

03

## Термализация фотонов в микрорезонаторе

© Е.Д. Трифонов

Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена,  
191186 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: thphys@herzen.spb.ru

Поступила в редакцию 30.08.2017 г.

Предложено теоретическое объяснение образования спектральной конденсации фотонов в микрорезонаторе, основанное на решении кинетических уравнений, описывающих термализацию фотонного газа в результате комбинационного рассеяния на термостате атомарного газа.

DOI: 10.21883/OS.2018.01.45362.191-17

### Введение

Для объяснения равновесного теплового излучения Эйнштейн предложил использовать стационарное решение кинетического уравнения для среднего числа фотонов, которое описывает поглощение, вынужденное и спонтанное излучения при переходах между определенными квантовыми состояниями термостата [1]. Чтобы распространить процесс установления термодинамического равновесия на более широкий интервал частот, потребовалось включить механизм рассеяния фотонов, что на феноменологическом уровне еще до появления квантовой механики было выполнено в работах Паули [2], Эйнштейна и Эренфеста [3]. С помощью квантовой механики такое рассмотрение было осуществлено в работах Компанейца [4], Зельдовича и Левича [5], исследовавших решения кинетических уравнений, описывающих рассеяние света на электронном газе.

Другим выдающимся достижением Эйнштейна в области квантовой статистической физики для идеального газа тождественных частиц с ненулевой массой покоя было теоретическое предсказание эффекта бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК): при достаточно низкой температуре „некоторое число молекул переходит в первое квантовое состояние (с нулевой кинетической энергией)“ [6]. Прямое экспериментальное подтверждение БЭК в идеальном газе было осуществлено лишь сравнительно недавно [7,8].

В последнее время появился интерес к исследованиям „конденсации фотонного газа“, в какой-то степени аналогичной БЭК. Эксперименты [9–11], демонстрирующие БЭК фотонов, предполагают термализацию состояния электромагнитного поля в микрорезонаторе при дополнительной лазерной накачке, поддерживающей среднее число фотонов в ограниченном спектральном интервале. Было обнаружено, что даже при комнатной температуре это приводит к заметной конденсации фотонов на нижней границе некоторого спектрального интервала.

В настоящей работе мы предлагаем теоретическое описание процесса спектральной конденсации фотонов с помощью решения кинетических уравнений, описывающих установление термодинамического равновесия в

микрорезонаторе при рассеянии излучения на разреженном газе, играющем роль термостата.

### Рассеяние фотонов на термостате

Пусть резонатор заполнен разреженным газом в состоянии термодинамического равновесия. Сначала рассмотрим рассеяние фотонов на одном атоме. Пусть возбуждение атома происходит под действием поля квантового радиационного осциллятора с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , а последующий переход атома в основное состояние и появление рассеянного излучения объясняется действием поля радиационного осциллятора с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ .

Атом будем рассматривать как двухуровневую электронную систему с электронными волновыми функциями  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$  основного и возбужденного состояний с собственными значениями энергий  $E_a$  и  $E_b$ . Для возбужденного электронного состояния мы будем учитывать радиационную ширину уровня энергии  $\Gamma/2$ . Кроме двух электронных состояний мы введем еще волновые функции поступательного движения атома (волны де Бройля)

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp[i(\mathbf{p}\mathbf{r} - \varepsilon_{\mathbf{p}}t)], \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор положения атома,  $\mathbf{p}$  — волновой вектор атома,  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = \hbar p^2/2M$  — частота, обусловленная кинетической энергией атома, имеющего массу  $M$ ,  $V$  — объем системы. Таким образом, базис одноатомных состояний будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi_{a,\mathbf{p}} &= \varphi_a \psi_{\mathbf{p}}, \\ \psi_{b,\mathbf{p}'} &= \varphi_b \psi_{\mathbf{p}'}. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем рассматривать взаимодействие этого атома с квантованным электромагнитным полем. В приближении Вигнера–Вайцхопфа [12] вероятность в единицу времени акта рассеяния, при котором происходит поглощение фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и испускание

фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ , может быть представлена в виде [13,14]

$$W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \frac{\pi d^4 \omega \omega'}{8V^2 \hbar^2} n(n'+1) \frac{1}{(\omega_{ba} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \times \delta(\omega - \omega' + \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{k}'}). \quad (3)$$

Здесь  $d$  — модуль матричного элемента дипольного момента перехода, по направлению которого проведено усреднение,  $n$  и  $n'$  — числа фотонов с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  в начальном состоянии электромагнитного поля. Дельта-функция обеспечивает закон сохранения энергии и описывает сдвиг частоты рассеянного света на величину, соответствующую изменению кинетической энергии атома в акте рассеяния.

Рассмотрим теперь рассеяние фотонов на идеальном газе таких атомов, который находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ . Для этого проведем суммирование вероятности (3) по ансамблю атомов, подчиняющемуся максвелловскому распределению

$$N(2\pi M k_B T / \hbar^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\hbar^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2M k_B T}\right), \quad (4)$$

где  $N$  — полное число атомов в рассматриваемом объеме.

Аргумент  $\delta$ -функции в (3)

$$\frac{\hbar p^2}{2M} + ck - \frac{\hbar(\mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{2M} - ck', \quad (5)$$

выражающий закон сохранения энергии, может быть представлен в виде

$$\frac{\hbar(\mathbf{p}, \mathbf{k}' - \mathbf{k})}{M} - c(k' - k) - \frac{\hbar(\mathbf{k}' - \mathbf{k})^2}{2M}. \quad (6)$$

Выберем ось  $Z$  в направлении вектора  $\mathbf{k}' - \mathbf{k}$ . Тогда нашу  $\delta$ -функцию можно записать как

$$\delta\left(\frac{\hbar p_z \xi}{M} - c(k' - k) - \frac{\hbar \xi^2}{2M}\right) = \frac{M}{\hbar \xi} \delta\left(p_z - \frac{Mc(k' - k)}{\hbar \xi} - \frac{\xi}{2}\right), \quad (7)$$

где  $\xi$  — модуль вектора  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ . После интегрирования по составляющим импульса атома вместо  $\delta$ -функции получим дополнительный множитель

$$N \sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T \xi^2}} \exp\left(-\frac{1}{2k_B T} \left(\frac{\Delta^2 M}{\xi^2} + \hbar \Delta + \frac{\hbar^2 \xi^2}{4M}\right)\right), \quad (8)$$

где  $\Delta = c(k' - k)$  — изменение частоты фотона.

Таким образом, вероятность рассеяния  $n, n' \rightarrow n - 1, n' + 1$  в единицу времени на термостате может быть

представлена как

$$W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^T = \frac{\pi d^4 \omega \omega'}{8V^2 \hbar^2} n(n'+1) \frac{1}{(\omega_{ba} - \omega)^2 + \Gamma^2/4} \times N \sqrt{\frac{M}{2\pi k_B T \xi^2}} \exp\left(-\frac{1}{2k_B T} \left(\frac{\Delta^2 M}{\xi^2} + \hbar \Delta + \frac{\hbar^2 \xi^2}{4M}\right)\right), \quad (9)$$

Содержащаяся в этом выражении экспонента  $\exp\left(-\frac{\hbar \Delta}{2k_B T}\right)$  отражает принцип детального равновесия, хотя также следует обратить внимание на его нарушение, обусловленное присутствием лоренциана. Отметим, что так как  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ , то  $\xi \neq 0$ . Экспонента

$$\exp\left(-\frac{1}{2k_B T} \frac{\Delta^2 M}{\xi^2}\right) \quad (10)$$

ограничивает вероятность рассеяния с большим изменением  $\Delta$  частоты фотона.

## Кинетические уравнения

Процесс установления термодинамического равновесия фотонного газа на ограниченном спектральном интервале  $(\omega_{\text{cutoff}}, \infty)$  резонатора будем описывать системой кинетических уравнений<sup>1</sup>

$$\dot{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} -W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^T + W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^T, \quad (11)$$

или, в упрощенных обозначениях,

$$\dot{n}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} -n_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}'} + 1)W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + n_{\mathbf{k}'}(n_{\mathbf{k}} + 1)W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}. \quad (12)$$

Здесь индексы  $k$  и  $k'$  нумеруют различные радиационные осцилляторы,  $n_{\mathbf{k}}(n_{\mathbf{k}'} + 1)W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  — вероятности переходов в единицу времени при взаимодействии с термостатом, описывающих виртуальное поглощение фотона  $k$ -го осциллятора и виртуальное испускание фотона  $j$ -го осциллятора.

Так как каждое слагаемое в системе (12) встречается дважды: один раз с „плюсом“, другой раз — с „минусом“, то

$$\sum_{\mathbf{k}} \dot{n}_{\mathbf{k}} = 0, \quad (13)$$

и, следовательно, обеспечен закон сохранения среднего числа фотонов. Покажем, что если бы принцип детального равновесия выполнялся точно,

$$e^{-\hbar \omega_{\mathbf{k}}/k_B T} W_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = e^{-\hbar \omega_{\mathbf{k}'}/k_B T} W_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \equiv w_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}, \quad (14)$$

<sup>1</sup> Кинетические уравнения, описывающие лазерное охлаждение газа частиц с ненулевой массой покоя и образование БЭК, рассматривались нами в [13–15]. О канонических распределениях для ансамблей с конечным числом частиц см. также [16].

то стационарное решение системы (12) имело бы вид

$$n_k = \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega_k - \mu}{k_B T} - 1}. \quad (15)$$

Действительно, каждое слагаемое в правой части уравнения (12) можно представить в виде

$$-n_k n_{k'} \left(1 + \frac{1}{n_{k'}}\right) W_{kk'} + n_k n_{k'} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right) W_{k',k}, \quad (16)$$

и поэтому в силу (15) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \sum_k \dot{n}_k &= \sum_{k,k' \neq k} -n_k n_{k'} \exp\left(\frac{\hbar\omega_{k'} - \mu}{k_B T}\right) W_{kk'} \\ &+ n_k n_{k'} \exp\left(\frac{\hbar\omega_k - \mu}{k_B T}\right) W_{k',k} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Это означает, что при установившемся термодинамическом равновесии фотоны образуют большой канонический ансамбль. Отметим, что полученный таким образом результат (17) не зависит от величин вероятностей  $W_{kk'}$ : достаточно лишь выполнение соотношения (16).

Величина химического потенциала  $\mu$  может быть определена из условия сохранения среднего числа фотонов. Если при заданной температуре термостата полное число фотонов  $n$  больше планковского, т.е.  $n > n_P$ , где

$$n_P = \sum_k \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega_k}{k_B T} - 1}, \quad (18)$$

то химический потенциал должен быть положительным, но меньше нижней границы  $\omega_{\text{cutoff}}$  спектрального интервала,  $0 < \mu < \hbar\omega_{\text{cutoff}}$ . В этом случае распределение числа фотонов с течением времени будет приближаться к каноническому с образованием конденсата вблизи  $\omega_{\text{cutoff}}$ .

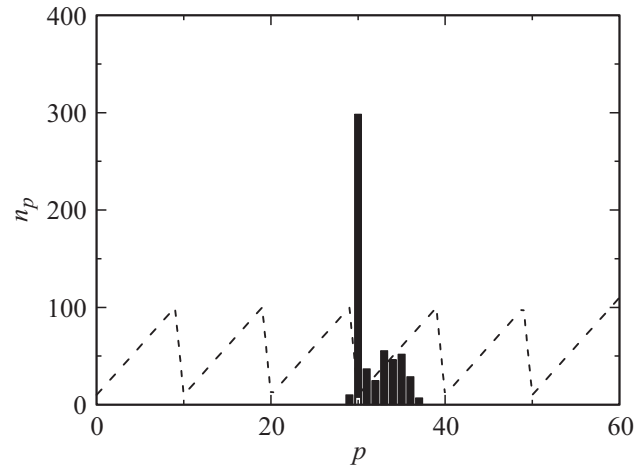
Таким образом, соотношение  $n = n_P(T)$  можно рассматривать как уравнение для определения критической температуры, ниже которой происходит образование конденсата. Рассматриваемую модель нетрудно обобщить на случай учета потерь и накачки и вместо (12) решать уравнение

$$\dot{n}_k = P_k - D_k n_k + \sum_{k \neq k'} -n_k (n_{k'} + 1) W_{kk'} + n_{k'} (n_k + 1) W_{k',k}, \quad (19)$$

где два первых слагаемых в правой части уравнения описывают накачку и потери резонаторных мод. Нахождение химического потенциала для ограниченного спектрального интервала проводится в таком случае из условия

$$\sum_k P_k - D_k n_k = 0, \quad (20)$$

где  $n_k$  определяется с помощью (18).



**Рис. 1.** Установившееся равновесное распределение фотонов в резонаторе. Аргумент  $p$  — номер моды резонатора, который мы определили для нашей модели как  $p = 10i + j$ .

Для иллюстрации процесса установления термодинамического равновесия рассмотрим модель микрорезонатора, близкую к резонатору, использованному в экспериментах [9,10], с высокодобротными высокочастотными продольными модами и низкодобротными низкочастотными поперечными модами. Собственные частоты нашего резонатора представим в виде

$$\omega_{ij} = i\Omega + j\omega \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (21)$$

заменяв индекс  $k$  двойным индексом  $ij$ . Здесь первое слагаемое определяет собственную частоту продольной моды, кратную частоте  $\Omega$ , второе определяет частоту поперечной моды, кратную частоте  $\omega$ . Будем предполагать  $\Omega \gg \omega$  и поперечные моды двумерными с кратностью вырождения  $(j+1)$ . Как и выше, каждую моду будем характеризовать коэффициентами накачки и потерь  $P_{ij}, D_{ij}$ , причем выражая низкую добротность поперечных мод, положим  $D_{ij} = (j+1)^2 D$ . Тогда кинетические уравнения (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{n}_{ij} &= P_{ij} - (j+1)^2 D n_{ij} - \sum_{i'j' \neq ij} n_{ij} (n_{i'j'} + 1) (j'+1) \\ &\times W_{ij,i'j'} + \sum_{i'j' \neq ij} n_{i'j'} (n_{ij} + 1) (j+1) W_{i'j',ij}. \end{aligned} \quad (22)$$

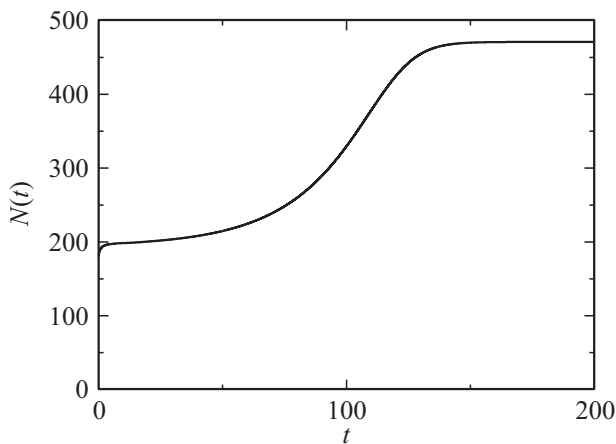
При рассеянии мы будем учитывать взаимодействие только соседних по частотам мод, а вырожденные моды будем считать одинаково заселенными, что обуславливает появление множителей  $(j'+1)$  и  $(j+1)$  в правой части уравнения.

Мы провели решение системы уравнений (22), выбрав следующие параметры модели:

$$\omega = 1, \quad \Omega = 10, \quad T = 0.3,$$

$$i = 0, 1, \dots, 5, \quad j = 0, 1, \dots, 9, \quad D_{ij} = 0.05,$$

единственный отличный от нуля коэффициент накачки  $P_{36} = 50$ . Вероятность перехода между соседними мо-



**Рис. 2.** Динамика установления термодинамического равновесия,  $N(t) = \sum_{i,j} n_{i,j}(t)$ .

дами будем считать одинаковой для всего спектра резонатора:  $w_{k,k'\pm 1} = w = 10^{-5}$ . Резонансную частоту  $\omega_{ba}$  мы взяли близкой к частоте накачки,  $\omega_{ba} = 37.5$ . При этом радиационной шириной  $\Gamma \ll \omega$  можно пренебречь. Установившееся распределение числа фотонов, полученное в результате решения кинетических уравнений (25), приведено на рис. 1. Пунктиром показано распределение собственных частот резонатора. При выбранных параметрах накачки и затухания мы, действительно, имеем конденсацию фотонов в начале спектрального интервала, соответствующего продольной частоте  $3\Omega$ . В общем случае значение частоты конденсации зависит от соотношения величин параметров накачки и добротности. В нашем примере обрывание спектра на частоте  $3\Omega$  обусловлено низкой добротностью высокочастотных поперечных мод резонатора. Динамика установления термодинамического равновесия демонстрируется зависимостью полного числа фотонов в резонаторе от времени (в условных единицах  $w^{-1}$ ) на рис. 2.

## Заключение

Наша работа была инициирована экспериментами [9–11], демонстрирующими эффект конденсации фотонов, который представляет собой аналог БЭК частиц с целым спином и ненулевой массой покоя. Как отмечалось выше, имеется в виду установление квазистационарного термодинамического равновесия на ограниченном спектральном интервале с ненулевой нижней границей, среднее число фотонов в котором поддерживается внешней накачкой. Для оптического диапазона частот даже комнатная температура термостата оказывается достаточной, чтобы обнаружить эффект конденсации: накопление фотонов на нижней границе спектрального интервала. Этот эффект представляет безусловный интерес, поскольку открывает возможность создания источника монохроматического излучения в результате

установления термодинамического равновесия. При учете характеристик микрорезонатора процесс конденсации фотонов может быть описан с помощью решения рассмотренных выше кинетических уравнений.

Выражаю благодарность А.Н. Колерову, обратившему внимание автора на данную проблему, В.А. Малышеву, Н.Н. Розанову и А.С. Трошину за обсуждение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-02-08369-а).

## Список литературы

- [1] *Einstein A.* // *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, 1916. V. 18. P. 318–323. (Перевод: Собрание научных трудов. Т. III. С. 386. М.: Наука, 1966.)
- [2] *Pauli W.* // *Zs. Phys.* 1923. V. 18. С. 272–286.
- [3] *Einstein A., Ehrenfest P.* // *Zs. Phys.* 1923. V. 19. P. 301–306.
- [4] *Компанеев А.С.* // *ЖЭТФ.* 1956. Т. 31. С. 876.
- [5] *Зельдович Я.Б., Левич Е.В.* // *ЖЭТФ.* 1968. V. 55. P. 2423–2429.
- [6] *Einstein A.* // *Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-math. Kl.*, 3, 1925. (Перевод: Собрание научных трудов. Т. III. С. 489. М.: Наука, 1966.)
- [7] *Kemmerle B.* // *УФН.* 2003. Т. 173. № 12. С. 1339–1358.
- [8] *Корнелл Э., Виман К.* // *УФН.* 2003. Т. 173. № 12. С. 1320–1338.
- [9] *Weitzel M. et al.* // *Nature Phys.* 2010. V. 6. P. 512–515.
- [10] *Weitzel M. et al.* // *Nature.* 2010. V. 468. P. 545.
- [11] *Колеров А.Н., Симушин М.М.* // *Фотоника.* 2013. № 5. P. 81.
- [12] *Weisskopf V., Wigner E.* // *Z. Phys.* 1930. V. 63. P. 54; 1930. V. 65. P. 18.
- [13] *Пойкер К., Трифонов Е.Д.* // *ФТТ.* 1968. Т. 10. С. 1705–1714.
- [14] *Аветисян Ю.А., Трифонов Е.Д.* // *УФН.* 2015. Т. 185. С. 307–315.
- [15] *Трифонов Е.Д.* // *УФН.* 2011. Т. 18. С. 747–751.
- [16] *Загуляев С.Н., Трифонов Е.Д.* // *УФН.* 2010. Т. 180. С. 89–96.