Журнал технической физики, 2017, том 87, вып. 12

01

Объемные нелинейные упругие волны деформации в двуслойном коаксиальном цилиндрическом стержне

© И.А. Гула, А.М. Самсонов¶

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
¶ e-mail: samsonov@math.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 7 апреля 2017 г.)

Рассматрена задача о распространении нелинейно-упругих длинных продольных волн деформации в двуслойном коаксильном цилиндрическом стержне с идеальным контактом между слоями. Получены выражения для поперечных перемещений через продольные и удовлетворяющие с заданной точностью условию свободной границы и условию непрерывности перемещений и напряжений на поверхности раздела слоев. Показано, как выражения обобщают известные гипотезу плоских сечений и гипотезу Лява для изотропного однородного стержня. Выведено уравнение распространения продольной волны нелинейно-упругой деформации и исследовано его частное решение в виде уединенной бегущей волны.

DOI: 10.21883/JTF.2017.12.45198.2295

Введение

Композитные материалы (композиты) широко используются в современной промышленности. При их исследовании в отдельный класс часто выделяют многокомпонентные материалы, которые состоят из разных однородных изотропных слоев — слоистые композиты. Изучение динамики поведения таких композитов и выявление их механических повреждений являются важными задачами, одним из перспективных методов решения которых являются неразрушающие испытания. Они позволяют контролировать целостность образцов и выявлять повреждения, основываясь на эволюции распространяющихся волн деформации, а с другой стороны, изучать физические свойства материала волновода по параметрам этих волн. Особый интерес представляют нелинейные продольные волны деформации, затухание которых очень мало́ по сравнению с линейными продольными волнами, причем даже в полимерах, обладающих сильной диссипацией, см. [1]. Однако теоретические исследования распространения волн деформации в слоистых композитных волноводах пока недостаточно развиты,в частности, только недавно было показано, что в слоистых композитах, состоящих из конечного числа плоских слоев, могут распространяться объемные нелинейные волны деформации, см., например, [2–5]. Как теоретически, так и экспериментально интенсивно исследуются задачи распространения объемных нелинейных волн в плоских деламинированных волноводах [3,6,7]

Линейная задача о распространении продольных волн в двуслойном упругом стержне была рассмотрена в [8], очевидно, физическая нелинейность материалов и геометрическая нелинейность деформации не были учтены. Авторы использовали метод асимптотических разложений [9], сведя задачу к последовательности классических волновых уравнений.

Модель распространения нелинейных упругих волн в изотропном цилиндрическом стержне в виде уравнения с двумя дисперсиями (УДД) и ее уточнения были предложены в 80-х годах; изложению этого подхода посвящены книга [10] и цитированная там литература. Недавно в [11] была рассмотрена задача о распространении нелинейных волн деформации вдоль пластины, состоящей из периодического двухкомпонентного композита с бесконечным числом плоских слоев, причем заданная периодичность позволила свести исходную двумерную задачу к единственному одномерному нелинейному уравнению для продольных волн деформации.

Задача становится гораздо сложнее, если число нелинейно упругих слоев в композите невелико, слои не плоские, и периодичность отсутствует. Целью настоящей работы является разработка модели распространения длинных нелинейных продольных упругих волн деформации в двуслойном коаксиальном стержне с круглым сечением, которая имеет большое практическое значение. Получены асимптотически точные выражения поперечных перемещений через продольные, позволяющие удовлетворить условие свободной от нагружения внешней границы стержня и обеспечить непрерывность перемещений и напряжений на границе раздела слоев. Это позволило свести задачу к одномерному нелинейному уравнению относительно единственной неизвестной функции и получить решение в виде объемной нелинейной уединенной волны (солитона) деформации. Параметры этой волны приведены в размерном виде, пригодном для расчетов в реальном физическом эксперименте.

1. Вывод уравнений модели

Рассмотрим стержень с круглым сечением, состоящий из двух различных коаксиальных слоев. Введем

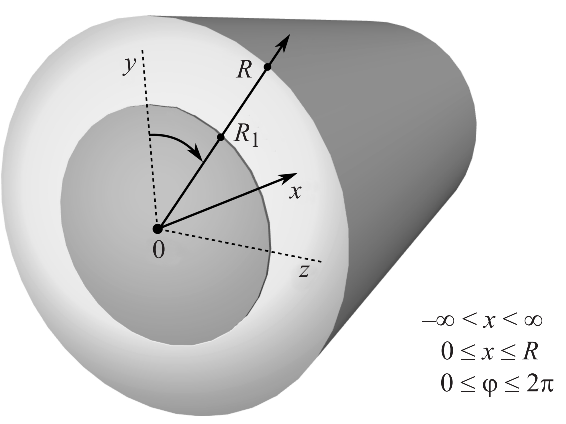

Рис. 1. Двуслойный коаксиальный стержень с круглым сечением.

цилиндрическую систему координат с началом в центре одного из торцов стержня, ось Ox направим вдоль продольной оси стержня, ось Or — по радиальному направлению. Пусть длина стержня велика по сравнению с радиусом его внешнего слоя, равным R, а радиус внутреннего слоя равен $R_1 < R$ (рис. 1). Допустим, что кручение стержня отсутствует, и задача обладает осевой симметрией, тогда введем вектор перемещений $\mathbf{U}(x, r, t) = U(x, r, t)\mathbf{i} + V(x, r, t)\mathbf{j}$, где символом t обозначена временная переменная.

Функции перемещений и компоненты тензора напряжений $\mathbf{P}$ в слоях будем обозначать верхним индексом в скобках: $U^{(i)}(x, r, t)$, $P_{rr}^{(i)}(x, r, t)$, а константы упругости — нижним индексом: λ_i, μ_i и т. п.

Тензор конечных деформаций Коши–Грина [10] имеет вид

$$C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\partial_x U + (\partial_x U)^2 & \partial_r U + \partial_x U \partial_r U + \partial_x V \partial_r V & 0 \\ \partial_r U + \partial_x V + \partial_x U \partial_r U & 2\partial_r V + (\partial_r U)^2 + (\partial_r V)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2V/r + V^2/r^2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Для функции плотности потенциальной энергии каждого из материалов слоев примем модель нелинейно упругого материала Мурнагана [12]:

$$\Pi = \frac{\lambda + 2\mu}{2}\big(I_1(\mathbf{C})\big)^2 - 2\mu I_2(\mathbf{C}) + \frac{l + 2m}{3}\big(I_1(\mathbf{C})\big)^3 - 2m I_1(\mathbf{C}) I_2(\mathbf{C}) + n I_3(\mathbf{C}), \tag{2}$$

где λ, μ — постоянные Лямэ, l, m, n — модули Мурнагана, I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора деформаций $\mathbf{C}$.

При нелинейных деформациях результат приложения сил (напряжений) зависит от пути деформирования, поэтому при постановке задачи в отсчетных координатах (до деформирования) используется тензор Пиолы–Кирхгоффа $\mathbf{P} = \partial\Pi/\partial\mathbf{C}(\mathbf{E} + \nabla\mathbf{U})$, определенный в отсчетной конфигурации. Запишем его компоненты P_{rr}, P_{rx} до слагаемых второго порядка по степеням компонент тензора $\nabla\mathbf{U}$ включительно:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \lambda\partial_x U + \lambda\frac{V}{r} + (\lambda + 2\mu)\partial_r V + \frac{\lambda + 2l}{2}\frac{V^2}{r^2} \\ &+ \frac{\lambda + 2\mu + m}{2}\big(\partial_r U\big)^2 + (2l - 2m + n)\partial_x U\frac{V}{r} \\ &+ \frac{\lambda + 2l}{2}\big(\partial_x U\big)^2 + (\lambda + 2l)\frac{V}{r}\partial_r V \\ &+ (\lambda + 2l)\partial_x U \partial_r V + \frac{3\lambda + 6\mu + 2l + 4m}{2}](\partial_r V)^2 \\ &+ (\mu + m)\partial_r U \partial_x V + \frac{\lambda + 2\mu + m}{2}(\partial_x V)^2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} P_{rx} &= \mu\partial_r U + \mu\partial_x V + \frac{2\lambda + 2m - n}{2}\partial_r U\frac{V}{r} \\ &+ (\lambda + 2\mu + m)\partial_x U \partial_r U + (\lambda + 2\mu + m)\partial_r U \partial_r V \\ &+ \frac{2m - n}{2}\frac{V}{r}\partial_x V + (\mu + m)\partial_x U \partial_x V + (\mu + m)\partial_x V \partial_r V. \end{aligned} \tag{4}$$

Введем масштабы для x, r и t в виде Λ, R и Λ/c_0 соответственно, где Λ — характерная длина продольных волн в стержне, c_0 — характерная скорость распространения линейных волн, вообще говоря, отличная от „стержневой“ скорости. Положим, что масштабы компонент деформаций U_x и V_r одинаковы и равны A, тогда масштабы для перемещений U и V можно записать соответственно в виде ΛA и RA. Введем безразмерные переменные $x' = x/\Lambda$, $r' = r/R$, $t' = t\Lambda/c_0$, безразмерные функции $U' = U/(\Lambda A)$, $V' = V/(RA)$ и безразмерный радиус внутреннего стержня $\alpha = R_1/R$. Положим, что деформации малы, $A \ll 1$, будем рассматривать длинные продольные волны, $R/\Lambda \ll 1$, и по аналогии с [10] постулируем соотношение $A = R^2/\Lambda^2$, после чего можно ввести малый параметр $\varepsilon^2 = A = R^2/\Lambda^2$.

Запишем компоненты P_{rr}, P_{rx} тензора Пиолы–Кирхгоффа в безразмерных переменных и соберем слагаемые при одинаковых степенях малого параметра (штрихи опущены):

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \varepsilon^2\left(\lambda\partial_x U + \lambda\frac{V}{r} + (\lambda+2\mu)\partial_r V + \frac{\lambda+2\mu+m}{2}(\partial_r U)^2\right) \\ &+ \varepsilon^4\left(\frac{\lambda+2l}{2}\frac{V^2}{r^2} + (2l - 2m + n)\partial_x U\frac{V}{r} + \frac{\lambda + 2l}{2}(\partial_x U)^2\right. \\ &+ (\lambda + 2l)\frac{V}{r}\partial_r V + (\lambda + 2l)\partial_x U \partial_r V \\ &\left.+ \frac{3\lambda + 6\mu + 2l + 4m}{2}(\partial_r V)^2 + (\mu + m)\partial_r U \partial_x V\right) \\ &+ \varepsilon^6\frac{\lambda + 2\mu + m}{2}(\partial_x V)^2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
P_{rx} &= \varepsilon\mu\partial_r U \\
&+ \varepsilon^3\biggl(\mu\partial_x V + \frac{2\lambda + 2m - n}{2}\,\partial_r U\,\frac{V}{r} \\
&+ (\lambda + 2\mu + m)\partial_x U\partial_r U + (\lambda + 2\mu + m)\partial_r U\partial_r V\biggr) \\
&+ \varepsilon^5\biggl(\frac{2m-n}{2}\,\frac{V}{r}\,\partial_x V + (\mu+m)\partial_x U\partial_x V + (\mu+m)\partial_x V\partial_r V\biggr).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Теперь разложим функции перемещений в ряд по четным степеням малого параметра ε:

$$U(x, r, t) = U_0(x, r, t) + \varepsilon^2 U_2(x, r, t) + \ldots, \tag{7}$$

$$V(x, r, t) = V_0(x, r, t) + \varepsilon^2 V_2(x, r, t) + \ldots, \tag{8}$$

и убедимся в том, что разложения (7), (8) сохраняют вид разложений P_{rr}, P_{rx} в ряды по ε и не добавляют новых слагаемых

$$P_{rr}(x, r, t) = \varepsilon^2 P_{2,rr}(x, r, t) + \varepsilon^4 P_{4,rr}(x, r, t) + \ldots, \tag{9}$$

$$P_{rx}(x, r, t) = \varepsilon P_{1,rr}(x, r, t) + \varepsilon^3 P_{3,rx}(x, r, t) + \ldots. \tag{10}$$

Подставляя (7–10) в (5), (6) и собирая слагаемые при соответствующих степенях малого параметра, в главном порядке по ε в P_{rx} (здесь и далее будут использоваться индексы, соответствующие слоям стержня) имеем

$$P^{(i)}_{1,rx} = \mu\partial_r U^{(i)}_0, \tag{11}$$

Функции $U^{(i)}_0$ будем искать в таком виде, чтобы выполнялись условия

$$U^{(1)}_0\big|_{r=\alpha} = U^{(2)}_0\big|_{r=\alpha},\ P^{(1)}_{1,rx}\big|_{r=\alpha} = P^{(2)}_{1,rx}\big|_{r=\alpha},\ P^{(2)}_{1,rx}\big|_{r=1} = 0,$$

откуда получаем $U^{(1)}_0 = U^{(2)}_0 = F(x, t)$. Таким образом, доказано, что в задаче о двуслойном стержне, как и в задаче об изотропном стержне [10], гипотезы плоских сечений достаточно ля того, чтобы занулить касательные напряжения на внешней границе стержня в главном порядке ε. Кроме того, удовлетворены условия непрерывности перемещений и напряжений на поверхности раздела слоев. Аналогичные выражения для $U^{(i)}_0$ были получены при рассмотрении линейной задачи о двуслойном цилиндрическом стержне [8].

Учитывая выражения для $U^{(i)}_0$, имеем для $P^{(i)}_{2,rr}$:

$$P^{(i)}_{2,rr} = \lambda_i\,\frac{V^{(i)}_0}{r} + \lambda_i\partial_x F + (\lambda_i + 2\mu_i)\partial_r V^{(i)}_0.$$

Для нахождения $V^{(i)}_0$ удовлетворяем условия

$$V^{(1)}_0\big|_{r=\alpha} = V^{(2)}_0\big|_{r=\alpha},\ P^{(1)}_{2,rr}\big|_{r=\alpha} = P^{(2)}_{2,rr}\big|_{r=\alpha},\ P^{(2)}_{2,rr}\big|_{r=1} = 0,$$

откуда находим

$$V^{(1)}_0 = -\frac{a_0}{d_0}\,r\partial_x F,\ V^{(2)}_0 = -\left(\frac{a_0 - \sigma_0}{d_0}\,r + \frac{\sigma_0}{d_0}\,\frac{\alpha^2}{r}\right)\partial_x F, \tag{12}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2} + \alpha^2\right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + (1 - \alpha^2)\right),$$

$$d_0 = 2a_0 + \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{(1 - \alpha^2)\mu_1 + (1 - \alpha^2)\mu_2}{\lambda_2},$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right).$$

Аналогичный результат был получен для перемещений $V^{(i)}_0$ в линейной задаче [8]. В выражении для $V^{(2)}_0$ присутствует слагаемое, сингулярное по r при $r \to 0$, однако выражение для $V^{(2)}_0$ справедливо лишь для $r \in (a; 1]$, вследствие чего сингулярность не возникает.

С учетом найденных $U^{(i)}_0$ и $V^{(i)}_0$ имеем для $P^{(i)}_{3,rx}$:

$$P^{(1)}_{3,rx} = \mu_1\partial_r U^{(1)}_2 - \frac{\mu_1 a_0}{d_0}\,r\partial_{xx} F,$$

$$P^{(2)}_{2,rx} = \mu_2\partial_r U^{(2)}_2 - \left(\frac{a_0 - \sigma_0}{d_0}\,r + \frac{\sigma_0}{d_0}\,\frac{\alpha^2}{r}\right)\mu_2\partial_{xx} F.$$

Функции $U^{(i)}_2$ теперь должны удовлетворять условиям

$$U^{(1)}_2\big|_{r=\alpha} = U^{(2)}_2\big|_{r=\alpha},\ P^{(1)}_{3,rx}\big|_{r=\alpha} = P^{(2)}_{3,rx}\big|_{r=\alpha},\ P^{(2)}_{3,rx}\big|_{r=1} = 0,$$

откуда находим выражения

$$U^{(1)}_2 = a_1\,\frac{r^2}{2}\,\partial_{xx} F,$$

$$U^{(2)}_2 = \left(a_1 - \sigma_1\,\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2}\right)\frac{r^2}{2}\,\partial_{xx} F + \sigma_1 \ln r\,\partial_{xx} F, \tag{13}$$

где введены коэффициенты

$$\alpha = \frac{a_0}{d_0} - \frac{\sigma_0}{d_0}\,\frac{(1 - \alpha^2)(1 - 2\ln\alpha)}{(\alpha^2 - 2\ln\alpha)\frac{\mu_1}{\mu_2} + (1 - \alpha^2)},$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{d_0}\,\frac{\alpha^2(1 - \alpha^2)\left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)}{(\alpha^2 - 2\ln\alpha)\frac{\mu_1}{\mu_2} + (1 - \alpha^2)}.$$

Учитывая выражения для $U^{(i)}_0$, $V^{(i)}_0$, для $P^{(i)}_{4,rr}$ получим

$$
\begin{aligned}
P^{(1)}_{4,rr} &= 2\mu_1\partial_r V^{(1)}_2 + \lambda_1\left(\frac{V^{(1)}_2}{r} + \partial_r V^{(1)}_2\right) + \lambda_1 a_1\,\frac{r^2}{2}\,\partial_{xxx} F \\
&+ \biggl(\frac{\lambda_1 + 2l_1}{2} - \frac{a_0}{d_0}(4l_1 - 2m_1 + n_1 + \lambda_1) \\
&+ \frac{a_0^2}{d_0^2}(4l_1 + 2m_1 + 3(\lambda_1 + \mu_1)))\biggr)\bigl(\partial_x F\bigr)^2,
\end{aligned}
$$

$$P_{4,rr}^{(1)} = 2\mu_2\partial_r V_2^{(2)} + \lambda_2\left(\frac{V_2^{(2)}}{r} + \partial_r V_2^{(2)}\right)$$
$$+ \lambda_2\left(a_1\frac{r^2}{2} + \sigma_1\left(\ln r - \frac{r^2}{\alpha^2}\ln\alpha\right)\right)\partial_{xxx}F$$
$$+ \left(\frac{\lambda_2 + 2l_2}{2} - \frac{a_0}{d_0}(4l_2 - 2m_2 + n_2 + \lambda_2)\right.$$
$$+ \frac{a_0^2}{d_0^2}(4l_2 + 2m_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2))$$
$$+ \frac{\sigma_0}{d_0}\left(4l_2 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(2m_2 - n_2) + \left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\lambda_2\right)$$
$$+ \frac{\sigma_0^2}{d_{0^2}}\left(2\lambda_2 + 4l_2 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^2(\lambda_2 + 2m_2 + 3\mu_2)\right)$$
$$- \frac{2a_0\sigma_0}{d_0^2}\left(2\lambda_2 + 4l_2 + \left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\right.$$
$$\left.\left.\times(\lambda_2 + 2m_2 + 3\mu_2)\right)\right)(\partial_x F)^2.$$

Для отыскания $V_2^{(1)}$ выберем анзац $\delta_1 r(\partial_x F)^2 + = \gamma_1 r^3\partial_{xxx}F$, а $V_2^{(2)}$ будем отыскивать в виде

$$\left(\delta_2 r + \frac{\eta_2}{r} + \frac{\chi_2}{r^3}\right)(\partial_x F)^2 + \left(\gamma_2 r^3 + \beta_2(r\ln r - r)\right)\partial_{xxx}F$$

где $\delta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, $\eta_{1,2}$, $\chi_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ — неизвестные константы, для нахождения которых имеются 3 условия

$$V_2^{(1)}\big|_{r=\alpha} = V_2^{(2)}\big|_{r=\alpha},\ P_{4,rr}^{(1)}\big|_{r=\alpha} = P_{4,rr}^{(2)}\big|_{r=\alpha},\ P_{4,rr}^{(2)}\big|_{r=1} = 0. \tag{14}$$

Представим $V_2^{(i)}$ в виде суперпозиции линейной и нелинейной волн $V_{2,LIN}^{(i)} + V_{2,NL}^{(i)}$, где $V_{2,LIN}^{(i)}$ — линеиные по $F(x,t)$ функции, т.е. содержащие только $\partial_{xxx}F$, а $V_{2,NL}^{(i)}$ — нелинейные, включают только $(\partial_x F)^2$. Функции $V_{2,LIN}^{(i)}$ содержат 3 неизвестные константы: γ_1, γ_2 и β_2, которые с помощью имеющихся условий (14) определяются однозначно. Получим

$$V_{2,LIN}^{(1)} = \frac{a_2}{d_2}r^3\partial_{xxx}F,$$
$$V_{2,LIN}^{(2)} = \frac{b_2}{d_2}r^3\partial_{xxx}F + \frac{a_2}{d_2}r(\ln r - 1)\partial_{xxx}F, \tag{15}$$

где

$$a_2 = \frac{a_1}{4}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \alpha^2 - \ln\alpha) + 3\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - \ln\alpha) + \ln\alpha\right)$$
$$- \sigma_1\frac{\ln\alpha(3 - 2\ln\alpha)}{2\alpha^2},$$
$$d_2 = 2\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \alpha^2 - \ln\alpha) + 3\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - \ln\alpha) + \ln\alpha\right)$$
$$+ 3\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \alpha^2 - \ln\alpha) + 3\frac{\mu_1}{\lambda_2}(1 - \ln\alpha) + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\ln\alpha\right),$$

$$b_2 = \frac{a_1}{4}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \alpha^2 - \ln\alpha)\right.$$
$$\left. + 3\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \ln\alpha) + \ln\alpha\right)$$
$$- \sigma_1\frac{\ln\alpha}{2\alpha^2}\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \ln\alpha)\right.$$
$$\left. + 3\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2}(1 - \ln\alpha) + \ln\alpha\right),$$
$$c_2 = 3\alpha^2 a_1\sigma_0\frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} + \sigma_1\ln\alpha\frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) + 3(\mu_1 - \mu_2)}{\lambda_2 + 2\mu_2}.$$

В частном случае, при равенстве коэффициентов Лямэ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ у материалов слоев в (12) зануляется σ_0, а отношение a_0/d_0 становится равным ν. Таким образом для обоих слоев выражение для $V_0^{(i)}$ сводится к известной гипотезе Лява. В то же время в (13) коэффициент σ_1 становится равным 0, и для обоих слоев получится уточнение гипотезы плоских сечений, а в (15) зануляется коэффициент c_2, и оба отношения a_2/d_2, b_2/d_2 сводятся к $\nu/\big(2(2\nu - 3)\big)$. Следовательно, мы показали, что в случае равенства упругих модулей 2-го порядка полученные гипотезы (12), (13), (15) сводятся к уточненным выражениям, полученным в [10] при рассмотрении задачи об изотропном цилиндрическом стержне.

Функции $V_{2,NL}^{(i)}$содержат 4 константы δ_1, δ_2, η_2 и χ_2 и трех имеющихся условий (14) недостаточно для их определения. Можно было бы воспользоваться условиями непрерывности $P_{4,xx}^{(i)}$ и $P_{4,\varphi\varphi}^{(i)}$. Однако одновременное их использование переопределяет систему уравнений для отыскания констант, а выбор какого-либо одного из двух не очевиден. Нелинейные части выражений для $P_{4,xx}^{(i)}$ и $P_{4,\varphi\varphi}^{(i)}$ с учетом найденных $U_0^{(i)}$, $U_2^{(i)}$ и $V_0^{(i)}$ важны при расчетах, но громоздки, и потому вынесены в Приложение 1.

На примере задачи об изотропном цилиндрическом стержне можно убедиться в том, что в двух главных порядках малого параметра e безразмерного уравнения Эйлера–Лагранжа не будет никакого вклада от $V_{2,NL}^{(i)}$. Таким образом, найденных $V_{2,NL}^{(i)}$ достаточно для вывода уравнения модели, и разложения функций перемещений в двуслойном цилиндрическом стержне в ряд по малому параметру ε можно использовать в следующем виде:

$$U^{(1)} = F(x,t) + \varepsilon^2\alpha_1\frac{r^2}{2}\partial_{xx}F,\ r\in(0;\alpha],$$

$$U^{(1)} = F(x,t) + \varepsilon^2\left[\left(\alpha_1 - \sigma_1\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2}\right)\frac{r^2}{2} + \sigma_1\ln r\right]\partial_{xx}F,$$
$$r\in(\alpha;1],$$

$$V^{(1)} = f\frac{a_0}{d_0}r\partial_x F + \varepsilon^2\left[-\frac{a_2}{d_2}r^3\partial_{xxx}F\right],\ r\in(0;\alpha]$$

Таблица 1. Упругие модули ПС и ПММА [13], [14]

	Плотность	Коэффициенты Ляме		Модуль Юнга	Коэффициент Пуассона	Модули Мурнагана 3-го порядка		
	ρ, kg/mm^3	λ, N/m^2, 10^{10}	μ, N/m^2, 10^{10}	E, N/m^2, 10^{10}	ν	l, W/m^2, 10^{10}	m, W/m^2, 10^{10}	n, W/m^2, 10^{10}
ПС	1060	0.289 $\pm$0.001	0.138 $\pm$0.001	0.369 $\pm$0.003	0.338 $\pm$0.001	-1.89 $\pm$0.32	-1.33 $\pm$0.29	-1.00 $\pm$0.14
ПММА	1160	0.39	0.186	0.498	0.339	-1.09	-0.77	-0.14

Таблица 2. Результаты расчетов

	Скорость линейных волн	Скорость нелинейных уединенных волн	Коэффицент при нелинейном слагаемом	Ширина солитона на половине амплитуды
	c_0, m/s	v, m/s	β, W/m^2, 10^{10}	FWHM, cm
ПС	1866.8 $\pm$7.6	1867.4 $\pm$7.7	-2.786 $\pm$0.799	16.9 $\pm$3.2
ПММА	2071	2072	-0.458	48.2
ПС +ПММА	1977	1978	-1.622	25.9

$$V^{(2)} = -\left(\frac{a_0 - \sigma_0}{d_0} r + \frac{\sigma_0}{d_0} \frac{\alpha^2}{r}\right) \partial_x F$$

$$+ \varepsilon^2 \left[-\left(\frac{b_2}{d_2} r^3 + \frac{c_2}{d_2} r (1 - \ln r) \right) \partial_{xxx} F \right], \ r \in (\alpha; 1]. \quad (16)$$

Представление (16) в размерных переменных важно для расчетов в физических экспериментах и приведено в Приложении 2.

Применение принципа Гамильтона с учетом (16) после интегрирования безразмерной двумерной плотности лагранжиана $\mathscr{L}(,,)$ по $r \in (0; 1)$ приводит к нелинейному уравнению с двумя дисперсиями (УДД), описывающему распространение волн нелинейно-упругих продольных деформаций в двуслойном стержне:

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon^2 \left[\frac{B_1}{2B_0} (u^2)_{xx} + \frac{c_0^2 B_2}{B_0} u_{xxtt} + \frac{B_3}{B_0} u_{xxxx} \right], \quad (17)$$

где $u(x,t) = F_x(x,t)$. В (17) „стержневая" скорость определяется выражением $c_0^2 = B_0/\overline{\rho}$ где $\overline{\rho} = \alpha^2 \rho_1 + (1 - \alpha^2)\rho_2$, а „эффективный" модуль Юнга равен B_0. Размерный вид (17), необходимый для проверки полученных результатов в физическом эксперименте, представлен в Приложении 3, там же приведены точные, но довольно громоздкие выражения для коэффициентов B_i, $i \in [0; 3]$.

Особый интерес представляет частный случай равенства коэффициентов Пуассона материалов слоев $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, часто возникающий в динамике нанокомпозитных волноводов, в котором B_i, $i \in [0; 3]$ заметно упрощаются:

$$B_0 = \alpha^2 E_1 + (1 - \alpha^2) E_2, \ B_1 = \alpha^2 \beta_1 + (1 - \alpha^2) \beta_2$$

$$B_2 = \frac{\nu(1-\nu)}{2} (\alpha^4 \rho_1 + (1 - \alpha^4) \rho_2),$$

$$B_3 = \frac{\nu}{2} (\alpha^4 E_1 + (1 - \alpha^4) E_2), \quad (18)$$

где $\beta_i = 3E_i + 2l_i(1-2\nu)^3 + 4m_i(1+\nu)^2(1-2\nu) + 6n_i\nu^2$. В этом случае скорость распространения линейных волн c_0 достаточно просто выражается через физические постоянные материалов слоев

$$c_0^2 = \frac{\alpha^2 E_1 + (1 - \alpha^2) E_2}{\alpha^2 \rho_1 + (1 - \alpha^2) \rho_2}. \quad (19)$$

Среди решений УДД (17), приведенного к размерному виду (см. (23) в Приложении 3), с постоянными коэффициентами в упрощенной форме (18) существует однопараметрическое решение в виде уединенной колоколообразной волны (солитона) сжатия [10], распростра-

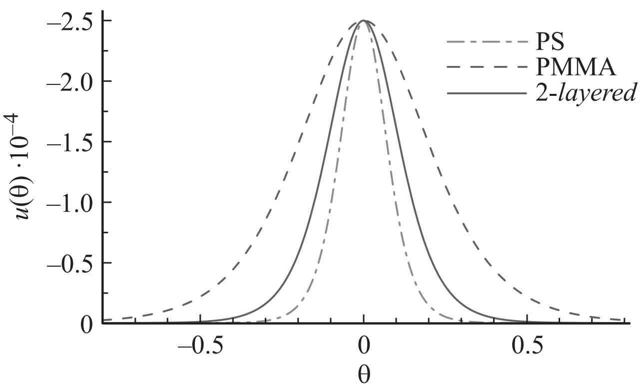

Рис. 2. Профиль уединенной волны деформации сжатия, описываемой (20) (сплошная линия), которая распространяется в двуслойном цилиндрическом волноводе радиуса $R = 5$ mm. Внутренний стержень из PS имеет радиус $R_1 = 3.54$ mm, внешняя оболочка из PMMA. По оси абсцисс бегущая переменная $\theta = x \pm vt$. Для сравнения на графике также представлены профили уединенных волн деформации в однородных изотропных цилиндрических стержнях из PS (штрихпунктирная линия) и PMMA (штриховая линия), радиусы которых $R = 5$ mm.

няющейся со скоростью v:

$$u(\theta) = \cosh^{-2}\left[\theta\sqrt{\frac{A\overline{\beta}}{6\nu R^2\left(\tilde{E} - (1-\nu)\frac{\tilde{\varrho}}{\rho}\left(\frac{A\overline{\beta}}{3} + \overline{E}\right)\right)}}\right],$$

$$\theta = x \pm vt, \tag{20}$$

где $A = 3(\overline{\rho}v^2 - \overline{E})/\overline{\beta} < 0$ — амплитуда волны, $\overline{E} = \alpha^2 E_1 + (1-\alpha^2)E_2$, $\overline{\beta} = a^2\beta_1 + (1-\alpha^2)\beta_2$, $\tilde{E} = \alpha^4 E_1 + (1-\alpha^4)E_2$, $\tilde{\rho} = \alpha^4\rho_1 + (1-\alpha^4)\rho_2$. Считая параметром амплитуду деформации, скорость солитона нетрудно выразить через упругие постоянные и плотности материалов слоев

$$v^2 = \frac{\frac{A}{3}(\alpha^2\beta_1 + (1-\alpha^2)\beta_2) + (\alpha^2 E_1 + (1-\alpha^2)E_2)}{\alpha^2\rho_1 + (1-\alpha^2)\rho_2}, \tag{21}$$

и в силу того, что $A\overline{\beta} > 0$, эта скорость превосходит стержневую скорость c_0. Теперь видно, что, поскольку $\alpha \in (0;1)$, то и скорость распространения линейных волн c_0, и скорость распространения солитонов v, и их ширина на половине высоты (FWHM — Full Width on Half Maximum) всегда будут лежать в промежутках между соответствующими величинами в каждом из однородных изотропных стержней, изготовленных из материала того или другого слоя.

Для построения сравнительных графиков и оценки количественных характеристик уединенных волн были взяты числовые значения модулей упругости полистирола (ПС) из [13] и органического стекла (полиметилметакрилата, ПММА) из [14], табл. 1. Значение амплитуды солитона сжатия выбрано равным $A = -2.5 \cdot 10^{-4}$ m, близким к значению амплитуд солитонов сжатия, распространяющихся в изотропных стержнях из ПС и ПММА [15]. В табл. 2 приведены скорости c_0 распространения линейных волн, скорости v нелинейных уединенных волн, значения коэффициентов β при нелинейном слагаемом в уравнении Эйлера–Лагранжа, и ширины солитонов на половине высоты FWHM для трех различных волноводов: цилиндрического стержня из ПС радиуса $R = 5$ mm, такого же стержня из ПММА и двуслойного коаксиального стержня радиуса $R = 5$ mm, внутренний стержень которого имеет радиус $R_1 = 5/\sqrt{2} \approx 3.53$ mm и изготовлен из ПС, а внешняя оболочка — из ПММА. Соотношение между R и R_1 выбрано таким, чтобы площади ПС и ПММА в сечении были одинаковыми. График (20) представлен на Рис. 2 в сравнении с профилями уединенных волн в цилиндрических стержнях из ПС и ПММА.

Заключение

В настоящей работе исследованы объемные нелинейные продольные волны деформации в двуслойном коаксиальном цилиндрическом стержне. Разработан асимптотический метод вывода уравнений распространения длинных нелинейно-упругих продольных волн деформации в таком волноводе, основанный на асимптотическом удовлетворении условия свободной от напряжений границы, т. е. равенстве нулю компонент тензора напряжений Пиолы–Кирхгоффа **P**, и на неразрывности напряжений и перемещений на границе раздела слоев. Это позволило получить нелинейное УДД, имеющее частное аналитическое решение в виде уединенных нелинейных волн — объемных солитонов сжатия.

Применение разработанного метода позволило решить задачу о распространении длинных нелинейных упругих продольных волн деформации в двуслойном цилиндрическом стержне с идеальным контактом между слоями. Модель предсказывает формирование единой волны, параметры которой зависят от упругих характеристик материалов обоих слоев. Показано, что в коаксиальном стержне скорость объемного солитона деформации превышает „стержневую“ скорость линейных волн, а параметры солитона лежат между параметрами солитонов в однородных изотропных стержнях тех же размеров, изготовленных из материалов первого, либо второго слоев. Найдены зависимости амплитуды и скорости солитона от радиуса границы раздела материалов слоев, их плотности и упругих характеристик.

Приложения

Точность вывода нелинейных уравнений и граничных условий краевой задачи напрямую связана с трудоемкими вычислениями. Даже при описанном алгоритме получения соответствующих выражений и коэффициентов уравнений проведение преобразований остается довольно тяжелой задачей, а без приведения итогов таких вычислений пришлось бы многие результаты решения просто принимать на веру. Поэтому ниже приводятся выражения, необходимые для подтверждения выводов, сделанных в основном тексте и для расчетов в реальных физических задачах.

1. Нелинейные составляющие компонент $P_{4,xx}^{(i)}$ и $P_{4,\varphi\varphi}^{(i)}$ тензора Пиолы–Кирхгоффа

Нелинейные части выражений $P_{4,xx}^{(i)}$ и $P_{4,\varphi\varphi}^{(i)}$ для тензора Пиолы-Кирхгоффа с учетом найденных выражений для $U_0^{(i)}$ и $V_0^{(i)}$ и (13)

$$P_{4,xxNL}^{(1)} = \lambda_1\left(\frac{V_{2,NL}^{(1)}}{r} + \partial_r V_{2,NL}^{(1)}\right) + \left(-2\frac{a_0}{d_0}(\lambda_1 + 2l_1) + \frac{a_0^2}{d_0^2}(4l_1 - 2m_1 + n_1 + \lambda_1) + \left(l_1 + 2m_1 + \frac{3}{2}\lambda_1 + 3\mu_1\right)\right)(\partial_x F)^2,$$

$$P^{(2)}_{4,xxNL} = \lambda_2\left(\frac{V^{(2)}_{2,NL}}{r} + \partial_r V^{(2)}_{2,NL}\right)$$
$$+ \left(-2\,\frac{a_0 - \sigma_0}{d_0}(\lambda_2 + 2l_2) + \frac{a_0^2 - 2a_{0\sigma_0}}{d_0^2}\right.$$
$$\times (4l_2 - 2m_2 + n_2 + \lambda_2) + \left(l_2 + 2m_2 + \frac{3}{2}\lambda_2 + 3\mu_2\right)$$
$$\left. + \frac{\sigma_0^2}{d_0^2}\left(4l_2 - \left(1 - \frac{\alpha^4}{r^4}\right)(2m_2 - n_2) + \left(1 + \frac{\alpha^4}{r^4}\right)\lambda_2\right)\right)$$
$$\times (\partial_x F)^2,$$

$$P^{(1)}_{4,\varphi\varphi NL} = 2\mu_1\,\frac{V^{(2)}_{2,NL}}{r} + \lambda_1\left(\frac{V^{(1)}_{2,NL}}{r} + \partial_r V^{(1)}_{2,NL}\right)$$
$$+ \left(\frac{\lambda_1 + 2l_1}{2} - \frac{a_0}{d_0}(4l_1 - 2m_1 + n_1 + \lambda_1)\right.$$
$$\left. + \frac{a_0^2}{d_0^2}(4l_1 + 2m_1 + 3(\lambda_1 + \mu_1))\right)(\partial_x F)^2,$$

$$P^{(2)}_{4,\varphi\varphi NL} = 2\mu_2\,\frac{V^{(2)}_{2,NL}}{r} + \lambda_2\left(\frac{V^{(2)}_{2,NL}}{r} + \partial_r V^{(2)}_{2,NL}\right)$$
$$+ \left(\frac{\lambda_2 + 2l_2}{2} - \frac{a_0}{d_0}(4l_2 - 2m_2 + n_2 + \lambda_2)\right.$$
$$+ \frac{a_0^2}{d_0^2}(4l_2 + 2m_2 + 3(\lambda_2 + \mu_2))$$
$$+ \frac{\sigma_0}{d_0}\left(4l_2 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(2m_2 - n_2) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)\lambda_2\right)$$
$$\frac{\sigma_0^2}{d_0^2}\left(2\lambda_2 + 4l_2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)^2(\lambda_2 + 2m_2 + 3\mu_2)\right)$$
$$\left. - \frac{2a_0\sigma_0}{d_0^2}\left(2\lambda_2 + 4l_2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right)(\lambda_2 + 2m_2 + 3\mu_2)\right)\right)$$
$$\times (\partial_x F)^2,$$

2. Степенные разложения функций перемещений в размерной форме

В размерных переменных формулы (16) выглядят следующим образом:

$$U^{(1)} = F(x,t) + a_1\,\frac{r^2}{2}\,\partial_{xx}F,\ \ r \in (0; R_1]$$
$$U^{(2)} = F(x,t) + \left[\left(a_1 - \sigma_1\,\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2}\right)\frac{r^2}{2} + \sigma_1 P^2 \ln\frac{r}{R}\right]\partial_{xx}F,$$
$$r \in (R_1, R],$$
$$V^{(1)} = -\frac{a_0}{d_0}\,r\partial_x F + \left[-\frac{a_2}{d_2}\,r^3\partial_{xxx}F\right],\ r \in (0, R_1],$$
$$V^{(2)} = -\left(\frac{a_0 - \sigma_0}{d_0}\,r + \frac{\sigma_0}{d_0}\,\frac{\alpha^2 R^2}{r}\right)\partial_x F + \left[-\left(\frac{b_2}{d_2}\,r^3\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{c_2}{d_2}\,rR^2\left(1 - \ln\frac{r}{R}\right)\right)\partial_{xxx}F\right],\ \ r \in (R_1, R] \qquad (22)$$

3. Уравнение распространения длинных нелинейных упругих продольных волн деформации в двуслойном коаксиальном цилиндрическом стержне в размерных переменных

Уравнение (17) в размерных переменных, важных для расчетов при физических экспериментах, имеет вид

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} = \frac{B_1}{\overline{\rho}}(u^2)_{xx} + \frac{R^2}{\overline{\rho}}(B_2 u_{xxtt} + B_3 u_{xxxx}), \qquad (23)$$

где $c_0^2 = B_0/\overline{\rho}, \overline{\rho} = \alpha^2\rho_1 + (1 - \alpha^2)\rho_2$, α— безразмерный радиус внутреннего стержня.

В общем случае коэффициенты B_i, $i \in [0;3]$, введенные в (17), (23), имеют вид

$$B_0 = \alpha^2(\lambda_1 + 2\mu_1) + (1 - \alpha^2)(\lambda_2 + 2\mu_2)$$
$$- 4\,\frac{a_0}{d_0}(\alpha^2\lambda_1 + (1 - \alpha^2)\lambda_2)$$
$$+ 4\,\frac{a_0^2}{d_0^2}\big(\alpha^2(\lambda_1 + \mu_1) + (1 - \alpha^2)(\lambda_2 + \mu_2)\big)$$
$$+ 4(1 - \alpha^2)\frac{\sigma_0}{d_0}\left[\lambda_2 - 2\,\frac{a_0}{d_0}(\lambda_2 + \mu_2)\right.$$
$$\left. + \frac{\sigma_0}{d_0}(\lambda_2 + (1 + \alpha^2)\mu_2)\right],$$

$$B_1 = \alpha^2(3\lambda_1 + 6\mu_1 + 2l_1 + 4m_1)$$
$$+ (1 - \alpha^2)(3\lambda_2 + 6\mu_2 + 2l_2 + 4m_2) - 6\,\frac{a_0}{d_0}\big(\alpha^2(\lambda_1 + 2l_1)$$
$$+ (1 - \alpha^2)(\lambda_2 + 2l_2)\big) + 6\,\frac{a_0^2}{d_0^2}\big(\alpha^2(\lambda_1 + 4l_1 - 2m_1 + n_1)$$
$$+ (1 - \alpha^2)(\lambda_2 + 4l_2 - 2m_2 + n_2)\big)$$
$$- 4\,\frac{a_0^3}{d_0^3}\big(\alpha^2(3\lambda_1 + 3\mu_1 + 4l_1 + 2m_1) + (1 - \alpha^2)$$
$$\times (3\lambda_2 + 3\mu_2 + 4l_2 + 2m_2)\big)$$
$$+ 6\,\frac{\sigma_0}{d_0}(1 - \alpha^2)\left[\lambda_2 + 2l_2 - 2\,\frac{a_0}{d_0}(\lambda_2 + 4l_2 - 2m_2 + n_2)\right.$$
$$\left. + 2\,\frac{a_0^2}{d_0^2}(3\lambda_2 + 3\mu_2 + 4l_2 + 2m_2)\right]$$
$$+ 6\,\frac{\sigma_0^2}{d_0^2}(1 - \alpha^2)\Big[(1 + \alpha^2)\lambda_2 + 4l_2 + (1 - \alpha^2)(-2m_2 + n_2)$$
$$- 2\,\frac{a_0}{d_0}\big((\alpha^2 + 3)\lambda_2 + 4l_2 + (1 + \alpha^2)(3\mu_2 + 2m_2)\big)$$
$$+ 4\,\frac{\sigma_0^3}{d_0^3}(1 - \alpha^2)[3(1 + \alpha^2)\lambda_2 + 3(1 + 3\alpha^2)\mu_2)$$
$$+ 4l_2 + 2(1 + 3\alpha^2)m_2],$$

$$B_2 = \left(\frac{a_0^2}{2d_0^2} - \frac{a_1}{2}\right)(\alpha^4\rho_1 + (1-\alpha^4)\rho_2)$$
$$- \frac{a_0\sigma_0}{d_0^2}\rho_2(1-\alpha^2)^2$$
$$+ \frac{\sigma_0^2}{2d_0^2}\rho_2[(1-\alpha^2)(1-3\alpha^2) - 4\alpha^4 \ln\alpha]$$
$$+ \sigma_1\rho_2\left[1-\alpha^2 + \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2}\ln\alpha\right],$$

$$B_3 = \left(1 - \frac{2a_0}{d_0}\right)\left(\frac{\alpha_1}{2}(\alpha^4\lambda_1 + (1-\alpha^4)\lambda_2) - \frac{4}{d_2}(\alpha^4 a_2\lambda_1\right.$$
$$\left.+ (1-\alpha^4)b_2\lambda_2)\right) + \left(a_1\left(1 + \frac{a_0}{d_0}\right) - \frac{a_1^2}{2} - \frac{a_0^2}{2d_0^2}\right)$$
$$\times \left(\alpha^4\mu_1 + (1-\alpha^4)\mu_2\right) + \frac{8a_0}{d_0d_2}(\alpha^4 a_2\mu_1 + (1-\alpha^4)b_2\mu_2)$$
$$+ \frac{\sigma_0}{d_0}(1-\alpha^4)\left[(1+\alpha^2)\left(a_1 - \frac{8b_2}{d_2}\right)\lambda_2\right.$$
$$\left. - \left(8(1+2\alpha^2)\frac{b_2}{d_2} + (1-\alpha^2)\left(a_1 - \frac{a_0}{d_0}\right)\right)\mu_2\right]$$
$$+ \frac{\sigma_1}{d_0}\left[\left(1-\alpha^2 + \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2}\ln\alpha\right)(2a_0 - d_0)\lambda_2\right.$$
$$+ 2\left(1-\alpha^2 - \frac{1-\alpha^4}{\alpha^2}\ln\alpha\right)(a_0 - (1+a_1)d_0)\mu_2$$
$$\left. - 4\mu_2 d_0\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}\right] - \frac{8\sigma_0 c_2}{d_0d_2}[(1-\alpha^2+\alpha^2\ln\alpha)\lambda_2$$
$$+ (1-\alpha^2+2\alpha^2\ln\alpha)\mu_2] - \frac{2\sigma_0\sigma_1}{d_0}\left[\left(1-\alpha^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1+\alpha^4}{\alpha^2}\ln\alpha\right)\lambda_2 + \left(1-\alpha^2 - \frac{1-2\alpha^2-\alpha^4}{\alpha^2}\ln\alpha\right)\mu_2\right]$$
$$- \frac{\sigma_0^2}{2d_0^2}(1-4\alpha^2) + 3\alpha^4 - 4\alpha^4\ln\alpha)\mu_2$$
$$- \sigma_1^2\left(2 - \frac{4}{\alpha^2} - \left(2 - \frac{2}{\alpha^4}\right)\ln\alpha\right)\mu_2$$

Список литературы

[1] *Samsonov A.M., Dreiden G.V., Semenova I.V.* // Proc. Inst. Mech. Eng. Part C. J. Mech. Engng. Sci. 2008. Vol. 22. N 10. P1975–1980,

[2] *Dreiden G.V., Khusnutdinova K.R., Samsonov A.M., Semenova I.V.* // J. Appl. Phys. 2008. Vol. 104. N 8. P. 086106.

[3] *Dreiden G.V., Khusnutdinova K.R., Samsonov A.M., Semenova I.V.* // J. Appl. Phys. 2010. Vol. 107. N 3. P. 034909.

[4] *Dreiden G.V., Khusnutdinova K.R., Samsonov A.M., Semenova I.V.* // J. Appl. Phys. 2012. Vol. 112. N 6. P. 063516.

[15] *Sertakov I., Engelbrecht J., Janno J.* // Int. J. Solids Struct. Vol. 49. 2014. P. 3381–3387.

[6] *Khusnutdinova K.R., Samsonov A.M.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 7. P. 066603.

[7] *Khusnutdinova K.R., Tranter M.R.* // Proc. R. Soc. A. 2015. Vol. 471. P. 20150584.

[8] *Moulana M., Nariboli G.A.* // Acta Mech. 1976. Vol. 24. P. 13–24.

[9] *Nariboli G.A.* // ZAMM. 1969. Vol. 49. P. 525–531.

[10] *Samsonov A.M.* Strain solitions in solids and how to construct them. Chapman & Hall/CRC, 2001. 248 p.

[11] *Porubov A.V., Andrianov I.V., Danishevs'kyy V.V.* // Int. J. Solids Struct. 2012. Vol. 49. P. 3381–3387.

[12] *Murnaghan F.D.* Finit deformation of an elastic solid. Chapman & Hall, 1951. 140 p.

[13] *Hughes D.S., Kelly J.L.* // Phys. Rev. 1953. Vol. 92. N 5. P. 1145–1149.

[14] *Semenova I.V., Dreiden G.V., Samsonov A.M.* Dynamic Behavior of Materials, Vol. 1: Proc. 2010 Annual Conference on Experimental and Applied Mechanics. / Ed. by. T. Proulx. N.Y. : Springer, 2011. P. 261–267.

[15] *Samsonov A.M., Semenova I.V., Belashov A.V.* // Wave Motion. 2016. 10.1016/j.wavemoti.2016.06.006.