10,04

Фононы, диффузоны и бозонный пик в двумерных решетках со случайными связями

© Д.А. Конюх[1], Я.М. Бельтюков[2], Д.А. Паршин[1]

[1] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия
[2] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: conyuh.dmitrij@yandex.ru

(Поступила в Редакцию 12 июля 2017 г.)

В рамках модели устойчивых случайных матриц, обладающих трансляционной инвариантностью, рассмотрена двумерная (на квадратной решетке), неупорядоченная колебательная система со случайными, сильно флуктуирующими связями. Путем численного анализа динамического структурного фактора $S(\mathbf{q}, \omega)$ показано, что колебания с частотами ниже частоты Иоффе–Регеля ω_{IR} представляют собой обычные фононы с линейным законом дисперсии $\omega(q) \propto q$ и обратным временем жизни $\Gamma \sim q^3$. Колебания же с частотами выше частоты ω_{IR} хотя и являются делокализованными, не могут быть описаны плоскими волнами с определенным законом дисперсии $\omega(q)$. Они характеризуются диффузионным структурным фактором с обратным временем жизни $\Gamma \sim q^2$ характерным для диффузионного процесса. В литературе их часто называют диффузонами. Показано, что как и в трехмерной модели, бозонный пик на частоте ω_b в приведенной плотности колебательных состояний $g(\omega)/\omega$ порядка частоты ω_{IR}. Он расположен в переходной области между фононами и диффузонами и пропорционален модулю Юнга решетки $\omega_b \simeq E$.

Я.М. Бельтюков благодарит Совет по грантам Президента РФ за финансовую поддержку (стипендия СП-3299.2016.1).

DOI: 10.21883/FTT.2018.02.45395.222

1. Введение

Хорошо известно, что почти все стекла обладают универсальными свойствами в широкой области температур независимо от их химического состава. Одним из таких свойств является бозонный пик в приведенной плотности колебательных состояний $g(\omega)/\omega^2$ (в трехмерном случае) [1]. Он характеризует избыточную по сравнению с дебаевской плотность состояний. Бозонный пик наблюдается при измерениях теплоемкости $C(T)$ как максимум в $C(T)/T^3$, в комбинационном рассеянии света и рентгеновских лучей, в неупругом рассеянии нейтронов в стеклах. Несмотря на огромное число работ, посвященных бозонному пику, его общепринятая физическая интерпретация по-прежнему отсутствует.

Во многих работах [2–6] отмечается важная корреляция частоты бозонного пика ω_b с частотой Иоффе–Регеля ω_{IR}. При этой частоте длина свободного пробега фононов l оказывается порядка их длины волны λ. Поэтому при частотах выше частоты Иоффе–Регеля понятие о фононах оказывается неприменимым. Это возможно связано с тем, что в области бозонного пика имеется сильное резонансное рассеяние фононов на соответствующих квазилокальных модах. Однако при достижении частоты ω_{IR} локализации фононов при этом не наступает. Колебания с частотами $\omega > \omega_{\mathrm{IR}}$ распространяются за счет диффузии [7,8]. Для отличия этих колебаний от фононов их называют диффузонами [8]. В работе [9] было показано, что в трехмерных системах бозонный пик и диффузия колебаний возникают естественным образом в различных моделях случайных матриц. Однако остается открытым вопрос о существовании бозонного пика и свойствах фононов в двумерных аморфных системах и его связи с упругими свойствами материала. Одна из целей настоящей работы — дать ответ на этот вопрос в рамках модели случайных матриц, предложенной в [9].

Данная работа имеет следующую структуру. В разделе 2 описано построение двумерной решетки со случайными связями с помощью случайных матриц. В разделе 3 рассмотрена плотность колебательных состояний и бозонный пик. В разделах 4 и 5 рассмотрены фононы и диффузоны — два основных типа колебательных возбуждений в рассматриваемой системе. В приложении 1 описан метод расчета динамического структурного фактора.

2. Модель случайных матриц

В аморфных телах, вследствие локального беспорядка, симметричная динамическая матрица M, соответствующая матрице силовых констант [10] и описывающая колебания атомов, до некоторой степени носит элемент случайности. Однако матрица M отражает определенные общие физические свойства колебательной системы, что накладывает на ее структуру некоторые ограничения. Случайная матрица M должна удовлетворять требованию механической устойчивости, то есть все ее собственные числа, соответствующие квадратам собственных частот [11], должны быть неотрицательными. Для существования в системе низкочастотных (акустических) фононов матрица M должна удовлетворять требованию трансляционной инвариантности. Кроме этого, рассматриваемая система должна иметь отличную от нуля жесткость (модуль Юнга $E \neq 0$) для распространения в ней этих фононов.

С учетом обозначенных выше свойств, динамическая матрица M может быть задана с помощью случайных матриц в виде [7]

$$M = AA^T + \mu M_0. \tag{1}$$

В двумерной системе матрица A является случайной квадратной матрицей, построенной на двумерной квадратной решетке с гауссовым распределением недиагональных матричных элементов между ближайшими соседями. Диагональные элементы при этом равны взятой со знаком минус сумме недиагональных элементов соответствующего столбца матрицы A. Это обеспечивает важное условие трансляционной инвариантности

$$\sum_j M_{ij} = \sum_i M_{ij} = 0. \tag{2}$$

Оно означает, что сдвиг всей системы как целого не меняет ее потенциальной энергии. Стандартная кристаллическая динамическая матрица M_0 построена на той же решетке, с единичными пружинками между соседними узлами решетки. Параметр системы μ характеризует степень беспорядка и меняется в интервале $0 \leq \mu < \infty$.

Представленный выше способ построения динамической матрицы не является единственно возможным, однако, как было показано на примере трехмерной задачи, разные способы построения приводят к результатам, которые обладают многими общими свойствами [9].

3. Плотность колебательных состояний

Собственные числа динамической матрицы M являются квадратами собственных частот ω_n^2. Распределение собственных частот определяет плотность колебательных состояний

$$g(\omega) = \frac{1}{N} \sum_n \delta(\omega - \omega_n), \tag{3}$$

где N — число степеней свободы, которое в рассматриваемой скалярной модели совпадает с числом атомов.

Плотность колебательных состояний $g(\omega)$ для $N = 1000^2$, циклических граничных условиях и четырех различных значений параметра μ изображена на рис. 1, a. Для вычисления $g(\omega)$ мы использовали метод KPM (Kernel Polynomial Method) [12]. Прямые линии на

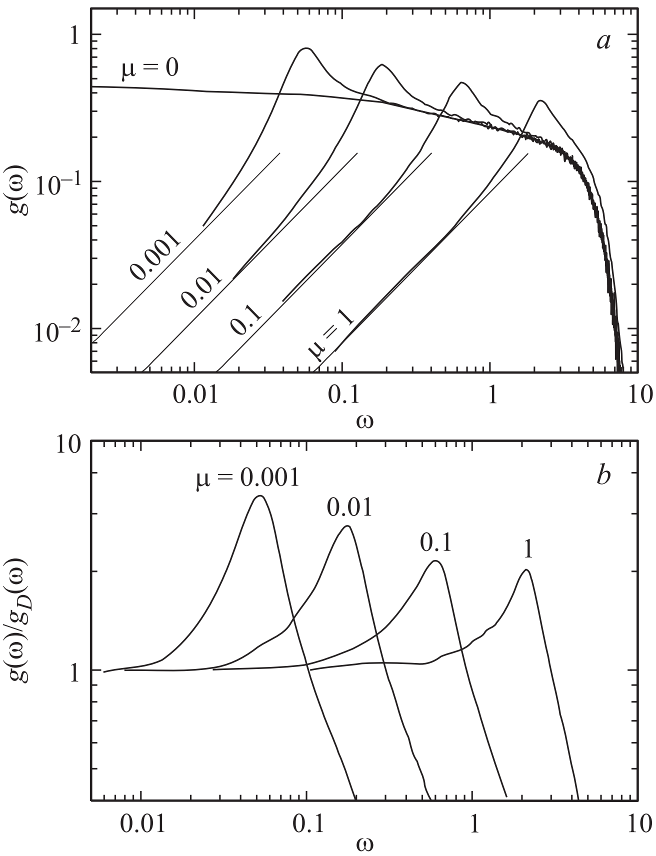

Рис. 1. a) Плотность колебательных состояний для различных значений μ. Прямыми линиями показан закон Дебая $g_D(\omega) \propto \omega$. b) Приведенная плотность колебательных состояний $g(\omega)/g_D(\omega)$ с максимумом, представляющим собой бозонный пик.

рис. 1, a показывают дебаевскую плотность состояний, которая для двумерной квадратной решетки (с постоянной решетки $a_0 = 1$ и единичными массами) имеет вид

$$g_D(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{E}, \tag{4}$$

где модуль Юнга E зависит от параметра μ (метод вычисления модуля Юнга описан в [7]). Как и в аналогичной трехмерной задаче [7], при $\mu \ll 1$, мы имеем сильно неупорядоченную систему с модулем Юнга $E \simeq \sqrt{\mu}$ и большими флуктуациями локальных силовых констант по сравнению с их средним значением.

Бозонный пик в приведенной плотности состояний $g(\omega)/g_D(\omega)$ показан на рис. 1, b для тех же четырех значений μ. Частота бозонного пика ω_b попорциональна $\sqrt{\mu}$, что соответствует линейной связи ω_b и модуля Юнга E. Данное соотношение было получено и в различных трехмерных моделях случайных матриц [9]. Однако в двумерных решетках, как следует из рис. 1, b, высота бозонного пика существенно слабее зависит от модуля Юнга E.

4. Фононы

При $\mu \neq 0$ низкочастотные колебания в системе — это фононы (плоские волны) с определенным законом дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ и некоторым, сравнительно небольшим, затуханием $\Gamma(\mathbf{q})$. В пределе малых частот они имеют линейный закон дисперсии $\omega = vq$ и определяют дебаевскую плотность состояний $g_D(\omega)$. Однако с ростом частоты роль рассеяния начинает играть все большую роль. При некоторой частоте длина свободного пробега фононов l становится сравнима с длиной волны λ. Это так называемый критерий Иоффе–Регеля, который мы определяем как $l = \lambda/2$ [7].

Для детального изучения колебаний и определения $\omega(\mathbf{q})$ и $\Gamma(\mathbf{q})$ был рассчитан динамический структурный фактор

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^{N} \Big| \sum_{i=1}^{N} e_i(\omega_n) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_i} \Big|^2 \delta(\omega - \omega_n) \quad (5)$$

в широкой области частот и волновых векторов (см. Приложение). Здесь $\mathbf{r}_i$ — это равновесное положение i-го атома, а $e_i(\omega_n)$ — компонента собственного вектора динамической матрицы M, соответствующая атому с номером i и собственной частоте ω_n. Определенный выше динамический структурный фактор имеет непосредственную связь с плотностью колебательных состояний

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mathbf{q}} S(\mathbf{q}, \omega). \quad (6)$$

На рис. 2 представлен результат расчета динамического структурного фактора для $\mu = 0.1$. Такое значения параметра μ характерно, например, для аморфного SiO_2 [7]. Для лучшего визуального отображения на рис. 2 представлен нормированный структурный фактор $S_*(q, \omega) = S(q, \omega)/\max_{\mathbf{q}} S(q, \omega)$. Для частот $\omega < 0.5$ наблюдается закон дисперсии фононов — тонкая линия, связывающая частоту ω и волновой вектор $\mathbf{q}$. При более высоких частотах, однако, динамический структурный фактор существенно видоизменяется, делает невозможным однозначную связь ω и $\mathbf{q}$.

Присутствие беспорядка в системе ведет к тому, что волна, возбужденная с некоторым волновым вектором $\mathbf{q}$ рассеивается и энергия исходной волны затухает с некоторым параметром затухания Γ. Таким образом каждому волновому вектору $\mathbf{q}$ можно сопоставить затухающий гармонический осциллятор с собственной частотой $\omega(\mathbf{q})$ и затуханием $\Gamma(\mathbf{q})$. В такой упрощенной модели структурный фактор имеет вид

$$S_{\mathrm{DHO}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{A_{\mathbf{q}} \omega^2}{\left(\omega^2 - \omega(\mathbf{q})^2\right)^2 + \omega^2 \Gamma(\mathbf{q})^2}. \quad (7)$$

В англоязычной литературе данная модель получила название *damping harmonic oscillator* (DHO). Для малых волновых векторов $\mathbf{q}$ можно ожидать слабое затухание

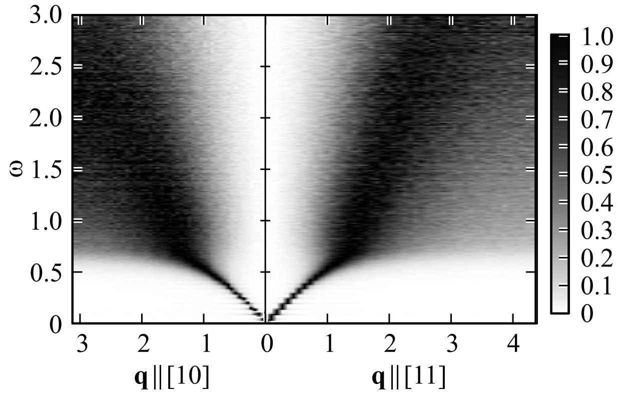

Рис. 2. Нормированный динамический структурный фактор $S_*(\mathbf{q}, \omega)$ для $\mu = 0.1$. Структурный фактор показан для двух разных направлений в обратном пространстве: $q \parallel [10]$ (слева), $q \parallel [11]$ (справа).

$\Gamma(\mathbf{q}) \ll \omega(\mathbf{q})$, но для больших волновых векторов рассеяние может быть достаточно сильным $\Gamma(\mathbf{q}) \gtrsim \omega(\mathbf{q})$.

Численные расчеты показали, что в широкой области параметров формула (7) достаточно хорошо описывает вычисленный структурный фактор $S(\mathbf{q}, \omega)$. В данной работе нами было рассмотрено 5 значений параметра μ: 0, 0.001, 0.01, 0.1, 1. Для каждого из этих параметров с помощью процедуры подгонки были найдены $\omega(\mathbf{q})$ и $\Gamma(\mathbf{q})$, изображенные на рис. 3.

Видно, что закон дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ приблизительно является линейным, однако затухание $\Gamma(\mathbf{q})$ растет значительно быстрее его. Как мы покажем далее, критерий Иоффе–Регеля для фононов со слабой дисперсией может быть приблизительно сформулирован как $\omega(\mathbf{q}) \approx \pi\Gamma(\mathbf{q})$. Как видно из рис. 3, точки, соответствующие критерию Иоффе–Регеля, практически совпадают с пересечением кривых $\omega(\mathbf{q})$ и $\pi\Gamma(\mathbf{q})$.

Стоит отметить, что описанная выше процедура подгонки может быть использована для определения $\omega(\mathbf{q})$ и $\Gamma(\mathbf{q})$ в области волновых векторов, для которых $\omega(\mathbf{q}) > \omega_{\mathrm{IR}}$. С точки зрения модели DHO, каждому $\mathbf{q}$ в этой области соответствует передемпфированный гармонический осциллятор. Поэтому в данном режиме доминирующую роль играет затухание $\Gamma(\mathbf{q})$, по сравнению с зависимостью $\omega(\mathbf{q})$ которая не может быть интерпретирована как определенный закон дисперсии. Данный режим будет более подробно рассмотрен в следующем разделе.

На рис. 4 изображен совокупный график зависимости затухания Γ от волнового вектора q для всех исследованных значений параметра μ. Видно, что наблюдается два характерных участка. В первом (при малых q) $\Gamma \sim q^3$, что соответствует рэлеевскому рассеянию фононов на беспорядке в двумерных системах [13]. Во втором (при больших значениях q) $\Gamma \sim q^2$ с некоторой переходной областью между ними. Для разных значений параметра μ переходная область имеет разную частоту $\omega_{IR} \propto \sqrt{\mu}$,

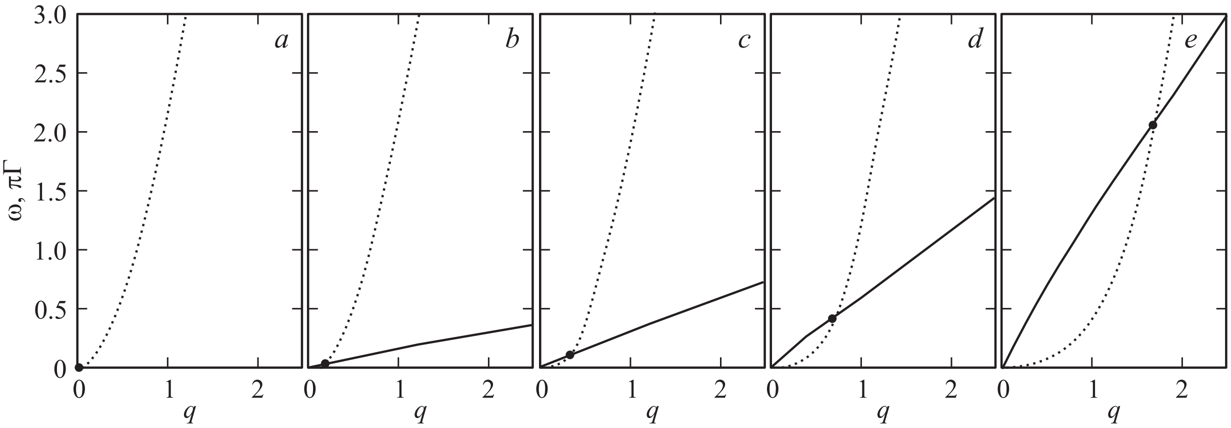

Рис. 3. Дисперсия фононов $\omega(\mathbf{q})$ (сплошные линии) и затухание $\pi\Gamma(\mathbf{q})$ (пунктирные линии), определенные с помощью подгонки под формулу (7) для различных значений параметра μ: 0, 0.001, 0.01, 0.1, 1 для панелей $(a)-(e)$ соответственно. Ориентация волнового вектора $\mathbf{q}$ выбрана вдоль направления [11]. Черные точки лежат на зависимости $\omega(q)$ и соответствуют критерию Иоффе–Регеля $l = \lambda/2$.

при этом для случая $\mu = 0$ наблюдается только участок с $\Gamma \sim q^2$. Точки на рис. 4 обозначают критерий Иоффе–Регеля и все они попадают приблизительно на верхний край участка $\Gamma \sim q^3$. Здесь следует заметить, что участок с $\Gamma \sim q^2$ вообще не имеет отношения к фононам, а, как мы увидим в следующем параграфе, связан с диффузией колебаний (в области частот выше частоты Иоффе–Регеля), т. е. относится к диффузонам.

Зная групповую скорость фононов $v_g = d\omega/dq$ и затухание Γ, нами была определена длина свободного пробега фононов $l = v_g/\Gamma$, которая изображена на рис. 5. Как было показано в работе [7], в данном случае критерий Иоффе–Регеля может быть определен как равенство длины свободного пробега фонона и половины его длины волны: $l = \lambda/2$. Пересечение линий и точек

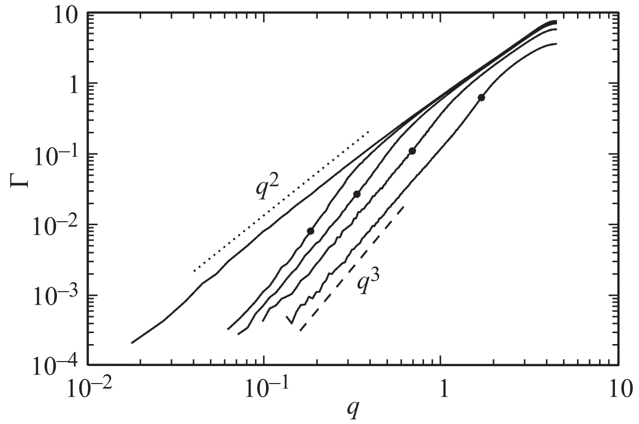

Рис. 4. Зависимость затухания Γ от волнового вектора q для различных значений параметра μ: 0, 0.001, 0.01, 0.1, 1 (слева направо, сплошные линии). Направление волнового вектора $\mathbf{q}$ выбрано вдоль направления [11]. Штриховой линией обозначено поведение $\Gamma \sim q^3$. Пунктирной — $\Gamma \sim q^2$. Черные точки лежат на зависимости $\Gamma(q)$ и соответствуют критерию Иоффе–Регеля $l = \lambda/2$.

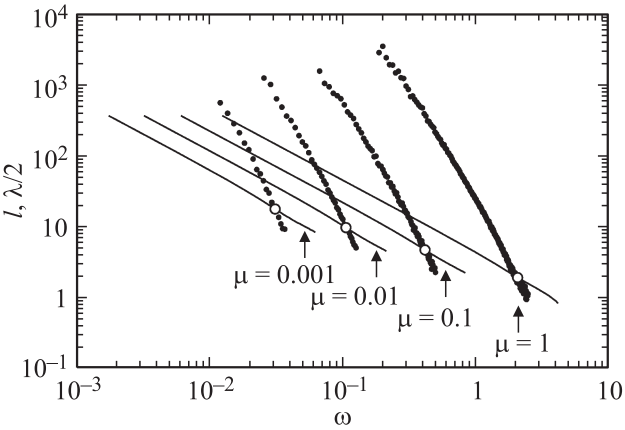

Рис. 5. Длина свободного пробега $l = v_g/\Gamma$ (черные точки) и половина длины волны $\lambda/2 = \pi/q$ (сплошные линии) в зависимости от частоты ω для различных значений параметра μ: 0.001, 0.01, 0.1, 1 (слева направо). Направление волнового вектора $\mathbf{q}$ выбрано вдоль направления [11]. Пересечение сплошных линий с соответствующими черными точками определяет критерий Иоффе–Регеля и обозначено белыми кружками. Стрелочками показано положение частоты бозонного пика ω_b.

на рис. 5 определяет частоту Иоффе–Регеля ω_{IR} для каждого значения параметра $\mu > 0$.

На рис. 5 стрелками показано положение частоты бозонного пика ω_b. Видно, что частота бозонного пика коррелирует с частотой Иоффе–Регеля ω_{IR}. При малых значениях параметра μ отношение $\omega_b/\omega_{\mathrm{IR}}$ составляет примерно 1.7 и практически не зависит от μ.

5. Диффузоны

Как было показано в предыдущем параграфе, свойства колебаний с частотами ниже и выше крите-

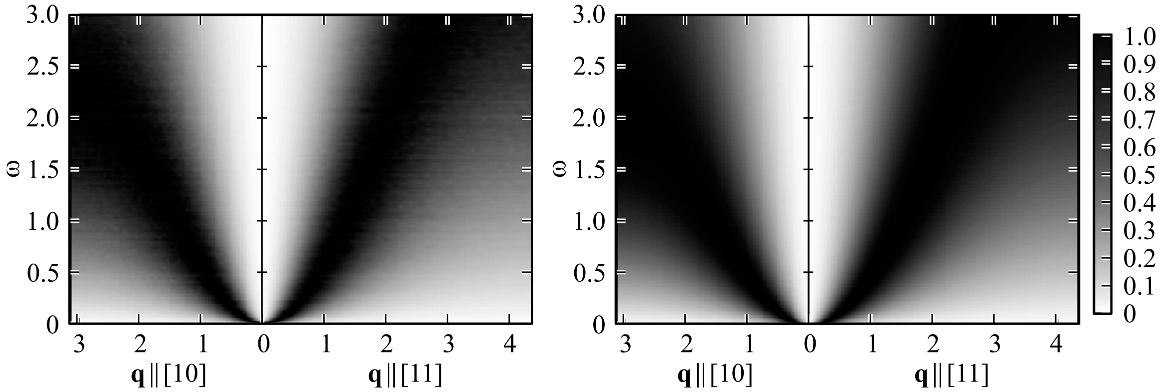

Рис. 6. Нормированный динамический структурный фактор $S_*(\mathbf{q}, \omega)$ для $\mu = 0$. На левой панели показан результат расчета по формуле (5), на правой — теоретическая формула (8). На каждой панели показан структурный фактор для двух разных направлений в обратном пространстве: $q \parallel [10]$ (слева), $q \parallel [11]$ (справа).

рия Иоффе–Регеля существенно отличаются. Колебания с частотами ниже критерия Иоффе–Регеля обладают вполне определенной длиной свободного пробега $l > \lambda/2$. Однако колебания с частотами выше критерия Иоффе–Регеля не могут быть охарактеризованы никакой определенной длиной свободного пробега, и, как следствие, их длина волны не является вполне определенной физической величиной.

Наиболее выразительным с точки зрения изучения диффузонов является случай $\mu = 0$, когда $\omega_{\mathrm{IR}} = 0$ и все делокализованные колебания являются диффузонами. Фононы не распространяются по решетке, поскольку модуль Юнга $E = 0$. На рис. 6, *a* представлен рассчитанный по формуле (5) динамический структурный фактор для $\mu = 0$.

В работе [7] было показано, что в случае $\mu = 0$ в силу закона сохранения импульса диффузоны могут быть описаны с помощью случайных блужданий атомных скоростей, для которых структурный фактор имеет вид

$$S_{\mathrm{rw}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2\Gamma(\mathbf{q})}{\omega^2 + \Gamma^2(\mathbf{q})}. \tag{8}$$

В случае квадратной решетки (с постоянной решетки $a_0 = 1$) $\Gamma(\mathbf{q})$ определяется формулой

$$\Gamma(\mathbf{q}) = 4D_{\mathrm{rw}} \left(\sin^2 \frac{q_x}{2} + \sin^2 \frac{q_y}{2} \right), \tag{9}$$

где D_{rw} — коэффициент диффузии случайных блужданий по решетке. Для малых значений волнового вектора $q \ll 1$, $\Gamma = D_{\mathrm{rw}} q^2$, и мы получаем известную формулу структурного фактора для непрерывного диффузионного процесса

$$S_{\mathrm{rw}}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2D_{\mathrm{rw}} q^2}{D_{\mathrm{rw}}^2 q^4 + \omega^2}. \tag{10}$$

На рис. 6 представлено сравнение результатов численного расчета с теоретической формулой (8). Найти заметные отличия рис. 6, *a* и *b* не представляется возможным. Эти два рисунка практически совпадают.

Можно обратить внимание, что формулы (8) и (10) получаются естественным образом из модели DHO (7) при $\omega \gg \omega(\mathbf{q})$. Именно такой случай имеет место для $\mu = 0$, поскольку в этом случае $\omega(\mathbf{q}) = 0$ согласно рис. 3, *a*, на котором сплошная линия практически слилась с горизонтальной осью. Для $0 < \mu \ll 1$ область волновых векторов $\mathbf{q}$ и частот ω, для которых выполняется соотношение $\omega \gg \omega(\mathbf{q})$, также является доминирующей, в особенности для частоты выше частоты ω_{IR}.

Становится понятным физический смысл затухания $\Gamma \propto q^2$, где коэффициентом пропорциональности является коэффициент диффузии D_{rw}. Оно наблюдалось во многих стеклах при неупругом рассеянии рентгеновских лучей [14,15]. Таким образом, если в начальный момент времени задать скорости атомов в виде плоской волны с волновым вектором $\mathbf{q}$, для которого $\Gamma(\mathbf{q}) \gg \omega(\mathbf{q})$, то квадрат амплитуды данной волны будет экспоненциально убывать со временем $\propto \exp(-D_{\mathrm{rw}} q^2 t)$, не совершая осцилляций. При этом скорости отдельных атомов будут подчиняться случайному блужданию, а усредненная скорость атомов будет релаксировать согласно уравнению диффузии.

6. Заключение

В данной работе показано, что бозонный пик, являющийся непременным атрибутом трехмерных неупорядоченных систем, возникает также и в двумерных аморфных системах, по крайней мере в некоторых моделях случайных матриц. Показано, что, как и в трехмерных системах, имеет место корреляция частоты бозонного пика ω_b и частоты Иоффе–Регеля ω_{IR}. При частотах меньших ω_{IR} в системе имеются фононы с линейным законом дисперсии, распространяющиеся со скоростью звука. При более высоких частотах понятие о фононах теряет свой физический смысл и колебания в аморфной среде распространяются посредством диффузии.

Приложение

Прямой расчет плотности колебательных состояний и динамического структурного фактора (5) требует знания всех собственных чисел и собственных векторов динамической матрицы M. Однако для больших систем с $N = 10^6$ атомами нахождение всех собственных чисел и собственных векторов не представляется возможным.

Поэтому для расчета плотности колебательных состояний и динамического структурного фактора мы использовали метод KPM [12,16]. Однако расчет структурного фактора потребовал модификации для существенного ускорения численной сходимости алгоритма, описанного в работе [12].

Если говорить о расчете колебательных свойств, то метод KPM можно интерпретировать как последовательное вычисление атомных смещений и их последующий анализ. На первом шаге смещение атомов равно нулю $u_i^{(0)} = 0$ и имеется некоторая случайная скорость $v_i^{(0)}$ (случайные гауссовы числа с нулевым средним и единичной дисперсией). На втором шаге смещение атомов имеет вид $u_i^{(1)} = \delta t\, v_i^{(0)}$, где δt — некоторый шаг по времени. Затем вычисляется последовательность атомных смещений u_i^k для $k > 1$ с использованием следующего рекуррентного соотношения

$$u_i^{(k+1)} = 2u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)} - \delta t^2 \sum_j M_{ij} u_i^{(k)}. \qquad (\text{П}1)$$

В представленном виде уравнение (П1) совпадает с методом интегрирования Верле. Однако в отличие от классического метода Верле, для сходимости рассматриваемого метода достаточно выполнения неравенства $\delta t\, \omega_{\max} < 2$, где $\omega_{\max}$ — максимальная собственная частота в системе.

На каждом шаге рекуррентного соотношения (П1) для всех интересующих нас волновых векторов $\mathbf{q}$ вычисляется преобразование Фурье

$$m_k(\mathbf{q}) = \sum_i e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_i} u_i^{(k)}. \qquad (\text{П}2)$$

Тогда структурный фактор может быть вычислен как

$$S(\mathbf{q}, \omega) = \left\langle \frac{4\omega^2\, \delta t}{N^2} \left| \sum_{k=1}^{K-1} a_k m_k(\mathbf{q}) \sin(k\varphi) \right|^2 \right\rangle_R, \qquad (\text{П}3)$$

где $\varphi = 2\arcsin(\omega\, \delta t/2)$, а угловые скобки означают усреднение по R независимым реализациям случайной начальной скорости. Число шагов K соответствует вычислению временной эволюции системы вплоть до времени $T \sim K\delta t$, что определяет разрешение по частоте $\delta\omega \sim 1/T$. Коэффициенты a_k плавно уменьшаются до 0 с ростом k и служат для подавления осцилляций Гиббса. Мы использовали коэффициенты $a_k = \sqrt{2/(K+1)}\cos(\pi k/2K)$, которые соответствует ядру Джексона, считающееся оптимальным для большинства приложений (см. уравнение (66) в работе [16]).

Список литературы

[1] V.L. Gurevich, D.A. Parshin, H.R. Schober. Phys. Rev. B **67**, 094203, (2003).
[2] V.L. Gurevich, D.A. Parshin, J. Pelous, H.R. Schober. Phys. Rev. B **48**, 16318 (1993).
[3] D.A. Parshin, C. Laermans. Phys. Rev. B **63**, 132203 (2001).
[4] B. Rufflé, G. Guimbretière, E. Courtens, R. Vacher, G. Monaco, Phys. Rev. Lett. **96**, 045502 (2006).
[5] B. Rufflé, D.A. Parshin, E. Courtens, R. Vacher. Phys. Rev. Lett. **100**, 015501 (2008).
[6] H. Shintani, H. Tanaka. Nature Mater. **7**, 870 (2008).
[7] Y.M. Beltukov, V.I. Kozub, D.A. Parshin. Phys. Rev. B **87**, 134203 (2013).
[8] P.B. Allen, J.L. Feldman, J. Fabian, F. Wooten. Phil. Mag. B **79**, 1715 (1999).
[9] Я.М. Бельтюков, Д.А. Паршин. Письма в ЖЭТФ **104**, 570 (2016).
[10] А. Марадулин, Э. Монтролл, Дж. Вейсс. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. Мир, М. (1965). 383 с.
[11] Я.М. Бельтюков, Д.А. Паршин. ФТТ **53**, 142 (2011).
[12] Y.M. Beltukov, C. Fusco, D.A. Parshin, A. Tanguy. Phys. Rev. E **93**, 023006 (2016).
[13] В.Л. Гуревич. Кинетика фононных систем. Наука, М. (1980). 400 с.
[14] F. Sette, M.H. Krisch, C. Masciovecchio, G. Ruocco, G. Monaco. Science **280**, 1550 (1998).
[15] G. Ruocco, F. Sette. J. Phys.: Condens. Mater. **13**, 9141 (2001).
[16] A. Weiße, G. Wellein, A. Alvermann, H. Fehske. Rev. Mod. Phys. **78**, 275 (2006).