки. Тогда векторная макро модель будет иметь вид $\mathbf{M}(\mathbf{H}) \approx \sum_{n=1}^N w_n \mathbf{r}_n M(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n)$, и вместо (7) получим

$$F_i^{\Omega_k}(q) = \sum_{n=1}^N w_n M(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{B}_i^k \cdot \mathbf{r}_n). \quad (10)$$

Обозначим через $r_{n,l}$ компоненту l вектора \mathbf{r}_n . Тогда производную компоненты вектора намагниченности по компоненте вектора напряженности можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial \mathbf{H}_m} = \sum_{n=1}^N w_n r_{n,l} r_{n,m} M'(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n).$$

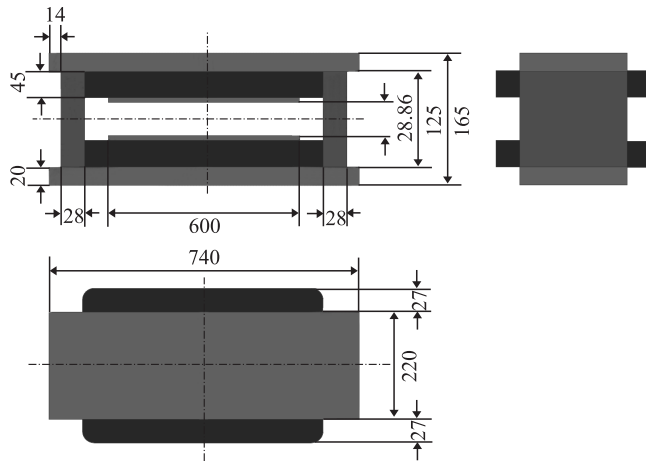


Рис. 1. Поворотный магнит.

Подставив полученное выражение в (8), получим

$$\frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{n=1}^N w_n M'(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{B}_i^k \cdot \mathbf{r}_n) (\mathbf{B}_j^k \cdot \mathbf{r}_n).$$

Таким образом, реализация учета гистерезиса требует хранения на каждом конечном элементе N комплектов параметров истории макро-модели гистерезиса, т. е., например, для модели Винокурова, описанной в [2], — $2N$ вещественных чисел.

Для проверки точности нового алгоритма, учитывающего остаточную намагниченность, были проведены магнитные измерения поля в зазоре типичного поворотного магнита (рис. 1) при циклическом изменении тока в обмотке. Чтобы усилить гистерезисные явления, боковые стенки O -образного магнитопровода были изготовлены из конструкционной стали 3 с относительно высоким содержанием углерода. Именно для этой стали изучались модели гистерезиса в работе [2]. На обмотку подавался ток с пилообразной временной зависимостью. Все измерения проводились из предварительно размагниченого состояния при симметричном (биполярном) и несимметричном (уни-

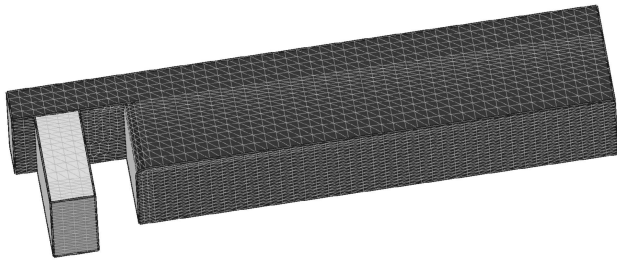


Рис. 2. Сетка на поверхности стали.

полярном) изменении тока I в обмотке. Измерения датчиком Холла проводились в двух точках: первая находится в центре магнита, а вторая сдвинута на 25 см вдоль длинной стороны полюса.

Для численного моделирования была задана восьмая часть магнита, построена сетка, изображенная на рис. 2, и использована следующая скалярная модель гистерезиса [2]:

$$M(H) = \chi H + \frac{1}{2} (M(H_{eff1}) + M(H_{eff2})), \quad (11)$$

где $M(H_{eff}) = M_{\max} (1 - 1/\sqrt{1 + 2\chi_0 |H_{eff}|/M_{\max}}) \operatorname{sgn}(H_{eff})$, H_{effi} находится как решение дифференциального уравнения $dH_{effi} = \vartheta [|H \cos \theta_i - H_{effi}| - H_{ci}] \cos \theta_i dH$, ϑ — ступенчатая функция Хевисайда, $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$. Отличие от описанной в работе [2] модели состоит только в том, что в формуле (11) присутствует дополнительное слагаемое χH . Для стали 3 параметры векторной модели были подобраны по экспериментальным данным, приведенным в работе [2]: $M_{\max} = 793 \text{ Г}$, $\chi = 0$, $\chi_0 = 1295$, $H_{c1} = 1.43 \text{ Ое}$ и $H_{c2} = 0.39 \text{ Ое}$. Полюс магнитопровода изготовлен из малоуглеродистой стали, по химическому составу и магнитным свойствам близкой к чистому железу. Однако численное моделирование было осложнено тем, что образцов этой стали не осталось, и поэтому определять параметры модели гистерезиса для расчета пришлось по трехмерному моделированию. Для подбора параметров модели было выбрано симметричное изменение тока. Таким образом были получены параметры для этой стали $M_{\max} = 472 \text{ Г}$, $\chi = 397$, $\chi_0 = 4802$, $H_{c1} = 1.48 \text{ Ое}$ и $H_{c2} = 0.23 \text{ Ое}$. Результаты модели-

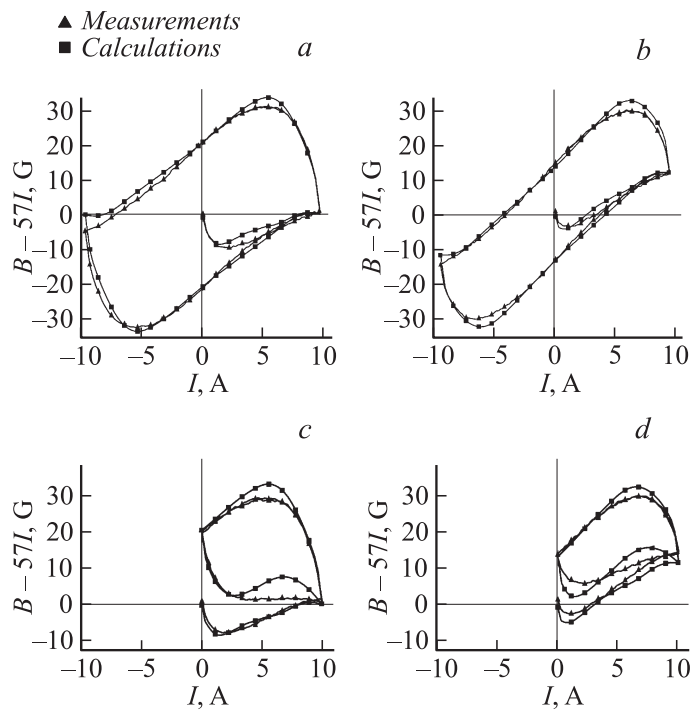


Рис. 3. Измеренные (треугольники) и рассчитанные (квадраты) зависимости индукции B в двух точках (a и c — в центре, b и d — на краю) зазора электромагнита от тока I в его катушках. По оси ординат отложено поле с вычтенной линейной частью, т. е. величина $B (G) - 57I (A)$.

рования вместе с данными экспериментов представлены на рис 3. Для того чтобы отличия эксперимента от модели были видны, на рисунках показаны графики функции $B - 57I$. Измерения и результаты представлены в двух точках. Первая находится в центре полюса (рис. 3, a, c), а вторая — в 25 см от центра (рис. 3, b, d). Измерения и расчеты проводились при двух способах изменения тока: симметричном, когда ток менялся циклически от -8 до $+8$ А (рис. 3, a, b), и несимметричном, когда ток менялся циклически от 0 до 8 А (рис. 3, c, d).

Из представленных результатов видно, что симметричный цикл, по которому подбирались параметры модели, описывается несколько точнее, но и для несимметричного цикла отличия моделирования от эксперимента не превышают 5–6 G. Заметим, что частично эти отличия могут объясняться вихревыми токами, которые не учитываются в описанной в настоящей работе модели. Моделирование вихревых токов, проведенное с использованием не учитывающего гистерезис подхода, описанного в [4], показало, что вихревые токи вносят вклад более 2 G, что подтверждается и экспериментально (при использовании другой скорости подъема тока). Остальные отличия могут объясняться как недостаточно хорошо подобранными параметрами модели гистерезиса, так и неполным размагничиванием перед началом циклов. Следует отметить, что такая ситуация типична для магнитов, используемых в ускорительной технике, так как обычно магнитопроводы электромагнитов конструируются так, чтобы индукция в них не достигала индукции насыщения. Заметим, что даже описанная выше довольно грубая аппроксимация гистерезисных явлений обеспечивает точность расчета, в несколько раз лучшую, чем обычно используемые расчеты по главной кривой намагничивания, не учитывающие остаточной намагниченности (порядок ошибок расчетов без учета остаточной намагниченности — высота петель гистерезиса, показанных на рис. 3). Кроме того, точность знания параметров петли гистерезиса материала магнитопровода тоже невелика, так как эти параметры зависят от технологии изготовления, в частности от температуры отжига, которая может быть различной у разных образцов того же материала и даже в разных областях одной и той же детали. Полученные результаты сравнения данных эксперимента и численного моделирования показывают несомненную перспективность рассматриваемого подхода к учету гистерезиса в численном моделировании. Однако для построения эффективных процедур численного моделирования необходимы дальнейшие исследования, в частности требуется внести в математическую модель возможность учета вихревых токов, возникающих в полюсе магнита при изменении тока в обмотках; также нужно провести эксперименты с магнитом, для всех материалов которого можно отдельно оценить параметры модели гистерезиса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-02-07776). Модификация электромагнита и измерения магнитного поля в нем выполнены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00080).

Список литературы

- [1] *Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.* Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач. Новосибирск: НГТУ, 2007. 869 с.
- [2] *Винокуров Н.А., Шевченко О.А., Середняков С.С., Щеглов М.А., Рояк М.Э., Ступаков И.М., Кондратьева Н.С.* // Письма в ЖТФ. 2016. Т. 42. В. 13. С. 96–103.
- [3] *Mayergoyz I.D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. Academic Press, 2003. 498 p.
- [4] *Royak M.E., Stupakov I.M., Kondratyeva N.S.* // Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2016). Proc. of the 13th Int. Conf. Novosibirsk: NSTU, 2016. V. 1. Pt 2. P. 330–335.