01

Связанные солитонные состояния и локализация кноидальных волн на границе раздела нелинейной и линейной сред

© С.Е. Савотченко

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,
308012 Белгород, Россия
e-mail: savotchenkose@mail.ru)

(Поступило в Редакцию 4 апреля 2017 г.)

Рассмотрены контактные явления на границе линейной и нелинейной сред. Решены вопросы существования различных видов стационарных состояний в двухуровневой системе с отличающимися параметрами закона дисперсии. На основе модели, использующей нелинейное уравнение Шредингера, показано, что в рассматриваемой системе в зависимости от значения энергии возникают связанные состояния солитонов, локализация волн по одну сторону от дефекта, трансформация нелинейной волны в линейную при переходе через границу раздела сред. Получены дисперсионные соотношения, определяющие значения энергии таких состояний.

DOI: 10.21883/JTF.2017.12.45197.2282

Введение

Явления, происходящие вблизи контакта двух сред с различными физическими свойствами, играют важную роль в различных технических приложениях квантовой твердотельной электроники и оптоэлектроники. Особое значение в этом направлении имеет изучение характеристик прозрачности границы раздела, с чем связаны эффекты локализации элементарных возбуждений в кристаллах[1]. Новые особенности возникают в ангармонических кристаллах с дефектами, в которых отмечено существование локальных колебательных состояний с частотами вне зоны сплошного спектра, зависящими от амплитуды колебаний [2]. К настоящему времени существует большое количество теоретических работ, посвященных описанию малоамплитудных нелинейных колебаний, локализованных вблизи дефектов, использующих при формулировке математических моделей различные нелинейные уравнения, в том числе и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) [3].

НУШ широко применяется для формулировки моделей при исследовании полей различной физической природы: упругого, электрического и магнитного [4]. В частности, НУШ использовалось при описании эффектов локализации электромагнитных волн вблизи границ раздела нелинейных сред [5], где указано существование нелинейных локализованных возбуждений с несимметричным профилем, отличающихся от свободно распространяющихся солитонов, и называемых нелинейными поверхностными волнами. Предлагалось также и обобщение НУШ для среды с пространственной дисперсией [6].

Поэтому для описания новых эффектов, связанных с локализацией возбуждений различной физической природы вблизи дефектов, имеет смысл далее рассматривать математическую модель, использующую НУШ, которому подчиняется функция ψ, выступающая в роли огибающей комплексного поля компонент вектора намагниченности в легкоосном ферромагнетике, либо комплексной амплитуды упругого поля смещения сдвиговой волны в кубическом кристалле с плоским дефектом, либо комплексной функции из амплитуд компонент электрического поля в оптической нелинейной среде [3]. Тогда параметры в уравнениях будут иметь соответствующий физических смысл в рамках одной из трех указанных моделей.

При наличии плоского дефекта в виде границы раздела нелинейных сред с различными характеристиками НУШ использовалось в [7], где была рассмотрена проблема решения НУШ с модифицированным потенциалом с δ-функцией, моделирующим взаимодействие возбуждения с точечным дефектом, обладающего внутренней структурой, в нелинейной среде при учете дальнодействующих сил межатомного взаимодействия.

В настоящей работе получены решения НУШ и определены энергетические уровни стационарных колебательных состояний вблизи дефекта в рамках модели, которая представляет собой обобщение двухуровневой системы, рассмотренной в [8,9], для случая границы раздела нелинейной и линейной сред.

Наличие двух ветвей возбуждений с различающимися параметрами законов дисперсии и взаимодействие возбуждений с плоскостью контакта сред с различными характеристиками, в том числе и ангармонизмом, приводит к появлению целого набора стационарных состояний различных типов. Волновые функции в таких состояниях в зависимости от энергии возбуждений в полупространстве с линейной средой могут быть монотонно затухающими при удалении от границы раздела, или гармоническими колебаниями, а в полупространстве с нелинейной средой они могут иметь форму солитонов НУШ или кноидальных волн, соответствующих периодическим решениям НУШ. При формулировке математической модели взаимодействие ветвей возбуждений на границе раздела сред учитывается специфическими граничными условиями [8]. В результате комбинации различных типов решений линейного уравнения Шредингера (УШ) и НУШ, удовлетворяющих сформулированным граничным условиям, и возникает многообразие различных типов стационарных состояний, описывающих процессы трансформации и локализации волн при переходе через границу раздела сред.

1. Формулировка математической модели

Будем считать, что две среды с различными физическими характеристиками, в том числе и по критерию нелинейности, разделены плоской границей раздела, проходящей через начало координат, перпендикулярно оси Ox. Полупространство в области $x < 0$ занимает среда с гармоническим межатомным взаимодействием (линейная среда), а полупространство в области $x > 0$ занимает среда с ангармоническим межатомным взаимодействием (нелинейная среда). Также предполагается, что возмущение параметров сред, создаваемое границей раздела как плоским дефектом, сосредоточено на расстояниях, существенно меньших размеров возбуждений, и в этом смысле оно может считаться локальным.

Рассмотрим взаимодействие линейных и нелинейных возбуждений, взаимодействующих вблизи дефекта на основе одномерной модели двухуровневой системы, в которой возбуждение на границе раздела сред, как плоском дефекте, может находиться в двух состояниях с различными энергиями $\Omega_1^{(+)}$ и $\Omega_2^{(+)}$. Знак „$+$“ здесь и далее означает принадлежность параметра к характеристикам полупространства с нелинейной средой, а „$-$“ — линейной.

Вследствие локальности возмущения параметров сред взаимодействие границы раздела с возбуждением можно описывать короткодействующим потенциалом с δ-функцией. Полная волновая функция двухуровневой системы с энергией E, подчиняющаяся стационарному уравнению Шредингера $H\Psi = E\Psi$, состоит из двух слагаемых, для которых возбуждение может находиться в первом или во втором состояниях (уровнях): $\Psi(x) = a_1^+|0\rangle\psi_1(x) + a_2^+|0\rangle\psi_2(x)$, где $a_{1,2}^+$, $a_{1,2}$ — операторы рождения и уничтожения возбуждения в первом и втором состояниях [9], а волновые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ этих состояний (ветвей спектра) являются независимыми решениями линейного УШ в полупространстве с линейной средой и НУШ в полупространстве с нелинейной средой

$$E\psi_j(x) = -\frac{1}{2m_j}\psi_j''(x) + \Omega_j(x)\psi_j(x) - \gamma_j\theta(x)|\psi_j(x)|^2\psi_j(x) + U_j(x). \qquad (1)$$

Здесь и далее индекс принимает два значения: $j = 1, 2$, использована функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

m_j — эффективная масса возбуждений, $\gamma_j > 0$ — параметры нелинейности среды, расположенной справа от дефекта, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака,

$$\Omega_j(x) = \begin{cases} \Omega_j^{(-)}, & x < 0, \\ \Omega_j^{(+)}, & x > 0, \end{cases}$$

$\Omega_j^{(\pm)}$ — значения уровней дна энергетической зоны, U_j — потенциалы, описывающие взаимодействие волн на границе раздела двух сред

$$U_1(x) = (\alpha_1\psi_1 + \beta\psi_2)\delta(x), \quad U_2 = (\alpha_2\psi_2 + \beta\psi_1)\delta(x), \qquad (2)$$

α_j, β — параметры интенсивности взаимодействия возбуждений на границе раздела сред.

Стационарные состояния с энергией E уравнений (1) представимы в виде $\psi_j(x,t) = \psi_j(x)\exp(-iEt)$. Тогда решение уравнений (1) с потенциалами (2) сводится к решению стационарных УШ и НУШ:

$$\psi_j''(x) + 2m_j\big(E - \Omega_j(x)\big)\psi_j(x) + 2m_j\gamma_j\theta(x)|\psi_j(x)|^2\psi_j(x) = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$\psi_j(+0) = \psi_j(-0) = \psi_j(0), \qquad (4)$$

$$\begin{cases} \psi_1'(+0) - \psi_1'(-0) = 2m_1\{\alpha_1\psi_1(0) + \beta\psi_2(0)\}, \\ \psi_2'(+0) - \psi_2'(-0) = 2m_2\{\alpha_2\psi_2(0) + \beta\psi_1(0)\}. \end{cases} \qquad (5)$$

В линейной среде без дефекта распространяются свободные волны с квадратичным законом дисперсии. При наличии дефекта в линейной среде возможно существование локализованных состояний с несимметричной частью волны, распространяющейся только по одну сторону от дефекта [8].

Решения НУШ могут быть солитонные и в виде кноидальных волн, типы которых определяются значением энергии возбуждения и знаком параметра нелинейности [10]. Состояния с энергиями обеих ветвей спектра, лежащими ниже дна зоны сплошного спектра, будем далее называть локализованными, а такие, у которых энергия одной ветви лежит ниже дна зоны, а другой — внутри зоны сплошного спектра — квазилокальными. Рассмотрим далее основные типы возникающих в данной системе состояний в зависимости от их энергии. Во всех этих случаях при наличии дефекта ветви состояний не являются независимыми, а взаимодействуют на границе раздела сред, поэтому могут называться связанными состояниями. Если в структуру волновой функции одной из ветвей в полупространстве с нелинейной средой входит солитонное решение НУШ, то соответствующее связанное состояние можно называть солитонным.

2. Локализованные состояния

В области ниже дна зоны любой из ветвей спектра, когда энергия возбуждений находится в диапазоне $E < \min(\Omega_{1,2}^{(\pm)})$, существуют несколько типов локализованных состояний. Уравнения (3) имеют решения, удовлетворяющие граничным условиям (4) и (5), в виде

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_j^{(-)} e^{\kappa_j x}, & x < 0, \\ \dfrac{A_j^{(+)}}{\operatorname{ch} q_j(x - x_j)}, & x > 0, \end{cases} \tag{6}$$

где декременты затухания $\kappa_j^2 = 2m_j\left(\Omega_j^{(-)} - E\right)$, $q_j^2 = m_j\left(\Omega_j^{(+)} - E\right)$; амплитуды $A_j^{(-)} = q_j(m\gamma_j)^{-1/2}/\operatorname{ch} a_j x_j$, $A_j^{(+)} = q_j(m_j\gamma_j)^{-1/2}$, а уровни энергии определяются из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{t1}\Delta_{t2} = 4m_1m_2\beta^2, \tag{7}$$

где $\Delta_{t1} = q_j \operatorname{th} q_j x_j - \kappa_j - 2m_j\alpha_j$.

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j^{(\pm)} = \Omega$, получается, что $\kappa_j = q_j = q$. Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = x_0$, из (7) вытекает упрощенное дисперсионное соотношение $q(\operatorname{th} qx_0 - 1) = 2m(\alpha \pm \beta)$. В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из него выражается энергия локализованного состояния в явном виде

$$E = \Omega - \frac{1}{8mx_0^2}\left\{1 \pm \left[1 + 8mx_0(\alpha \pm \beta)\right]^{1/2}\right\}^2. \tag{8}$$

Состояние, описываемое волновой функцией (6), характеризует связанное состояние солитонов, локализованных несимметрично относительно границы раздела сред. Параметр x_0 является свободным, поэтому решение данного типа является однопараметрическим.

В рассматриваемом энергетическом диапазоне существует состояние, описываемое волновой функцией вида

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_{dj}^{(-)} e^{\kappa_j x}, & x < 0, \\ A_{dj}^{(+)} \operatorname{dn}\left(q_{dj}(x - x_j), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где k — модуль эллиптической функции dn $(0 < k < 1)$, амплитуды $A_{dj}^{(-)} = \operatorname{dn}(q_{dj}x_j, k)/(m_j\gamma_j)^{1/2}$, $A_{dj}^{(+)} = q_{dj}(m_j\gamma_j)^{-1/2}$, декременты затухания κ_j такие же как и для (6), волновое число $q_{dj}^2 = 2m_j\left(\Omega^{(+)} - E\right)/(2 - k^2)$, а уровни энергии определяются из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{d1}\Delta_{d2} = 4m_1m_2\beta^2, \tag{10}$$

где $\Delta_{dj} = k^2 q_{dj} \operatorname{sn}(q_{dj}x_j, k)\operatorname{sn}(q_{dj}x_j + K(k), k) - \kappa_j - 2m_j\alpha_j$, sn — эллиптический синус, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода [10].

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j^{(\pm)} = \Omega$, получается, что $\kappa_j = \kappa$, $q_{dj} = q_d$, $\kappa^2 = q_{dj}^2(2 - k^2)$. Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = x_0$, из (10) получается дисперсионное соотношение

$$q_d\left(k^2 \operatorname{sn}(q_d x_0, k)\operatorname{sn}\left(q_d x_0 + K(k), k\right) - \left(2 - k^2\right)^{1/2}\right) = 2m(\alpha \pm \beta). \tag{11}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (11) выражается энергия в явном виде

$$E = \Omega - \frac{(2 - k^2)^2}{8mk^4x_0^2} \times \left\{1 \pm \left[1 + 8mk^2x_0(\alpha \pm \beta)/\left(2 - k^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2, \tag{12}$$

Параметры x_0 и k являются свободными, поэтому решение данного типа является двухпараметрическим.

В рассматриваемом диапазоне энергий существует решение НУШ (3) другого типа

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_{cj}^{(-)} e^{\kappa_j x}, & x < 0, \\ A_{cj}^{(+)} \operatorname{cn}\left(q_{cj}(x - x_j), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{13}$$

где cn — эллиптический косинус; амплитуды $A_{cj}^{(-)} = kq_{cj}/(m_j\gamma_j)^{1/2}\operatorname{cn}(q_{cj}x_j, k)$, $A_{cj}^{(+)} = kq_{cj}(m_j\gamma_j)^{-1/2}$, $q_{cj}^2 = 2m_j\left(\Omega^{(+)} - E\right)/(2k^2 - 1)$, а уровни энергии определяются из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{c1}\Delta_{c2} = 4m_1m_2\beta^2, \tag{14}$$

где $\Delta_{c1} = q_{cj}\operatorname{sn}(q_{cj}x_j, k)/\operatorname{sn}(q_{cj}x_j + K(k), k) - \kappa_j - 2m_j\alpha_j$.

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j = \Omega$, получается, что $\kappa_j = \kappa$, $q_{cj} = qc$, $\kappa^2 = q_{cj}^2(2k^2 - 1)$. Тогда при условии, что $x1 = x2 = x_0$, из (14) получается дисперсионное соотношение

$$q_c\left(\operatorname{sn}(q_c x_0, k)/\operatorname{sn}\left(q_c x_0 + K(k), k\right) - (2k^2 - 1)^{1/2}\right) = 2m(\alpha \pm \beta). \tag{15}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (15) выражается энергия в явном виде

$$E = \Omega - \frac{(2k^2 - 1)^2}{8mx_0^2} \times \left\{1 \pm \left[1 + 8mx_0(\alpha \pm \beta)/(2k^2 - 1)\right]^{1/2}\right\}^2. \tag{16}$$

Волновые функции (9) и (13) описывают локализацию кноидальных волн при переходе через границу раздела нелинейной и линейной сред. Относительно двух ветвей такие состояния можно назвать симметричными, так как обеим ветвям в полупространстве с нелинейной средой соответствуют кноидальные волны.

Помимо таких состояний в рассматриваемом диапазоне энергий могут реализовываться такие, в которых одной ветви соответствует кноидальная волна, а другой солитон. Существует решение уравнения (3), удовлетворяющее условием (3) и (4), описываемое волновыми функциями вида

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A_1^{(-)} e^{\kappa_1 x}, & x < 0, \\ \dfrac{A_1^{(+)}}{\operatorname{ch} q_1(x - x_1)}, & x > 0, \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} A_{d2}^{(-)} e^{\kappa_2 x}, & x < 0, \\ A_{d2}^{(+)} \operatorname{dn}\left(q_{d2}(x - x_2), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{17}$$

в котором величины κ_j и q_1, амплитуды $A_1^{(\pm)}$ такие же как и для (6), q_{d2} и $A_{d2}^{(\pm)}$ — как и для (9), энергия определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{t1}\Delta_{d2} = 4m_1 m_2 \beta^2. \tag{18}$$

Кроме того, существует другое решение уравнения (3), удовлетворяющее условием (3) и (4), в котором волновая функция ψ_1 такая же, как и в (17), а ψ_2 имеет вид

$$\psi_2(x) = \begin{cases} A_{c2}^{(-)} e^{\kappa_2 x}, & x < 0 \\ A_{c2}^{(+)} \operatorname{cn}\left(q_{c2}(x - x_2), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{19}$$

в котором величины κ_j и q_1, амплитуды $A_1^{(\pm)}$ такие же как и в предыдущем случае, а q_{c2} и $A_{c2}^{(\pm)}$ — как и для (13), энергия определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{t1}\Delta_{c2} = 4m_1 m_2 \beta^2. \tag{20}$$

Состояния вида (17) и (19) описывают локализацию нелинейной волны одной ветви с энергией в спектре локальных состояний другой ветви с несимметричным профилем относительно границы раздела сред.

3. Трансформация и локализация волн в спектре квазилокальных состояний

В области выше границы первой зоны, но ниже границы зоны второй ветви спектра, когда энергия возбуждений находится в диапазоне $\Omega_1^{(-)} < E < \min\{\Omega_2^{(-)}, \Omega_2^{(\pm)}\}$, существуют несколько типов квазилокальных состояний. К одному из таких типов относится состояние, описываемое решением уравнений (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5), в котором волновая функция второй ветви ψ_2 такая же, как и в (6), а ψ_1 имеет вид

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A_{\varphi 1}^{(-)} \cos(p_1 x + \varphi), & x < 0, \\ \dfrac{A_1^{(+)}}{\operatorname{ch} q_1(x - x_1)}, & x > 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $p_1^2 = 2m_1(E - \Omega_1^{(-)})$, $A_{\varphi 1}^{(-)} = q_1(m_1\gamma_1)^{-1/2}/\cos\varphi$, остальные величины были определены выше, а энергия определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{t1}^{\varphi}\Delta_{t2} = 4m_1 m_2 \beta^2, \tag{22}$$

где $\Delta_{t1}^{\varphi} = q_1 \operatorname{th} q_1 x_1 + p_1 \operatorname{tg}\varphi - 2m_1\alpha_1$.

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_2^{(\pm)} = \Omega_1^{(+)} \neq \Omega_1^{(-)}$, из (22) получается, что $\kappa_j = q_j = q$. Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = 0$, из (22) получается дисперсионное соотношение:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2m\left\{2m\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + \alpha q_1\right\}/p_1(2m\alpha + q_1).$$

Состояние, описываемое волновой функцией (21), характеризует локализацию бегущей волны первой ветви при наличии связанного состояния второй ветви, локализованного несимметрично относительно границы раздела сред.

В рассматриваемом энергетическом диапазоне существует состояние, в котором для первой ветви волновая функция имеет вид

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A_{\varphi d1}^{(-)} \cos(p_1 x + \varphi), & x < 0, \\ A_{d1}^{(+)} \operatorname{dn}\left(q_{d1}(x - x_1), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{23}$$

где параметры нелинейной волны в положительном полупространстве такие же, как и для (9), волновое число такое же, как и для (21), амплитуда $A_{\varphi d1}^{(-)} = q_{d1}/(m_1\gamma_1)^{1/2} \operatorname{dn}(q_{d1}x_1, k)/\cos\varphi$. Волновая функция второй ветви ψ_2 такая же, как и в (9), а энергия такого состояния определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{d1}^{\varphi}\Delta_{d2} = 4m_1 m_2 \beta^2, \tag{24}$$

где $\Delta_{d1}^{\varphi} = k^2 q_{d1} \operatorname{sn}(q_{d1}x_1, k) \operatorname{sn}(q_{d1}x_1 + K(k), k) + p_1 \operatorname{tg}\varphi - 2m_1\alpha_1$.

В спектре квазилокальных состояний существует еще одно состояние, в котором для первой ветви волновая функция имеет вид

$$\psi_1(x) = \begin{cases} A_{\varphi c1}^{(-1)} \cos(p_1 x + \varphi), & x < 0, \\ A_{c1}^{(+)} \operatorname{cn}\left(q_{c1}(x - x_1), k\right), & x > 0, \end{cases} \tag{25}$$

где параметры нелинейной волны в положительном полупространстве такие же, как и для (13), волновое число такое же, как и для (21), амплитуда $A_{\varphi c1}^{(-)} = q_{c1}/(m_1\gamma_1)^{1/2} \operatorname{cn}(q_{c1}x_1, k)/\cos\varphi$. Волновая функция второй ветви ψ_2 такая же, как и в (13), а энергия такого состояния определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{c1}^{\varphi}\Delta_{c2} = 4m_1 m_2 \beta^2, \tag{26}$$

где $\Delta_{c1}^{\varphi} = q_{c1} \operatorname{sn}(q_{c1}x_1 k)/\operatorname{sn}(q_{c1}x_1 + K(k), k) + p_1 \operatorname{tg}\varphi - 2m_1\alpha_1$.

Состояния вида (23) и (25) описывают трансформацию кноидальной волны в гармоническую для первой ветви и локализацию кноидальной волны для второй ветви при переходе через границу раздела сред. Другими словами, состояния спектра кноидальных волн в полупространстве с нелинейной средой при переходе через границу раздела сред попадают в спектр квазилокальных состояний в полупространстве с линейной средой.

Помимо таких состояний, в рассматриваемом энергетическом диапазоне могут реализовываться состояния, в которых волновая функция первой ветви ψ_1 такая же, как и (21), а второй ветви ψ_2 такая же, как и (9). Параметры решений были определены выше, а энергии таких состояний определяются из дисперсионного соотношения $\Delta_{t1}^{\varphi}\Delta_{d2} = 4m_1m_2\beta^2$. Также имеют место состояния для второго типа кноидальных волн, описываемые волновой функцией первой ветви ψ_1 такой же, как и (21), а второй ветви ψ_2 такой же, как и (13). Параметры решений были определены выше, а энергии таких состояний определяются из дисперсионного соотношения $\Delta_{t1}^{\varphi}\Delta_{c2} = 4m_1m_2\beta^2$.

Следует отметить, что также возможны еще два типа состояний. Для первого типа кноидальных волн (dn) волновая функция первой ветви ψ_1 такая же, как и (17), а второй ветви ψ_2 имеет форму вида (23). Для второго типа кноидальных волн (cn) волновая функция первой ветви ψ_1 остается той же формы (17), а второй ветви ψ_2 имеет форму вида (25). Дисперсионные соотношения для таких состояний будут соответственно представимы в виде $\Delta_{t1}\Delta_{d2}^{\varphi} = 4m_1m_2\beta^2$, где $\Delta_{d2}^{\varphi} = k^2q_{d2}\,\mathrm{sn}\,(q_{d2}x_2, k)\,\mathrm{sn}\,(q_{d2}x_2 + K(k), k) + p_2\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2m_2\alpha_2$ и $\Delta_{t1}\Delta_{c2}^{\varphi} = 4m_1m_2\beta^2$, где $\Delta_{c2}^{\varphi} = q_{c2}\,\mathrm{sn}\,(a_{c2}x_2, k)/\mathrm{sn}\,(q_{c2}x_2 + K(k), k) + p_2\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2m_2\alpha_2$.

4. Симметричные квазилокальные состояния

В другой части спектра в области выше границы зоны спектра в полупространстве с линейной средой, но ниже границы зоны спектра в полупространстве с нелинейной средой, когда энергия возбуждений находится в диапазоне $\max\{\Omega_{1,2}^{(-)}\} < E < \min\{\Omega_{1,2}^{(+)}\}$, существуют несколько типов симметричных квазилокальных состояний. Под симметрией будем здесь понимать то, что волновые функции первой и второй ветвей имеют идентичный функциональный вид, а отличаются только значениями параметров.

К такому типу относится состояние, описываемое решением уравнений (3), удовлетворяющим граничным условиям (4) и (5), в котором волновые функции обеих ветвей имеют вид

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_{\varphi j}^{(-)} \cos(p_jx + \varphi), & x < 0, \\ \dfrac{A_j^{(+)}}{\mathrm{ch}\, q_j(x - x_j)}, & x > 0, \end{cases} \tag{27}$$

где $p_j^2 = 2m_j(E - \Omega_j^{(-)})$, $A_{\varphi j}^{(-)} = q_j(m_j\gamma_j)^{-1/2}/\cos\varphi$, остальные величины были определены выше, а энергия определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{t1}^{\varphi}\Delta_{t2}^{\varphi} = 4m_1m_2\beta^2, \tag{28}$$

где $\Delta_{tj}^{\varphi} = q_k\,\mathrm{th}\,q_ix_j + p_j\,\mathrm{tg}\,\varphi - 2m_j\alpha_j$.

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j^{(+)} = \Omega$, $\Omega_j^{(-)} = 0$, получается, что $p_j = p = (2mE)^{1/2}$, $q_j = q$, $p^2 = 2m\Omega - q^2$. Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = x_0$, из (28) получается дисперсионное соотношение

$$q\,\mathrm{th}\,qx_0 + p\,\mathrm{tg}\,\varphi = 2m(\alpha \pm \beta). \tag{29}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (29) энергия выражается в явном виде

$$E = \Omega - \frac{\Omega\,\mathrm{tg}^2\varphi - 2m(\alpha \pm \beta)^2}{\mathrm{tg}^2\varphi - 4mx_0(\alpha \pm \beta)}. \tag{30}$$

Состояние, описываемое волновыми функциями (27), характеризует локализацию волны при переходе через границу раздела из полупространства с линейной средой в полупространство с нелинейной средой.

В рассматриваемом диапазоне энергий существует решение НУШ (3) периодического типа

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_{\varphi dj}^{(-)} \cos(p_jx + \varphi), & x < 0, \\ A_{dj}^{(+)}\,\mathrm{dn}\,(q_{dj}(x - x_j), k), & x > 0, \end{cases} \tag{31}$$

где $A_{\varphi dj}^{(-)} = q_{dj}/(m_j\gamma_j)^{1/2}\,\mathrm{dn}\,(q_{dj}x_j, k)/\cos\varphi$, а остальные параметры определены ранее. Энергия такого состояния определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{d1}^{\varphi}\Delta_{d2}^{\varphi} = 4m_1m_2\beta^2. \tag{32}$$

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j^{(+)}$, $\Omega_j^{(-)} = 0$, получается, что $p_j = p$, $q_{dj} = q_d$ и $p^2 = 2m\Omega - q_d^2(2 - k^2)$. Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = x_0$, из (32) получается дисперсионное соотношение

$$k^2q_d\,\mathrm{sn}\,(q_dx_0, k)\,\mathrm{sn}\,(q_dx_0 + K(k), k) + p\,\mathrm{tg}\,\varphi = 2m(\alpha \pm \beta). \tag{33}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (11) выражается энергия в явном виде

$$E = \Omega - (2 - k^2)\frac{\Omega\,\mathrm{tg}^2\varphi - 2m(\alpha \pm \beta)^2}{(2 - k^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi - 4k^2mx_0(\alpha \pm \beta)}. \tag{34}$$

Для кноидальных волн второго типа в рассматриваемом диапазоне энергий волновые функции имеют вид

$$\psi_j(x) = \begin{cases} A_{\varphi cj}^{(-)} \cos(p_jx + \varphi), & x < 0 \\ A_{cj}^{(+)}\,\mathrm{cn}\,(q_{cj}(x - x_j), k), & x > 0, \end{cases} \tag{35}$$

где $A_{cj}^{(-)} = kq_{cj}/(m_j\gamma_j)^{1/2}\,\mathrm{cn}\,(q_{cj}x_j, k)/\cos\varphi$, а остальные параметры определены ранее. Энергия такого состояния определяется из дисперсионного соотношения

$$\Delta_{c1}^{\varphi}\Delta_{c2}^{\varphi} = 4m_1m_2\beta^2. \tag{36}$$

В частном случае, когда $\alpha_j = \alpha > 0$, $m_j = m$, $\Omega_j^{(\pm)} = \Omega$, получается, что $p_j = p$, $q_{cj} = q_c$, . Тогда при условии, что $x_1 = x_2 = x_0$, из (36) получается дисперсионное соотношение

$$q_c \operatorname{sn}(q_c x_0, k) / \operatorname{sn}(q_c x_0 + K(k), k) + p \operatorname{tg} \varphi = 2m(\alpha \pm \beta). \tag{37}$$

В предельном случае при $qx_0 \ll 1$ из (37) выражается энергия в явном виде

$$E = \Omega - (2k^2 - 1) \frac{\Omega \operatorname{tg}^2 \varphi - 2m(\alpha \pm \beta)^2}{(2k^2 - 1) \operatorname{tg}^2 \varphi - 4mx_0(\alpha \pm \beta)}. \tag{38}$$

Волновые функции (31) и (33) описывают трансформацию кноидальных волн в гармонические колебания при переходе через границу раздела нелинейной и линейной сред.

Рассмотренные квазилокальные состояния существуют не для всех значений параметра φ. Область допустимых его значений определяется соотношениями между характеристиками сред и дефекта.

Заключение

Следует отметить, что в настоящей работе были получены и классифицированы все возможные типы состояний для сред с положительным параметром нелинейности. Аналогичные типы состояний существуют и в средах с отрицательным параметром нелинейности, когда $\gamma = -g < 0$. Как известно [10], при таком знаке нелинейности НУШ имеет всюду ограниченные решения в виде кинка $\psi(x) = A_t^{(+)} \operatorname{th} q_t(x - x_0)$, где $A_t^{(+)} = \pm q_t (mg)^{-1/2}$, $q_t^2 = m(E - \Omega)$, а также периодическое решение, описываемое кноидальной волной $\psi(x) = A_s^{(+)} \operatorname{sn}(q_s(x - x_0), k)$, $A_s^{(+)} = \pm q_s (mg)^{-1/2}$, $q_s^2 = 2m(E - \Omega)/(1 + k^2)$. Такие решения существуют при $E > \Omega$.

Для случая двухуровневой модели с двумя ветвями закона дисперсии состояния, описываемые при помощи таких видов решений, находятся в диапазоне энергий выше, чем аналогичные состояния в среде с положительной нелинейностью.

При $E < \Omega$ также НУШ имеет ограниченное решение в области $x > 0$ в виде $\psi(x) = A_{\mathrm{sh}}^{(+)} / \operatorname{sh} q_{\mathrm{sh}}(x - x_0)$, $q_{\mathrm{sh}}^2 = 2m(\Omega - E)$, $A_{\mathrm{sh}}^{(+)} = \pm q_{\mathrm{sh}} (mg)^{-1/2}$, причем должно выполняться требование $x_0 < 0$. Данное обстоятельство обусловливает наличие более широкого набора состояний в двухуровневой системе на границе линейной и нелинейной сред. Однако по своей структуре все они будут аналогичны рассмотренным в настоящей работе типам состояний для среды с положительным ангармонизмом.

На основе модели двухуровневой системы, возбуждения в которой описываются НУШ, рассмотрены вопросы существования различных видов состояний в широком интервале энергетического спектра.

Использование полученных в настоящей работе результатов не ограничивается теорией ангармонических кристаллов, поскольку НУШ с различным знаком нелинейности, характеризующим притяжение или отталкивание, фокусировку и дефокусировку, находит широкое применение в теории магнитоупорядоченных сред, нелинейной оптике, динамике сверхтекучего жидкого гелия и в других системах.

Список литературы

[1] *Kivshar Yu.S., Kosevich A.M., Chubykalo O.A.* // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 41. N 3. P. 1677–1688.

[2] *Богдан М.М., Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* // ФНТ. 1997. Т. 23. № 2. С. 197–207.

[3] *Герасимчук И.В., Ковалев А.С.* // ФНТ. 2000. Т. 26. № 8. С. 799–809.

[4] *Abdullaev F.Kh., Baizakov B.B., Umarov B.A.* // Opt. Commun. 1998. Vol. 156. P. 341–346.

[5] *Ахмедиев Н.Н., Корнеев В.И., Кузьменко Ю.В.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 88. № 1. С. 107–115.

[6] *Савотченко С.Е.* // Известия вузов. Физика. 2004. Т. 47. № 5. С. 79–84.

[7] *Савотченко С.Е.* // Вестник Воронежского гос. ун-та. Сер.: Физика. Математика. 2016. № 4. С. 51–59.

[8] *Косевич А.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 23. № 2. С. 197–207.

[9] *Савотченко С.Е.* // Известия вузов. Физика. 2001. Т. 44. № 4. С. 67–73.

[10] *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984. 288 с.