

## Постоянна ли собирающая поверхность плоского одностороннего зонда при измерении функции распределения ионов?

© А.С. Мустафаев,<sup>1</sup> В.О. Некучаев,<sup>2</sup> В.С. Сухомлинов,<sup>3</sup> Г.И. Коршунов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский горный университет,  
199106 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Ухтинский государственный технический университет,  
169300, Ухта, респ. Коми, Россия

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alexmustafaev@yandex.ru, v\_sukhomlinov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 10 апреля 2017 г.)

Рассмотрен вопрос о корректности известного метода плоского одностороннего зонда для измерения анизотропных функций распределения ионов в газоразрядной плазме. Исследование проведено при положительных относительно плазмы потенциалах зонда по величине порядка средней энергии ионов, которая, как правило, много меньше средней энергии электронов. Проанализирована зависимость собирающей поверхности плоского зонда от его потенциала в указанной области значений. Для изотропной функции распределения электронов типа максвелловской и дровистейновской и анизотропной функции распределения ионов найдена структура призондового слоя. С использованием этих результатов получены аналитические соотношения для поправки ко второй производной зондового тока по потенциалу плоского зонда. Показано, что при измерении функции распределения ионов в широком диапазоне условий в газоразрядной плазме, когда применимо приближение бесстолкновительного зондового слоя, а зонд не возмущает плазму, зависимостью собирающей поверхности зонда от потенциала в указанном диапазоне можно пренебречь.

DOI: 10.21883/JTF.2017.12.45206.2290

### Введение

Ранее авторами [1–16] был предложен зондовый метод определения анизотропных функций распределения электронов (ФРЭ) [1–13] и ионов (ФРИ) [14–16] в виде конечного ряда по полиномам Лежандра. Число необходимых членов ряда зависит от вида симметрии задачи и числа ориентаций плоского одностороннего зонда, при которых регистрируется зависимость второй производной зондового тока от потенциала зонда.

Для ФРИ метод был апробирован в сильных [14] и умеренных [15, 16] электрических полях. Суть метода состоит в использовании части зондовой характеристики, при которой ионы движутся вблизи зонда в задерживающем поле, а электроны — в ускоряющем. При этом положительный относительно плазмы потенциал зонда изменяется в диапазоне величин порядка средней энергии ионов. Поскольку известно, что электронный ток на плоский зонд в этих условиях не зависит от потенциала зонда [17–19], вторая производная зондового тока несет информацию только о ФРИ по скоростям.

С другой стороны, согласно данным [20–22], при определении ионного тока насыщения, когда на плоский зонд подается большой отрицательный потенциал, площадь собирающей поверхности такого зонда за счет красевых эффектов начинает зависеть от потенциала зонда. Неучет этого обстоятельства может приводить к ошибкам в определении концентрации ионов до двух раз [21,22].

Поскольку описанные ситуации формально схожи (с точностью до перемены знака потенциала зонда и заряда притягивающихся к зонду частиц), а авторы [14–16] подобных исследований не проводили, то, на наш взгляд, необходимо восполнить этот пробел.

В настоящей работе исследуется возможная зависимость собирающей поверхности плоского одностороннего зонда для электронов при положительных значениях потенциала зонда порядка средней энергии ионов.

### 1. Исследование влияния изменения собирающей поверхности зонда при изменении его потенциала на результаты измерения ФРИ с помощью плоского одностороннего зонда

#### 1.1. Получение соотношений для толщины возмущенного слоя

Рассмотрим плоский односторонний зонд при потенциале выше потенциала плазмы в слабоионизованной однородной плазме при следующих условиях:

- радиус Дебая  $r_D$  в плазме удовлетворяет неравенству:

$$r_D \ll R_0, \quad (1)$$

где  $R_0$  — радиус зонда;

- зонд бесконечно тонкий;
- в призондовом слое ионы и электроны движутся без столкновений;
- длина пробега электронов много больше размеров зонда:

$$\lambda_e \gg 2R_0; \tag{2}$$

- средняя энергия ионов много меньше средней энергии электронов:

$$\bar{E}_i \ll \bar{E}_e. \tag{3}$$

Будем также для простоты считать, что зонд не возмущает ФРИ и предположим, что ФРЭ в невозмущенной области плазмы вдали от зонда является слабо анизотропной, а ее изотропная часть выражается соотношением [23]

$$f_e(v) = A_j \exp\left\{-\left(\frac{mv^2}{2kT_e}\right)^j\right\},$$

$$A_j = \frac{n_0}{4\pi\sqrt{2kT_e/m}} \frac{2j}{\Gamma(2/3j)}, \tag{4}$$

где  $j = 1, 2$ ;  $k, m$  — постоянная Больцмана и масса электрона;  $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-y)y^{x-1}dy$ ; — гамма-функция [24];  $n_0$  — концентрация электронов (равная концентрации ионов) в невозмущенной зондом плазме;  $T_e$  — постоянная, которая при  $j = 1$  (когда ФРЭ — максвелловская) является температурой электронов. Средняя энергия электронов связана с величиной  $T_e$  следующим образом [23]:

$$\bar{E}_e = kT_e \frac{\Gamma(5/2j)}{\Gamma(3/2j)}. \tag{5}$$

Представление ФРЭ в виде (4) соответствует степенной зависимости сечения упругого рассеяния электронов от скорости и позволяет исследовать случай как максвелловской ФРЭ ( $j = 1$ ), так и дрювистейновской ( $j = 2$ ) [23]. При реализации зондового метода измерения ФРИ проводятся измерения второй производной зондового тока при различных углах между внешней нормалью к зонду и вектором электрического поля в плазме. Для простоты в данной части работы рассмотрим ситуацию, когда плоский зонд ориентирован так, что внешняя нормаль к проводящей поверхности антипараллельна вектору электрического поля в плазме.

Введем цилиндрическую систему координат, в которой ось  $Z$  параллельна внешней нормали к непроводящей поверхности зонда. Оценим толщину призондового слоя, где потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в выбранной системе координат) отличен от потенциала плазмы, не учитывая краевые эффекты из-за конечных размеров зонда. При этом будем рассматривать положительный относительно плазмы потенциал зонда и отсчитывать его от потенциала плазмы. Тогда вместо радиус-вектора  $\mathbf{r}$  имеем переменную  $z$ , а уравнение

Пуассона для потенциала в возмущенном слое записывается в виде

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\varphi}{dz^2} = e(n_e - n_i), \quad \varphi_{z=0} = \varphi_0, \quad \varphi_{z \rightarrow \infty} = 0, \tag{6}$$

где  $\varepsilon_0, e, n_i, n_e$  — диэлектрическая проницаемость, заряд иона (считаем ионы однозарядными), концентрация ионов и электронов соответственно. Вполне очевидно, что в рассматриваемой ситуации ФРЭ в призондовом слое имеет вид

$$f_e(v, z) = A_k \exp\left\{-\left(\frac{mv}{2kT_e} - \frac{e\varphi(z)}{kT_e}\right)^j\right\}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что зависимость концентрации электронов от координаты в призондовом слое описывается соотношением [23]

$$n_e(z) = n_0 F_j(\varphi(z)), \tag{8}$$

где

$$F_j(x) = \frac{2j}{\Gamma(1, 5/j)} \int_0^\infty \exp\{-(y^2 - x)^j\} y^2 dy.$$

При  $j = 1$  имеем

$$n_e(z) = n_0 \exp\{\eta(z)\}, \tag{9}$$

где

$$\eta(z) = \frac{e\varphi(z)}{kT_e} > 0$$

— безразмерный потенциал пространства в возмущенной зондом области плазмы.

Рассмотрим теперь формирование концентрации ионов вблизи зонда. В работе [14] было получено аналитическое решение задачи о ФРИ в собственном газе в случае сильного поля, с удовлетворительной точностью (порядка 10%) описывающее ФРИ в диапазоне значений параметра  $\gamma_0$ , удовлетворяющих неравенству:

$$\gamma_0 = \frac{eE\lambda_i}{kT_a} \geq 3, \tag{10}$$

где  $E, \lambda_i, T_a$  — электрическое поле в невозмущенной зондом плазме, длина пробега иона относительно процесса резонансной перезарядки и температура атомов соответственно. Результат, приведенный в [14] для ионов, движущихся в невозмущенной зондом области плазмы в сторону зонда и от него соответственно, имеет вид:

$$f_i(\mathbf{v}_i) = A \exp[-\beta v_i^2 + (\beta - \alpha_0)v_{iz}^2] \operatorname{erfc}(\sqrt{\beta - \alpha_0}v_{iz}),$$

$$v_{iz} \leq 0,$$

$$f_i(\mathbf{v}_i) = A \exp[-\beta v_i^2 + (\beta + \alpha_0)v_{iz}^2] \operatorname{erfc}(\sqrt{\beta + \alpha_0}v_{iz}),$$

$$v_{iz} > 0, \tag{11}$$

где

$$2\alpha_0 = \frac{M_i}{eE\lambda_i}, \quad \beta = \frac{M_i}{2kT_a},$$

при этом выполняется соотношение  $\gamma_0 = \frac{\beta}{\alpha_0}$ ,  $M_i$  — масса иона,  $A$  — нормировочная константа,  $E$  — электрическое поле вне возмущенного слоя,  $v_i, v_{iz}$  — скорость иона и ее  $z$ -компонента в введенной ранее системе координат соответственно. Для произвольного параметра  $\gamma_0$  авторы [16] также получили аналитическое решение, однако мы здесь его не приводим из-за громоздкости.

Учитывая, что возмущение плазмы зондом в нашем случае влияет только на распределение ионов по скоростям вдоль оси  $Z$ , можно составляющие скорости иона, ортогональные этой оси, не рассматривать. Тогда после интегрирования по ним получаем нормированную на 1 ФРИ по  $z$ -компоненте безразмерной скорости ионов в области возмущения:

$$f_i(V, \eta) = C \exp[-(V^2 + \kappa\eta)] \times \operatorname{erfc}(-\sqrt{(\gamma_0 - 1)}\sqrt{V^2 + \kappa\eta}), \quad V \leq 0,$$

$$f_i(V, \eta) = C \exp[(V^2 - \kappa(\eta_0 - \eta))] \times \operatorname{erfc}(\sqrt{(\gamma_0 + 1)}\sqrt{V^2 - \kappa(\eta_0 - \eta)}), \quad V > 0,$$

(12)

где постоянная  $C$  находится из условия нормировки ФРИ (12) на 1,  $V = \sqrt{\alpha_0}v_{iz}$ ,  $\kappa = \frac{kT_e}{eE\lambda_i}$ . Для параметра  $\kappa$  используя данные, приведенные в [25], можно получить

$$\kappa = 0.8 \frac{\sigma_{ex}}{\sigma_{ir}\sqrt{\delta}}, \tag{12a}$$

где  $\sigma_{ex}, \sigma_{ir}$  — сечение резонансной перезарядки иона и транспортное сечение упругого рассеяния электрона соответственно,  $\delta$  — средний коэффициент передачи энергии электрона при столкновении (учитываются любые столкновения) с нейтральной частицей (атомом или молекулой) плазмы. Учитывая, что атомарных газов  $\delta \leq 10^{-4}$ , для молекулярных —  $\delta \leq 10^{-2}$  [25], а  $\frac{\sigma_{ex}}{\sigma_{ir}} > 4-5$ , можно констатировать, что  $\kappa > 40-50$ .

В приближении сильного поля, т.е. при  $\gamma_0 \rightarrow \infty$ , для  $\eta = 0$  из соотношения (12) имеем максвелловскую функцию распределения ионов,двигающихся только в направлении поля с температурой, определяемой величиной электрического поля [12]. В обратном случае слабого поля ( $\gamma_0 \rightarrow 0$ ) для ФРИ имеем, очевидно, изотропное, максвелловское распределение с температурой  $T_i$ , близкой к температуре нейтралов. В этом случае концентрация ионов  $n_i(z)$ , очевидно, равна:

$$n_i(z) = n_0 \exp[-\kappa_1\eta(z)], \tag{13}$$

где

$$\kappa_1 = \frac{T_e}{T_i} \gg 1.$$

Если ФРИ анизотропна, то концентрация ионов в области возмущения зондом находится следующим образом. Предположим, что зонд имеет некоторый безразмерный потенциал  $\eta_0 = \frac{e\phi_0}{kT_e} > 0$ , который монотонно спадает при удалении от него. Тогда на произвольном расстоянии  $z$  от зонда концентрацию ионов создают четыре потока ионов (рис. 1, 2):

1) ионы, которые движутся к зонду и в точке  $z$  имеют безразмерную  $z$ -компоненту скорости, удовлетворяющую неравенству:  $|V| > \sqrt{\kappa\eta_0}$  (эти ионы достигнут зонда);

2) ионы, которые двигаются к зонду и в точке  $z$  имеют безразмерную  $z$ -компоненту скорости, удовлетворяющую неравенствам:  $\sqrt{\kappa\eta} < |V| < \sqrt{\kappa\eta_0}$ ;

3) ионы по п. 2), прошедшие точку  $z$ , отразившиеся от зонда и на обратном пути создающие такую же концентрацию в этой точке;

4) поскольку мы предположили, что зонд слабо возмущает ФРИ, ионы, движущиеся против поля в плазме, преодолевшие поле, созданное зондом и оказавшиеся в плоскости зонда, далее, ускоряясь, движутся удаляясь от его поверхности (рис. 2). Если, однако, толщина призондового слоя  $h_z \ll R_0$  или реализуется случай сильного поля ( $\gamma_0 \rightarrow \infty$ ), то этот поток, очевидно, учитывать не надо.

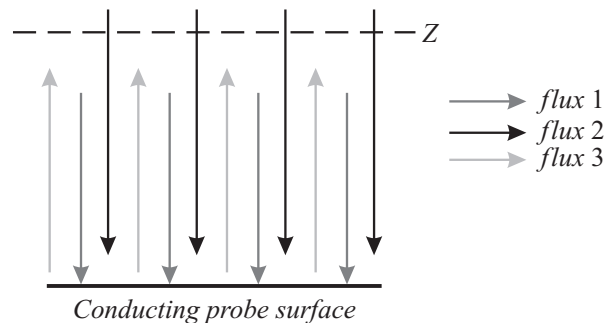


Рис. 1. К формированию концентрации ионов около зонда при сильно анизотропной ФРИ.

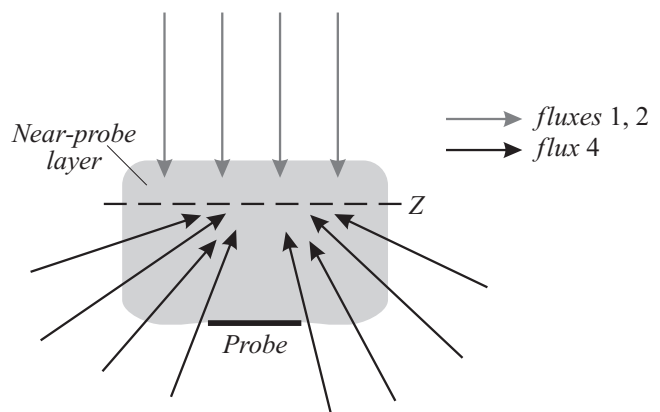


Рис. 2. К формированию концентрации ионов около зонда.

В соответствии с вышесказанным для анизотропной ФРИ при монотонной зависимости  $\eta(z)$  имеем выражение для концентрации ионов:

$$n_i(z) = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\kappa\eta_0}} f_i(V, \eta) dV + 2 \int_{-\kappa\eta_0}^{-\sqrt{\kappa\eta}} f_i(V, \eta) dV + \int_{\sqrt{\kappa(2\eta_0-\eta)}}^{\infty} f_i(V, \eta) dV, \quad (14)$$

где  $f_i(V)$  нормирована на концентрацию ионов  $n_0$  в невозмущенной области.

Теперь, вводя безразмерное расстояние до поверхности зонда  $x = \frac{z}{r_d}$ , где  $r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{en_0}}$  — радиус Дебая [26], и относительные концентрации заряженных частиц  $N_{i,e} = \frac{n_{i,e}}{n_0}$ , имеем уравнение Пуассона для безразмерного потенциала в возмущенной области около зонда:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = (N_e - N_i). \quad (15)$$

Решение этого уравнения на промежутке от  $\eta_1$  до  $\eta_0$  при  $\frac{d\eta}{dx_{\eta=\eta_0}} < 0$  имеет вид

$$x(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2 \int_{\eta_1}^{\eta'} [N_e(\eta'') - N_i(\eta'')] d\eta''}}, \quad (16)$$

где

$$\frac{d\eta}{dx_{\eta=\eta_1}} = 0$$

и

$$N_e(\eta_1) - N_i(\eta_1) = 0. \quad (17)$$

Кроме того, для решения (16) справедливо утверждение  $x(\eta)_{\eta \rightarrow \eta_1} \rightarrow \infty$ , поскольку, как не трудно показать, интеграл (16) расходится при  $\eta \rightarrow \eta_1$ .

Отметим, что в случае, когда ФРЭ по скоростям изотропная и имеет вид максвелловской функции, а величина электрического поля в плазме невелика, так, что ФРИ слабо анизотропна и также близка к максвелловской с температурой ионов  $T_i$  (которая, в свою очередь, близка к температуре атомов), для относительных концентраций электронов и ионов имеем, очевидно, соотношения (9), (13) соответственно. Можно показать, что в этом случае  $\eta_1 = 0$  и формула (16) принимает вид

$$x(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2[e^{\eta'} - 1 - \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\eta'})]}}. \quad (18)$$

В случае, когда ФРЭ определяется формулой (7) при  $j = 2$  (распределение Дривистейна), для этого же слу-

чая слабого электрического поля в невозмущенной плазме получаем

$$x(\eta) = \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2[p(\eta') - \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\eta'})]}}, \quad (19)$$

$$p(x) = 1.089 \int_0^{\infty} y^{1.5} \{ \exp[-(x-y)^2] - \exp(-y^2) \} dy.$$

Определим толщину возмущенного слоя как расстояние от зонда до плоскости, где потенциал составляет величину  $0.1\eta_0$ . В данном случае под возмущенным слоем мы будем понимать область, где величина электрического поля такова, что может оказать влияние на распределение электронов в пространстве. Учитывая, что в данной части работы для нас важна ситуация, когда потенциал зонда много меньше средней энергии электронов, выбор в качестве нижнего предела значения потенциала порядка  $0.1\eta_0$  кажется оправданным. Если же потенциал зонда порядка температуры электронов (хотя такая ситуация в зондовом методе определения ФРИ не реализуется), то нижний предел можно ограничить величиной порядка тепловой энергии атомов. Тогда для максвелловской и дрювистейновской ФРЭ в рассматриваемом случае (когда ФРИ близка к максвелловской) для толщин возмущенного слоя  $x_m(\eta_0, \kappa_1)$ ,  $x_d(\eta_0, \kappa_1)$  соответственно имеем

$$x_m(\eta_0, \kappa_1) = \int_{0.1\eta_0}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2[e^{\eta'} - 1 - \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\eta'})]}}, \quad (20)$$

$$x_d(\eta_0, \kappa_1) = \int_{0.1\eta_0}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2[p(\eta') - \frac{1}{\kappa_1}(1 - e^{-\kappa_1\eta'})]}}. \quad (21)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда энергия, которую ион приобретает на длине свободного пробега относительно резонансной перезарядки, много больше тепловой энергии атомов. В работах [14–16, 27, 28] было показано, что в этом случае ФРИ является сильно анизотропной. Как будет видно из дальнейшего, это кардинально меняет закономерности образования возмущенного слоя вокруг зонда при условии, что положительный потенциал зонда порядка средней энергии ионов, которая много меньше средней энергии электронов, т. е.

$$\eta_0 \cong \frac{1}{\kappa_i} \ll 1, \quad \kappa_i = \frac{kT_e}{\bar{E}_i}, \quad (22)$$

где  $\bar{E}_i$  — средняя энергия ионов, а величины  $\kappa_i$  и  $\kappa$  — одного порядка. Расчеты показывают, что при использовании (12), (14) для расчета  $N_i$  и (8) (при  $j = 1, 2$ ) для расчета  $N_e$  и выполнении неравенства (22) для анизотропной ФРИ, решение уравнения строго

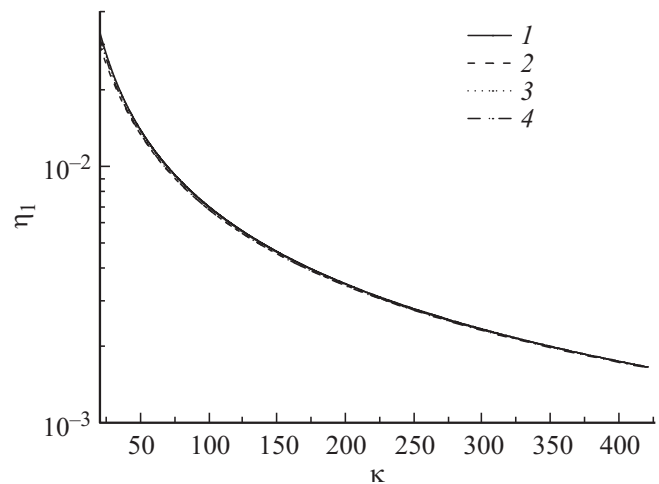
положительно ( $\eta_1 > 0$ ) (рис. 3). При этом расчеты для ФРЭ Дрювистейна и Максвелла слабо отличаются друг от друга. Учитывая, что точка, где выполняется соотношение (17), единственная, и что интеграл в (16) при  $\eta = \eta_1$  расходится, имеем, что  $\eta_{x \rightarrow \infty} = \eta_1 > 0$ .

Это означает, что в области пространства, где потенциал слабо меняется,  $\eta \approx \eta_1$ , т.е., в одномерной постановке задачи возмущение зондом плазмы сохраняется на большом расстоянии от зонда, хотя и  $\eta_1 \ll \eta_0$  (рис. 3). Для иллюстрации этих соображений рассмотрим сильно анизотропную ФРИ, когда ионы движутся преимущественно вдоль электрического поля в невозмущенной плазме. В этом случае при достаточно высоком положительном потенциале зонда ионы, отраженные от него, будут создавать значительную концентрацию в области возмущения (сравнимую с той, которые создают ионы, летящие из невозмущенной плазмы к зонду). Это очевидно, поскольку поток ионов, движущийся к зонду создает в невозмущенной плазме в сильном поле (при сильно анизотропной ФРИ) концентрацию, близкую к концентрации электронов. При удалении от зонда сумма этих концентраций ионов существенно возрастает, в то время как концентрация электронов близка к 1 в силу (22). В результате при некотором потенциале  $\eta_1$  (а не при нулевом, как в случае изотропных ФРЭ и ФРИ) концентрации электронов и ионов сравниваются, спад потенциала пространства замедляется и асимптотически потенциал стремится к постоянному значению.

Напомним, что мы считаем, что в возмущенном слое заряженные частицы не испытывают столкновений и в данном случае рассматриваем ситуацию, когда ионы в невозмущенной плазме движутся, преимущественно, по полю. Но тогда отраженные ионы, двигаясь от зонда по полю в возмущенном зондом слое без столкновений, достигнут границы невозмущенной плазмы, имея ФРИ, которая описывается первым из соотношений (12) с заменой  $V$  на  $|V|$ . Таким образом, предположение о преимущественном движении ионов в невозмущенной плазме по полю будет нарушено.

Для модификации физической модели рассмотрим отраженные ионы, которые движутся от зонда. Когда они достигнут плоскости  $x_i \cong \frac{\lambda_i}{r_D}$ , произойдет их столкновение с атомами и резонансная перезарядка, в результате которой возникнут ионы с изотропным максвелловским распределением по скоростям, имеющим температуру атомов. Поскольку мы рассматриваем ситуацию, когда потенциал зонда порядка средней энергии ионов и много больше тепловой энергии атомов, далее эти ионы уже не могут попасть в область возмущения зондом плазмы и их можно не рассматривать.

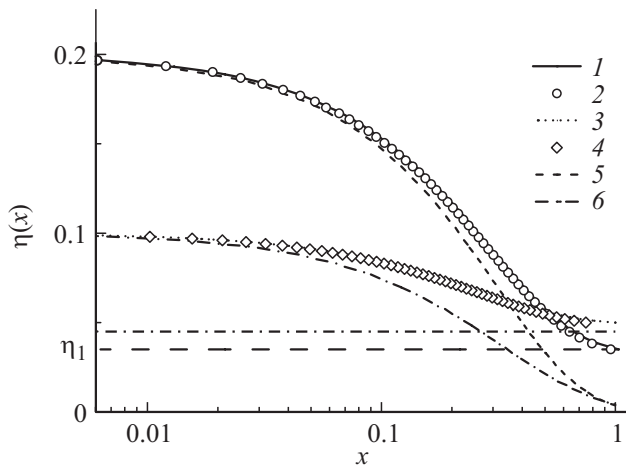
Таким образом, физическая картина распределения заряженных частиц и потенциала вокруг плоского зонда в рассматриваемом случае выглядит следующим образом. У зонда, имеющего положительный потенциал  $\eta_0$ , плотность электронов превосходит плотность ионов.



**Рис. 3.** Зависимость безразмерного потенциала  $\eta_1$  от параметра  $\kappa$  при различных потенциалах зонда  $\eta_0$  и параметрах  $\eta_0$  для дрювистейновской ФРЭ; 1 —  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\gamma_0 = 100$ ; 2 —  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 100$ ; 3 —  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\gamma_0 = 3$ ; 4 —  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\gamma_0 = 3$ .

Сильно анизотропный поток ионов, двигаясь к зонду, частично отражается от него, за счет чего в призондовом слое увеличивается концентрация ионов. Указанная тенденция приводит к тому, что на некотором расстоянии от зонда наблюдается асимптотическое снижение до нуля электрического поля с выходом потенциала на постоянное положительное значение  $\eta_1 \ll \eta_0$ . На расстоянии от зонда порядка  $x_i$  происходит резонансная перезарядка иона на атоме, в результате которой ионы отраженного от зонда потока приобретают максвелловское распределение по скоростям с температурой атомов и далее при  $x > x_i$  следует зона невозмущенной плазмы.

Структура возмущения потенциала плазмы в рассматриваемых условиях имеет следующий вид. Непосредственно к зонду прилегает область протяженностью  $x_D \approx 1$ , где потенциал резко падает до значения  $\eta_1$ , которое существенно ниже  $\eta_0$ , определяется параметром  $\kappa$  и слабо зависит от  $\eta_0$  (рис. 3). Далее следует область протяженностью  $x_i - x_D$ , где потенциал слабо убывает и близок к значению  $\eta_1$ . В этой области ФРИ обладает не слишком большой анизотропией (которая падает с ростом потенциала зонда) даже при сильно анизотропной ФРИ в невозмущенной плазме. Причина этого — наличие отраженного от зонда потока, который при потенциалах зонда порядка средней энергии ионов близок по величине к потоку, направленному к зонду на границе невозмущенной плазмы. При этом плазма в области протяженностью  $x_i - x_D$  квазинейтральна. В точке  $x = x_i$  происходит резкий скачок потенциала до 0. Зависимость потенциала от безразмерного расстояния до зонда в этих областях определяется соотношениями (12), (14), (16). Результаты расчетов профиля потенциала для конкретных параметров плазмы приведены на рис. 4. При расчетах брался случай предельно



**Рис. 4.** Зависимость безразмерного потенциала от расстояния до зонда для максвелловской и дрювистейновской ФРЭ; 1, 2 — максвелловская, дрювистейновская ФРЭ соответственно,  $\eta_1 = 0.034$ ,  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\kappa = 20$ ,  $\gamma_0 = 100$ ; 3, 4 — максвелловская, дрювистейновская ФРЭ соответственно,  $\eta_1 = 0.045$ ,  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\kappa = 10$ ,  $\gamma_0 = 3$ ; 5, 6 — расчет для изотропной максвелловской ФРИ при  $\eta_0 = 0.2$ ,  $\kappa_1 = 20$  и  $\eta_0 = 0.1$ ,  $\kappa_1 = 10$  соответственно.

большого поля, когда  $\gamma_0 \rightarrow \infty$ . В этой ситуации из (12) имеем

$$f_i(V, \eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp[-(V^2 + \kappa\eta)], \quad V \leq 0, \quad (23)$$

$$f_i(V, \eta) = 0, \quad V > 0,$$

а из (14) —

$$N_i(\eta) = \exp(-\kappa\eta)[1 + \operatorname{erfc}(\sqrt{\kappa(n_0 - \eta)})]. \quad (24)$$

Толщину призондового слоя  $x_D$ , на основании решения (19) и доказанных свойств зависимости  $\eta(x)$  определим следующими формулами (для ФРЭ в виде максвелловского и дрювистейновского распределений соответственно):

$$x_{Dm} = \int_{1.1\eta_{1m}}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2 \int_{\eta_{1m}}^{\eta'} [e^{\eta''} - N_i(\eta'')] d\eta''}}, \quad (25)$$

$$x_{Dd} = \int_{1.1\eta_{1d}}^{\eta_0} \frac{d\eta'}{\sqrt{2 \int_{\eta_{1d}}^{\eta'} [F_2(\eta'') - N_i(\eta'')] d\eta''}}, \quad (26)$$

где  $F_2(\eta)$  определена соотношением (8) при  $j = 2$ , а  $\eta_{1m}, \eta_{1d}$  — корни уравнений

$$e^{\eta_{1m}} - N_i(\eta_{1m}) = 0, \quad F_2(\eta_{1d}) - N_i(\eta_{1d}) = 0$$

соответственно.

В качестве нижнего предела в формулах (25), (26) мы выбрали величины  $1.1\eta_{1m}, 1.1\eta_{1d}$  соответственно, поскольку в области возмущенного слоя, где потенциал изменяется от этих значений до  $\eta_{1m}, \eta_{1d}$  соответственно, поле пренебрежимо мало.

## 1.2. Оценка влияния изменения собирающей поверхности зонда на вторую производную зондового тока при положительных потенциалах зонда в рассматриваемых условиях

По-прежнему будем считать, что величина потенциала зонда  $0 < \eta_0 \ll 1$ . Рассмотрим траекторию электрона вблизи края зонда (рис. 5). Поскольку, как мы видели, область возмущения состоит из двух слоев — прилегающего к зонду (толщиной  $x_D$ ), где потенциал падает от  $\eta_0$  до  $\eta_1$  и протяженного слоя толщиной  $x_i - x_D$ , где потенциал постоянен и равен  $\eta_1$ , т.е. в этом слое отсутствует электрическое поле, — при расчете траектории электрона вблизи края зонда в возмущенном слое следует принимать во внимание только примыкающий к зонду тонкий слой, поскольку вне его на электрон силы не действуют.

Очевидно, что если электрон движется в призондовом слое против оси  $Z$  введенной ранее системы координат, то под действием электрического поля, вызванного наличием  $\operatorname{grad}_\rho \eta$  (где  $\rho$  — полярный радиус-вектор), он дополнительно сместится в сторону зонда в плоскости  $XY$  на расстояние  $L = 0.5at^2$ , где  $t$  — время, в течение которого на электрон действует сила (рис. 5),  $a$  — ускорение. Имея ввиду, что время  $t$  по порядку величины равно

$$t \sim \frac{x_D r_D}{\sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}},$$

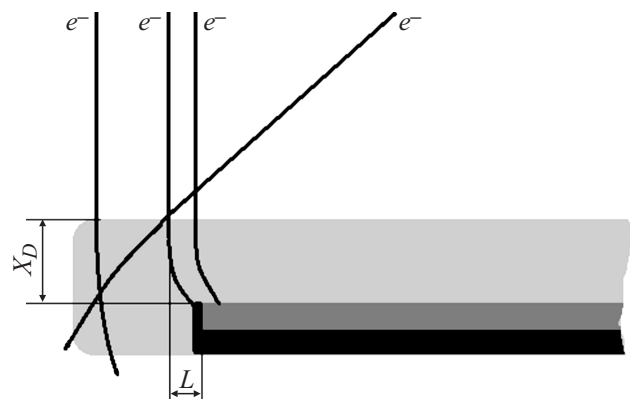
а сила, действующая на этот электрон и направленная к зонду —

$$F \leq \frac{(\eta_0 - \eta_1)kT_e}{x_D r_D},$$

получаем, что по направлению к зонду электрон дополнительно пройдет расстояние, равное

$$L \sim r_D(\eta_0 - \eta_1)x_D. \quad (27)$$

Численные вычисления на основе траекторных расчетов для электронов, проведенные с учетом того, что



**Рис. 5.** К определению увеличения собирающей поверхности зонда.

$\eta_0, \eta_1 \ll 1$ , подтверждают соотношение (27). Очевидно, что с учетом рассматриваемого эффекта изменения собирающей поверхности плоского зонда для электронов мы получим величину второй производной зондового тока в виде

$$\frac{d^2(jS)}{d(e\varphi_0)^2} = S \frac{d^2 j_i}{d(e\varphi_0)^2} + j_e \frac{d^2 S}{d(e\varphi_0)^2},$$

$$j = j_i + j_e, \quad S = \pi(R_0 + L)^2, \quad (28)$$

где  $\varphi_0$  — размерный потенциал зонда. Учитывая, что, как показывают расчеты, величина  $\eta_1 \ll \eta_0$  и слабо зависит от потенциала зонда (рис. 3), собирающая поверхность зонда растет только применительно к электронам, а плотность электронного тока в рассматриваемом диапазоне не зависит от потенциала зонда, получаем следующую оценку:

$$\frac{d^2(jS)}{d(e\varphi_0)^2} = S \frac{d^2 j_i}{d(e\varphi_0)^2} [1 - \delta W(\eta_0, x_D)], \quad (29)$$

$$W(\eta_0, x_D) \approx \sqrt{\frac{M_i}{m_e}} \left( \frac{x_D r_D}{4R_0} \right)^2 \eta_0^{1.5} \frac{1}{N_i(\eta_0)}, \quad \delta < 1.$$

Если ФРИ сильно анизотропна, то, согласно (24),

$$\frac{1}{N_i(\eta_0)} \cong 0.5 \exp(\kappa \eta_0). \quad (30)$$

В случае, когда ФРИ слабо анизотропна, а ФРЭ близка к максвелловской или дрювистейновской функциям, вместо  $x_D$  следует использовать величины  $x_m, x_d$ , определенные формулами (20), (21) соответственно.

Используя соотношение (29) и (30), а также результаты траекторных расчетов, можно предложить оценку для величины максимального потенциала зонда  $\eta_{0 \max}$ , при котором величина поправки  $W(\eta_0, x_D)$  еще не превосходит 10%:

$$\eta_{0 \max} = \frac{\Lambda[w(x_D, r_D, \kappa)]}{\kappa},$$

$$w(x_D, r_D) = \frac{1.6\kappa^{1.5}}{\sqrt{\frac{M_i}{m_e} \left( \frac{x_D r_D}{R_0} \right)^2}}, \quad (31)$$

$$\Lambda(z) = 1.2z^{0.071} \exp[0.4(z - 1)^{0.15}] - 1; \quad 5 \leq \kappa \leq 100.$$

Мы рассмотрели ситуацию, когда ФРИ сильно анизотропна, поскольку именно этот случай наиболее интересен с точки зрения практических приложений. В случае, когда ФРИ слабо анизотропна, выражение (31) неприменимо, поскольку концентрация ионов в призондовом слое не описывается соотношением (30). Однако для этой ситуации, в силу того, что средняя энергия ионов порядка атомной, потенциал зонда составляет величину порядка процента от средней энергии электрона и не может изменить его траекторию, а значит, и изменение собирающей поверхности зонда пренебрежимо мало.

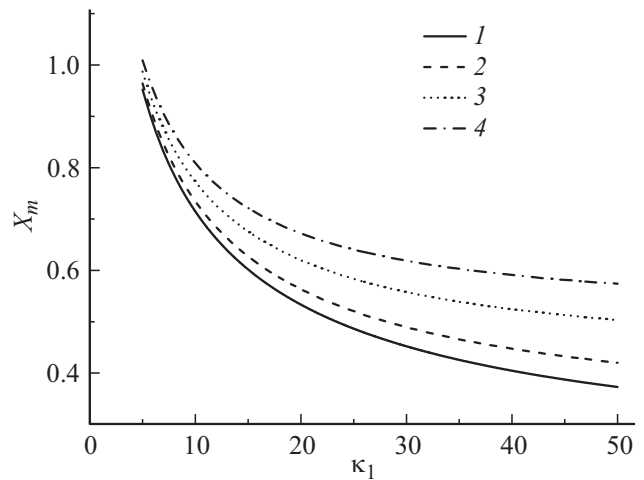


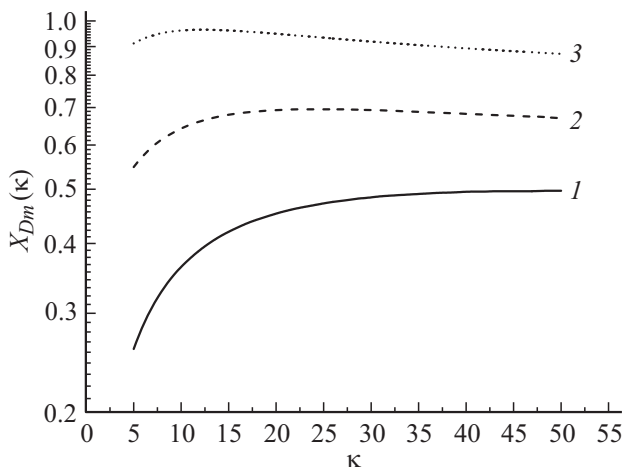
Рис. 6. Зависимость величины  $x_m$  от параметра  $\kappa_1$  при различных потенциалах зонда: 1 —  $\eta_0 = 0.05$ , 2 — 0.1, 3 — 0.2, 4 — 0.3.

## 2. Обсуждение полученных результатов

Как видно из соотношения (29), влияние изменения собирающей площади зонда при реализации предложенного в [14,15] метода определения ФРИ растет с ростом безразмерной толщины зондового слоя  $x_D$ . Это, очевидно, вызвано увеличением времени пребывания электрона в области действия сил, которые искривляют его траекторию по направлению к зонду. Соответственно аналогичная зависимость при увеличении положительного потенциала зонда вызвана ростом электрического поля в призондовом слое.

Рассмотрим характерные величины толщины зондового слоя в рассматриваемых условиях в плазме. Из данных, приведенных на рис. 4, видно, что действительно, структура призондового слоя в случае изотропной ФРИ (кривые 5, 6) и сильно анизотропной (кривые 1–4) при одинаковой средней энергии ионов сильно различаются. Асимптотически во втором случае потенциал стремится не к нулю, как для изотропной ФРИ, а к некоторому постоянному значению, который существенно меньше потенциала зонда и определяется им и параметрами плазмы.

На рис. 6 приведены результаты расчетов величины  $x_m$  в зависимости от параметра  $\kappa_1$  при различных значениях потенциала  $\eta_0$  для максвелловской ФРЭ, когда ФРИ слабо анизотропна. Видно, что, как и следовало ожидать, толщина зондового слоя растет с ростом средней энергии ионов и увеличении потенциала зонда. Величина  $x_d$ , рассчитанная для дрювистейновской ФРЭ, ведет себя аналогично и незначительно меньше  $x_m$ . Это, очевидно, связано с тем, что при одной и той же средней энергии максвелловская функция содержит больше высокоэнергетичных электронов. Вместе с тем в широком диапазоне параметров  $\kappa_1, \kappa_0$  (которые характерны для



**Рис. 7.** Зависимость толщины слоя  $x_{Dm}$  от параметра  $\kappa$ : 1 —  $\eta_0 = 0.05$ , 2 — 0.1, 3 — 0.2.

рассматриваемой задачи) величины  $x_m, x_d$  не превосходят 1. Учитывая, что в низкотемпературной плазме температура электронов порядка нескольких электрон-вольт, а средняя энергия ионов в условиях, когда ФРИ слабо анизотропна, близка к тепловой энергии атомов, характерный параметр для этого случая имеет значение  $\kappa_1 \geq 30$ . При этом  $x_m, x_d < 0.5$ .

Теперь рассмотрим структуру зондового слоя в условиях, когда ФРИ сильно анизотропна. Как уже говорилось, зондовый слой состоит из двух областей — сравнительно узкой примыкающей к зонду области протяженностью  $x_D$ , где значение электрического поля сравнительно велико, и области протяженностью  $x_i - x_D$  (которая в зависимости от параметров плазмы может меняться от величины порядка  $x_i - x_D \sim 1$  до  $x_i - x_D \gg 1$ ), где потенциал практически постоянен и соответственно электрическое поле близко к нулю. Поэтому эта более протяженная часть зондового слоя не влияет на изменение собирающей поверхности зонда при изменении его потенциала.

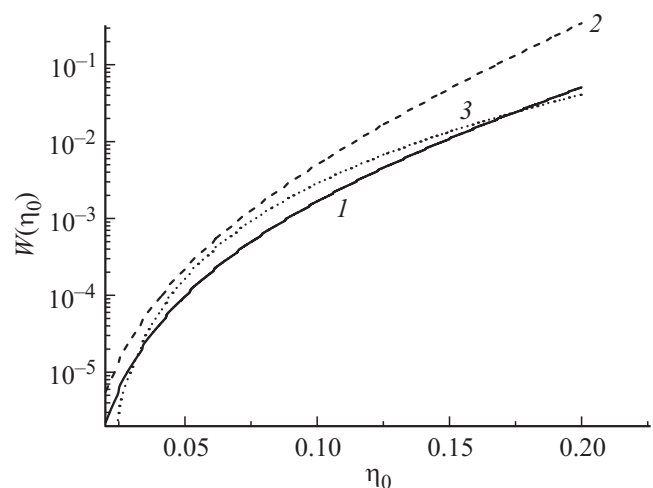
На рис. 7 приведены данные о величине  $x_{Dm}$  в зависимости от параметра  $\kappa$  и потенциала зонда  $\eta_0$  для максвелловской ФРЭ. Эта величина и  $x_{Dd}$ , вычисленная для дрювистейновской ФРЭ, мало отличаются друг от друга и при всех расчетных параметрах не превосходят единицы. При увеличении потенциала зонда они, как и толщина слоя для изотропной ФРИ, растут.

Интересна зависимость этих величин от параметра  $\kappa$ . Видно, что при его росте в области значений параметра от  $\kappa = 5$  и выше (напомним, что мы рассматриваем величины  $\kappa \gg 1$ ), наблюдается рост толщины слоя. Причем для большего потенциала зонда ( $\eta_0 = 0.2$ ) рост сменяется медленным спадом, а для меньшего — ( $\eta_0 = 0.05$ ) рост продолжается вплоть до  $\kappa = 50$ . Дело в том, что при увеличении параметра  $\kappa$  уменьшается средняя энергия ионов, что при заданном потенциале уменьшает количество ионов, находящихся вблизи зон-

да. Это приводит к уменьшению толщины слоя при увеличении  $\kappa$ . С другой стороны, при уменьшении средней энергии ионов (росте  $\kappa$ ) растет отраженный от зонда поток и, как указывалось ранее, в силу сильной анизотропии ФРИ в невозмущенной области это приводит к росту концентрации ионов вблизи зонда и достижению потенциалом значения  $\eta \approx \eta_1$ , которое и является границей части зондового слоя, прилегающей к зонду. Указанное обстоятельство ведет к увеличению толщины призондового слоя. Таким образом, при увеличении параметра  $\kappa$  мы имеем два фактора, которые влияют на толщину призондового слоя в различные стороны. Их конкуренция и формирует зависимости, которые имеют вид кривых, представленных на рис. 7.

Отметим, что задачи пространственной зависимости потенциала при наличии заряженных частиц между плоскостями, имеющими различный потенциал, рассматривались в ряде работ еще в начале XX века такими авторами, как Thornton C. Fry [29], I. Langmuir [30–32] и рядом других. Однако при проведении расчетов они, во-первых, полагали расстояние между электродами конечным; во-вторых, либо не учитывали наличие ионов и предполагали, что электроны движутся строго по нормали к поверхности электродов (хотя и распределены в соответствии с максвелловской функцией) [29,31,32], либо при учете ионов полагали распределение электронов моноэнергетичным [30].

На рис. 8 приведены результаты расчета функции  $W(\eta_0, x_D)$  в приближении сильной анизотропии ФРИ для максвелловской ФРЭ (случай дрювистейновской ФРЭ отличается незначительно) при параметрах плазмы, соответствующих условиям работ [14,15], где зондовым методом определялась ФРИ для ионов  $Hg^+$



**Рис. 8.** Зависимость поправки к зондовым измерениям в условиях работ [1] (Hg) и [2] (He, Ar); параметры, при которых рассчитывалась функция  $W(\eta_0)$ : Hg —  $\kappa \cong 5$ ,  $\frac{r_D}{R_0} \cong 0.066$ ,  $\eta_0 \leq 0.2$ ; He —  $\kappa \cong 16$ ,  $\frac{r_D}{R_0} \cong 0.062$ ,  $\eta_0 \leq 0.2$ ; Ar —  $\kappa \cong 21.4$ ,  $\frac{r_D}{R_0} \cong 0.038$ ,  $\eta_0 \leq 0.16$ ; 1 — He, 2 — Ar, 3 — Hg.



в Hg и He<sup>+</sup> в He, Ag<sup>+</sup> в Ag соответственно. Расчеты проводились при следующих условиях:

- Hg —  $kT_e = 4 \text{ eV}$ ,  $\bar{E}_i \cong 1 \text{ eV}$ ,  $\frac{LD}{R_0} \cong 0.066$ ,  $\eta_0 \leq 0.2$ ,
- He —  $kT_e = 5 \text{ eV}$ ,  $\bar{E}_i \cong 0.25 \text{ eV}$ ,  $\frac{LD}{R_0} \cong 0.062$ ,  $\eta_0 \leq 0.16$ ,
- Ag —  $kT_e = 1.5 \text{ eV}$ ,  $\bar{E}_i \cong 0.07 \text{ eV}$ ,  $\frac{LD}{R_0} \cong 0.038$ ,  $\eta_0 \leq 0.2$ .

Концентрация электронов в невозмущенной плазме  $n_e \approx 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ,  $R_0 = 0.08 \text{ cm}$ .

Как видно из приведенных данных, наблюдается резкая зависимость величины поправки от потенциала зонда. Это в первую очередь связано с аналогичной зависимостью концентрации ионов и слабой зависимостью концентрации электронов вблизи зонда при положительных потенциалах зонда в рассматриваемом диапазоне значений. Отметим, что при  $\eta_0 \leq 0.1$  поправка  $W(\eta_0, x_D)$  составляет величину менее 1% и ее резкий рост начинается после значения  $\eta_0 \sim 0.16-0.18$ . Наибольшее значение поправка к результатам измерения ФРИ имеет в случае Ag<sup>+</sup> в Ag. Это вызвано наименьшей средней энергией иона Ag<sup>+</sup> в Ag при данных условиях по сравнению с температурой электронов. Тем не менее в указанном выше диапазоне поправка не превосходит величину 10%. Поправки же для ФРИ Hg<sup>+</sup> в Hg и He<sup>+</sup> в He имеют в условиях работ [1,2] соответственно максимальные значения порядка 4–5%. Отметим, что применение формулы (30) в рассмотренных случаях дает

- Hg —  $\eta_{0 \text{ max}} = 0.25$ ,
- He —  $\eta_{0 \text{ max}} = 0.22$ ,
- Ag —  $\eta_{0 \text{ max}} = 0.17$ .

Мы рассмотрели случай, когда зонд ориентирован таким образом, что его внешняя нормаль антипараллельна электрическому полю в плазме. Если угол между ними отличен от  $\pi$ , то вполне очевидно, что величина  $\eta_{0 \text{ max}}$  окажется меньше. Действительно, при одном и том же значении  $\eta_0$  ионный ток на зонд уменьшается при уменьшении угла между электрическим полем и внешней нормалью к зонду, поскольку, во-первых, уменьшается плотность тока, так как ионы преодолевают теперь тормозящее их поле за счет нормальной к зонду проекции скорости (а не за счет всей скорости); во-вторых, поскольку уменьшается „видимая“ площадь зонда. В то же время ФРЭ слабо анизотропна и ориентация зонда практически не сказывается на электронном токе на зонд в рассматриваемых условиях. Таким образом, парциальный вес ионного тока в общем токе уменьшается, что ведет к увеличению поправки  $W(\eta_0, x_D)$ . Однако надо иметь в виду, что одновременно существенно уменьшается необходимый диапазон потенциала зонда  $\eta_0$ , поскольку с его увеличением при такой ориентации зонда вторая производная зондового тока начинает резко уменьшаться. Так, в условиях работ [14,15] при уменьшении угла между внешней нормалью к зонду и электрическим полем в плазме до величины 0.75 $\pi$  значение  $\eta_0$  падает до двух раз, что ведет к уменьшению поправки  $W(\eta_0, x_D)$  более чем в два раза.

## Заключение

В работе исследована структура призондового слоя в условиях применимости известного экспериментального метода плоского одностороннего зонда для измерения анизотропных ФРИ [14,15]. Обнаружено, что в условиях сильной анизотропии распределения ионов по скоростям при положительных потенциалах зонда призондовый слой имеет необычную структуру. Он состоит из двух слоев. В первом из них, прилегающем к проводящей поверхности зонда и имеющему протяженность порядка радиуса Дебая, потенциал спадает до величины, много меньшей потенциала зонда. Второй слой, который имеет толщину порядка длины пробега иона относительно резонансной перезарядки, характеризуется практически нулевым полем.

В результате анализа структуры призондового слоя получено аналитическое выражение для поправки, связанной с изменением собирающей поверхности зонда при изменении потенциала. Получена зависимость от параметров плазмы максимального безразмерного потенциала плоского одностороннего зонда  $\eta_{0 \text{ max}}$ , который ограничивает сверху диапазон допустимых положительных потенциалов зонда при реализации данного метода.

Проведенные исследования показывают, что метод надежно работает при положительных значениях потенциала зонда, соответствующих средней энергии ионов. В то же время его следует с осторожностью применять при положительных потенциалах порядка нескольких средних энергий ионов и более.

В заключение авторы выражают свою признательность проф. В.И. Кузнецову за внимание, полезную критику и обсуждение результатов работы.

## Список литературы

- [1] Fedorov V.L. // Zh. Tekh. Fiz. 1985. Vol. 55. P. 926 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1985. Vol. 30. P. 554].
- [2] Mezentsev A.P., Mustafaev A.S., Fedorov V.L. // Zh. Tekh. Fiz. 1985. Vol. 55. P. 544 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1985. Vol. 30. P. 322].
- [3] Mezentsev A.P., Mustafaev A.S. // Zh. Tekh. Fiz. 1985. Vol. 55. P. 2232 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1985. Vol. 30. P. 1319].
- [4] Mezentsev A.P., Mustafaev A.S., Lapshin V.F., Fedorov V.L. // Zh. Tekh. Fiz. 1986. Vol. 58. P. 2104 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1986. Vol. 31. P. 1263].
- [5] Mustafaev A.S., Mezentsev A.P. // J. Phys. D. 1986. Vol. 19. L69.
- [6] Mezentsev A.P., Mustafaev A.S., Lapshin V.F., Fedorov V.L. // J. Phys. B. 1987. Vol. 20. L723.
- [7] Mezentsev A.P., Mustafaev A.S., Fedorov V.L. // J. Phys. D. 1988. Vol. 21. P. 1464.
- [8] Fedorov V.L., Mezentsev A.P. // Zh. Tekh. Fiz. 1987. Vol. 57. P. 595 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1987. Vol. 32. P. 363].
- [9] Lapshin V.F., Mustafaev A.S. // Zh. Tekh. Fiz. 1989. Vol. 59. P. 35 [Sov. Phys. Tech. Phys. 1989. Vol. 34. P. 150].
- [10] Klagge S., Lunk A. // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 70. P. 99.

- [11] *Klagge S.* // Plasma Chem. Plasma Process. 1992. Vol. 12. P. 103.
- [12] *Mal'kov M.A.* // Fiz. Plazmy. 1990. Vol. 16. P. 467 [Sov. J. Plasma Phys. 1990. 1B. P. 267].
- [13] *Woods R.C., Sudit I.D.* // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. N 3. P. 2222–2238.
- [14] *Mustafaev A.S., Sukhomlinov V.S., Ainov M.A.* // Techn. Phys. 2015. Vol. 60. N 12. P. 1778–1789.
- [15] *Мустафаев А.С., Сухомлинов В.С., Аинов М.А.* // ТВТ. 2017. Т. 54. № 3.
- [16] *Мустафаев А.С., Сухомлинов В.С., Аинов М.А.* // ТВТ. 2017. Т. 54. № 4.
- [17] *Langmuir I., Mott-Smith H.M.* // Phys. Rev. 1926. Vol. 28. P. 723.
- [18] *Лебедев Ю.А.* Электрические зонды в плазме пониженного давления. Электронный ресурс. Режим доступа: (<http://plasma.karelia.ru/pub/fntp/Lebedev.pdf>).
- [19] *Каган Ю.М., Перель В.И.* // УФН. 1963. Т. LXXXI. Вып. 3. С. 409–452.
- [20] *Johnson J.D., Holmes A.J.T.* // Rev. Sci. Instr. 1990. Vol. 61. P. 2628–2631.
- [21] *Sheridan T.E.* // Phys. Plasm. 2000. Vol. 7. P. 3084–3088.
- [22] *Sheridan T.E.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol. 43. P. 1–5.
- [23] *Васильева И.А.* // ТВТ. 1974. Т. 12. № 1. С. 29–36.
- [24] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [25] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1992. С. 48.
- [26] *Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е.* Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. С. 11.
- [27] *Huihui Wang, Soukhomlinov V.S., Kaganovich I.D., Mustafaev A.S.* // Plasm. Sourc. Sci. Technol. 2017. Vol. 26. P. 024001.
- [28] *Huihui Wang, Soukhomlinov V.S., Kaganovich I.D., Mustafaev A.S.* // Plasm. Sourc. Sci. Technol. 2017. Vol. 26. P. 024002.
- [29] *By Thornton C. Fry* // Phys. Rev. 1921. Vol. XVII. N 4. P. 441–456.
- [30] *By Irving Langmuir* // Phys. Rev. 1929. Vol. 33. P. 954–989.
- [31] *By Irving Langmuir* // Phys. Rev. 1923. Vol. 21. P. 419–435.
- [32] *By Irving Langmuir* // Phys. Rev. 1913. Vol. II. P. 450–486.