01

Высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в вырожденной электронной плазме

© В.Б. Бобров

Объединенный институт высоких температур РАН,
125412 Москва, Россия
Национальный исследовательский университет „МЭИ“,
111250 Москва, Россия
e-mail: vic5907@mail.ru

(Поступило в Редакцию 1 июня 2017 г.)

Показано, что в вырожденной электронной плазме асимптотическое поведение спектрального распределения энергии равновесного излучения в области высоких частот принципиально отличается от формулы Планка в силу степенного характера убывания по частоте. При этом определяющим является учет собственного магнитного момента электронов.

DOI: 10.21883/JTF.2018.02.45402.2370

Введение

Формула Планка [1], определяющая спектральное распределение энергии равновесного излучения, соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела, представляющего собой свободную от вещества полость, заполненную излучением и ограниченную абсолютно поглощающим веществом. При этом не рассматриваются эффекты взаимодействия фотонов с ограничивающим полость веществом, учет которых необходим для установления состояния термодинамического равновесия [2]. Тем самым распределение Планка описывает объемные характеристики равновесного излучения абсолютно черного тела в пренебрежении поверхностными эффектами, обусловленными наличием вещества.

Аналогичная ситуация фактически имеет место и при рассмотрении макроскопического тела, находящегося в тепловом равновесии с окружающим его „черным“ излучением [2]. В решении этой задачи, имеющей непосредственное отношение к закону Кирхгофа, достигнуты большие успехи (см. подробнее [3–5] и цитированную там литературу). При этом поглощательная способность тела, являясь поверхностной характеристикой, рассматривается, по сути, как объемная.

С другой стороны, исследованию спектрального распределения энергии излучения в самом веществе, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с излучением, практически не уделялось внимания (см. [6–9] и цитированную там литературу). Это обусловлено, как принято считать, необходимостью решения вопроса об энергии электромагнитного поля в поглощающей среде [10]. С формальной точки зрения проблема заключается в установлении соотношения между энергией электромагнитного поля и общим выражением для тепловых потерь в среде в нестационарных условиях, когда средние значения напряженностей электромагнитного поля отличны от нуля и изменяются во времени. Это приводит в конечном итоге к рассмотрению только областей прозрачности [10–13]. При таком рассмотрении решение задачи возможно для равновесного состояния среды в статическом электромагнитном поле или, в крайнем случае, при слабой зависимости электромагнитного поля от времени [10–13].

Однако случай равновесной материальной среды, представляющей собой совокупность электромагнитного поля и вещества (заряженных частиц) является в этом смысле исключением. В такой системе тепловые потери отсутствуют, т.е. поглощение электромагнитного поля уравновешено его испусканием. При этом, средние значения напряженностей электромагнитного поля равны нулю [14]. Это позволяет решить вопрос о спектральном распределении энергии равновесного излучения в материальной среде [8,9].

Спектральное распределение энергии равновесного излучения в материальной среде

Рассмотрим материальную среду, представляющую собой совокупность заряженных частиц и фотонов. Термодинамические свойства такой материальной среды, занимающей объем V, полностью определяются ее термодинамическим потенциалом Гиббса [15]

$$\Omega(T, V, \{\gamma_a\}) = -T \ln Z(T, V, \{\gamma_a\}), \tag{1}$$

где T — температура рассматриваемой системы в энергетических единицах, γ_a — химический потенциал для заряженных частиц сорта a, которые характеризуются массой m_a, зарядом $z_a e$, спином s_a и собственным магнитным моментом μ_a. Здесь и далее для простоты рассматривается нерелятивистская система заряженных частиц [2,15]. Химический потенциал для фотонов, как обычно [2], считается равным нулю.

По определению большая статистическая сумма $Z(T, V, \{\gamma_a\})$ равна

$$Z(T, V, \{\gamma_a\}) = T_{r\exp}\left\{-\left(\hat{H} - \sum_a \gamma_a \hat{N}_a\right) \Big/ T\right\}, \quad (2)$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан системы в представлении вторичного квантования:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{part}} + \hat{H}_{\text{ph}}, \quad (3)$$

H_{part} — гамильтониан взаимодействующих заряженных частиц в квантованном электромагнитном поле

$$\hat{H}_{\text{part}} = \sum_a \frac{\hbar^2}{2m_a} \int d^3r \left(\nabla + \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\right) \times \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\left(\nabla - \frac{iz_a e}{\hbar}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\right)\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}) - \sum_a \int d^3r \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\mu}}_a\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}) \operatorname{rot}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) + \hat{H}_{\text{Coul}}, \quad (4)$$

H_{Coul} — гамильтониан кулоновского взаимодействия заряженных частиц

$$\hat{H}_{\text{Coul}} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} \int d^3r_1 d^3r_2 u_{ab}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \times \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}_b^+(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_b(\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}_1), \quad (5)$$

$u_{ab}(r) = (z_a z_b e^2)/r$ — потенциал кулоновского взаимодействия заряженных частиц сортов a и b, $\boldsymbol{\mu}_a$ — оператор собственного магнитного момента для частиц сорта a, $\hat{\Psi}_a^{\pm}(\mathbf{r})$ и $\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})$ — соответственно полевые операторы рождения и уничтожения для заряженных частиц сорта a, $\hat{N}_a = \int d^3r \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})$ — оператор полного числа частиц сорта a, $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})$ — оператор векторного потенциала, соответствующий квантованному электромагнитному полю

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = c\sum_{\mathbf{k},\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}}V}\right)^{1/2}\left\{\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)*}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})\right\}, \quad (6)$$

c — скорость света, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$ — векторы поляризации фотонов, которые удовлетворяют условиям

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}\mathbf{k} = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{2} e_{\mathbf{k}\alpha}^{(\lambda)} e_{\mathbf{k}\beta}^{(\lambda)*} = \delta_{\alpha,\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}. \quad (7)$$

Гамильтониан свободного поля излучения $\hat{H}_{\text{ph}}$ определяется равенством

$$\hat{H}_{\text{ph}} = \sum_{\mathbf{k},\lambda}\hbar\omega_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|, \quad (8)$$

где операторы рождения $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+$ и уничтожения $\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}$ для фотонов с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ и поляризацией $\lambda = 1, 2$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\left[\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{c}_{\mathbf{k}',\lambda'}^+\right] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}.$$

В рамках статистической квантовой электродинамики вычисление термодинамического потенциала Гиббса (1) основано на использовании функциональных методов теории возмущений по взаимодействию заряженных частиц между собой и с квантованным электромагнитным полем, так что величина $\Omega(T, V, \{\gamma_a\})$ является функционалом от функций Грина для частиц и фотонов. При этом равновесная фотонная функция Грина однозначно определяется диэлектрической проницаемостью среды $\varepsilon^{\text{tr}}(k, \omega)$ [16].

В соответствии с (1)–(8) средняя энергия для рассматриваемой системы с гамильтонианом (3) равна

$$E = \langle\hat{H}\rangle = \langle\hat{H}_{\text{part}}\rangle + \langle\hat{H}_{\text{ph}}\rangle, \quad (9)$$

где угловые скобки обозначают усреднение с большим каноническим распределением Гиббса [15–17].

Тем самым величину $E_{\text{ph}} \equiv \langle\hat{H}_{\text{ph}}\rangle$ можно рассматривать как среднюю энергию равновесного излучения в материальной среде в отличие от средней энергии взаимодействующих заряженных частиц в квантованном электромагнитном поле, определяемой как $E_{\text{part}} \equiv \langle\hat{H}_{\text{part}}\rangle$.

Как и при рассмотрении идеального газа фотонов, описываемого формулой Планка, средняя энергия равновесного излучения в веществе может быть представлена в виде

$$E_{\text{ph}} = V\sum_\lambda\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}, \lambda) = V\int_0^\infty \varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\})d\omega, \quad (10)$$

где $f(\mathbf{k}, \lambda) \equiv \langle\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^+\hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}\rangle$ — точная равновесная функция распределения фотонов по импульсам $\hbar\mathbf{k}$ в материальной среде [8]. При этом спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\})$ зависит не только от частоты флуктуаций электромагнитного поля ω и температуры среды T, как это имеет место в формуле Планка для идеального газа фотонов, но и от характеристик вещества, а именно набора химических потенциалов заряженных частиц $\{\gamma_a\}$.

Используя методы квантовой теории поля [16] для рассматриваемой системы, можно показать [8,9], что для спектрального распределения энергии излучения $\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\})$ в материальной среде справедливо соотношение

$$\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\}) = \varepsilon_\omega^{(0)}(T) + \Delta\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\}), \quad (11)$$

где величина $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ определяется формулой Планка

$$\varepsilon_\omega^{(0)}(T) = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}, \quad (12)$$

а функция $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ — равенством

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\}) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \times \left(\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dk\, k^4 \frac{\operatorname{Im}\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)}{|\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)\omega^2 - c^2k^2|^2} - \frac{1}{2}\right). \quad (13)$$

Таким образом, в спектральном распределении энергии излучения в материальной среде имеется вклад $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$ (13), обусловленный наличием вещества (заряженных частиц). Этот вклад полностью определяется поперечной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ рассматриваемой системы. При этом соотношение (13) справедливо только для однородной и изотропной системы, линейные электромагнитные свойства которой однозначно определяются продольной $\varepsilon^l(k,\omega)$ и поперечной $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ диэлектрическими проницаемостями [18].

Другими словами, функция $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ определяет не только оптические свойства материальной среды [18], но и объемные равновесные характеристики излучения в ней (см., например, [19,20]).

Поперечная диэлектрическая проницаемость вырожденной электронной плазмы

Общее выражение для функции $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ для рассматриваемой системы имеет вид [16,21]

$$\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi}{\omega^2}\Pi^{\rm tr}(k,\omega),$$

$$\Pi^{\rm tr}(k,\omega) = \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega), \quad (14)$$

где $\omega_p = (\sum_a 4\pi z_a^2 e^2 n_a/m_a)^{1/2}$ — плазменная частота, n_a — плотность числа частиц сорта a. Тензорный поляризационный оператор $\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ представляет собой неприводимую по одной „линии“ (как кулоновского взаимодействия заряженных частиц, так и фотонной функции Грина) часть запаздывающей тензорной функция Грина „ток–ток“ $\Phi^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$, которая равна

$$\Phi^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \int d^3r \exp(-i\mathbf{kr})\int_0^\infty dt \exp(i\omega t)\Phi^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r},t), \quad (15)$$

$$\Phi^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,t) = -\frac{i}{\hbar}\langle[\hat{J}_\alpha(\mathbf{r}_1,t),\hat{J}_\beta(\mathbf{r}_2,0)]\rangle. \quad (16)$$

Здесь $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r},t)$ — векторный оператор плотности тока заряженных частиц в представлении Гейзенберга,

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{J}}^{(d)}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{J}}^{(p)}(\mathbf{r}) - \sum_a \frac{z_a^2e^2}{m_ac}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r})\hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}), \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{(d)}(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{i\hbar z_a e}{2m_a}\Big\{\big(\nabla\hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\big)\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}) - \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\big(\nabla\hat{\Psi}_a(\mathbf{r})\big)\Big\}, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^{(p)}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\sum_a \hat{\Psi}_a^+(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\mu}}_a\hat{\Psi}_a(\mathbf{r}). \quad (19)$$

Как следует из соотношений (14)–(19) в общем случае вычисление поперечной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ рассматриваемой системы является весьма сложной задачей. Это в еще большей степени относится к вычислению интеграла в (13) при определении величины $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\gamma_a\})$.

Чтобы упростить рассмотрение, учтем, что постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137$, которая характеризует силу взаимодействия между заряженными частицами и фотонами, является малым параметром. Это обстоятельство является основой для использования в квантовой статистической электродинамике теории возмущений (диаграммной техники), связанной с представлением средних значений физических величин в виде функциональных рядов по степеням α [16].

Тем самым, согласно существующим представлениям при вычислении поперечной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ в широкой области термодинамических параметров, можно ограничиться рассмотрением „нулевого“ приближения по параметру α, т.е. рассматривать функцию $\varepsilon^{\rm tr}(k,\omega)$ (14)–(19) для системы заряженных частиц, пренебрегая их взаимодействием с фотонами.

В этом случае тензорный поляризационный оператор $\Pi_{\alpha\beta}(k,\omega)$ можно представить в виде

$$\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) = \Pi^{(dd)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega) + \Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega), \quad (20)$$

где величина $\Pi^{(dd)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ отвечает диамагнитной части, а величина $\Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ — парамагнитной части поляризационного оператора $\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$. Тензорные функции $\Pi^{(dd)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ и $\Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ определяются аналогично соотношениям (16), (17) с точностью до замены оператора $\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r})$ (18) на операторы $\hat{\mathbf{J}}^{(d)}(\mathbf{r})$ (19) и $\hat{\mathbf{J}}^{(p)}(\mathbf{r})$ (20) соответственно. При этом обе функции $\Pi^{(dd)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ и $\Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ являются неприводимыми по одной линии кулоновского взаимодействия заряженных частиц в „k-канале“. Кроме того, функция $\Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ также является неприводимой по двум линиям кулоновского взаимодействия [21].

Это означает, что приближение идеального газа при вычислении тензорных функций $\Pi^{(dd)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ и $\Pi^{(pp)}_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$ соответствует системе заряженных частиц, которая характеризуется интегральной малостью кулоновского взаимодействия:

$$z_a^2e^2/\langle r_a\rangle\langle k_a\rangle \ll 1, \quad (21)$$

где $\langle r_a\rangle = (4\pi n_a/3)^{-1/3}$ — среднее расстояние между частицами, $\langle k_a\rangle$ — средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу сорта a [18]. К таким системам относятся как газовая полностью ионизованная плазма [22], так и электронная плазма в жидких металлах [23].

Согласно (15)–(21), в приближении идеального газа (индекс (0)) величину $\Pi_0^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$ (15) можно представить в виде [21]

$$\Pi_0^{\mathrm{tr}}(k,\omega)=\sum_a\left\{\Phi_a^{(dd)}(k,\omega)+\Phi_a^{(pp)}(k,\omega)\right\},\tag{22}$$

$$\Phi_a^{(dd)}(k,\omega)=\frac{1}{2}\,(2s_a+1)\,\frac{z_a^2e^2\hbar^2}{m_a^2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(p^2-\frac{(\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2}{k^2}\right)$$
$$\times\frac{f_a(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)-f_a(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega+\epsilon_a(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)-\epsilon_a(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)+i0},\tag{23}$$

$$\Phi_a^{(pp)}(k,\omega)=k^2\,\frac{(2s_a+1)s_a(s_a+1)}{3}\left(\frac{\mu_a c}{s_a}\right)^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$
$$\times\frac{f_a(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)-f_a(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)}{\hbar\omega+\epsilon_a(\mathbf{p}-\mathbf{k}/2)-\epsilon_a(\mathbf{p}+\mathbf{k}/2)+i0}.\tag{24}$$

Здесь $\epsilon_a(p)=\hbar^2p^2/2m_a$ — энергия частицы, $f_a(p)$ — функция распределения по импульсам для частиц сорта a, которая определяется распределениями Ферми–Дирака или Бозе–Эйнштейна в зависимости от спина частицы s_a. Величина химического потенциала γ_a при заданной температуре связана с плотностью числа частиц n_a равенством

$$n_a=(2s_a+1)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,f_a(p),\tag{25}$$

так что выполняется условие квазинейтральности

$$\sum_a z_a e n_a=0.\tag{26}$$

При рассмотрении жидких металлов условие (21) может быть принято только для электронной подсистемы, так как взаимодействие между ионами в жидких металлах является сильным. Однако благодаря большой разнице в массах электронов и ионов для описания электромагнитных свойств жидких металлов можно ограничиться рассмотрением только электронной плазмы, которая понимается как система электронов в компенсирующем положительном фоне ионов (см. (26)) [23].

Кроме того, электронная плазма в жидких металлах считается полностью вырожденной с силу условия

$$T\ll\epsilon_{\mathrm{F}},\tag{27}$$

где $\epsilon_F=\hbar^2k_{\mathrm{F}}^2/2m_e$ — энергия Ферми, $k_{\mathrm{F}}=(3\pi^2n_e)^{1/3}$ — волновой вектор Ферми для системы электронов.

По этой причине при рассмотрении различных свойств жидких металлов в подавляющем большинстве случаев для описания электронной плазмы используется формальный предел $T\to0$ $(T=+0)$, понимаемый в смысле справедливости условия (27) [23].

В рамках приближения $T=+0$ функция распределения Ферми–Дирака для электронов имеет вид

$$f(p<k_{\mathrm{F}})=1,\;\; f(p=k_{\mathrm{F}})=1/2,\;\; f(p>k_{\mathrm{F}})=0,\tag{28}$$

что позволяет получить явные аналитические выражения для функций $\Phi_e^{(dd)}(k,\omega)$ (23) и $\Phi_e^{(pp)}(k,\omega)$ (24) (см. подробнее [24]):

$$\mathrm{Re}\,\Phi_e^{(dd)}(k,\omega)=\frac{3\omega_e^2}{32\pi}\left\{3\left(\frac{\omega}{k\nu_{\mathrm{F}}}\right)^2+\left(\frac{k}{2k_{\mathrm{F}}}\right)^2-\frac{5}{3}\right.$$
$$+\frac{k_{\mathrm{F}}}{2k}\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\right]^2\ln\left[\frac{k_{\mathrm{F}}+k\Delta^{(-)}(k,\omega)}{k_{\mathrm{F}}-k\Delta^{(-)}(k,\omega)}\right]$$
$$-\frac{k_{\mathrm{F}}}{2k}\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right]^2$$
$$\left.\times\ln\left[\frac{k_{\mathrm{F}}+k\Delta^{(+)}(k,\omega)}{k_{\mathrm{F}}-k\Delta^{(+)}(k,\omega)}\right]\right\},\tag{29}$$

$$\mathrm{Im}\,\Phi_e^{(dd)}(k,\omega)=0,\quad |\Delta^{(-)}|\geq k_{\mathrm{F}}/k;$$
$$=-\frac{3\omega_e^2}{64}\left(\frac{k_{\mathrm{F}}}{k}\right)\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2(\Delta^{(-)})^2\right]^2,$$
$$|\Delta^{(-)}|\leq k_{\mathrm{F}}/k\leq\Delta^{(+)},$$
$$-\frac{3\omega_e^2}{16}\left(\frac{\omega}{k\nu_{\mathrm{F}}}\right)\left[1-\left(\frac{\omega}{k\nu_{\mathrm{F}}}\right)^2-\left(\frac{k}{2k_{\mathrm{F}}}\right)^2\right]^2,\;\;\Delta^{(+)}\leq k_{\mathrm{F}}/k,\tag{30}$$

$$\mathrm{Re}\,\Phi_e^{(pp)}(k,\omega)=-\frac{3\omega_e^2}{32\pi}\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2\left\{1-\frac{k_{\mathrm{F}}}{2k}\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2\right.\right.$$
$$\times\left(\Delta^{(-)}(k,\omega)\right)^2\ln\left[\frac{k_{\mathrm{F}}+k\Delta^{(-)}(k,\omega)}{k_{\mathrm{F}}-k\Delta^{(-)}(k,\omega)}\right]$$
$$\left.+\frac{k_{\mathrm{F}}}{2k}\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2\left(\Delta^{(+)}(k,\omega)\right)^2\right]\ln\left[\frac{k_{\mathrm{F}}+k\Delta^{(+)}(k,\omega)}{k_{\mathrm{F}}-k\Delta^{(+)}(k,\omega)}\right]\right\},\tag{31}$$

$$\mathrm{Im}\,\Phi_e^{(pp)}(k,\omega)=0,\quad |\Delta^{(-)}|\geq k_{\mathrm{F}}/k;$$
$$=-\frac{3\omega_e^2}{64}\left(\frac{k_{\mathrm{F}}}{k}\right)\left[1-\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)^2(\Delta^{(-)})^2\right],$$
$$|\Delta^{(-)}|\leq k_{\mathrm{F}}/k\leq\Delta^{(+)},$$
$$-\frac{3\omega_p^2}{64}\left(\frac{k}{k_{\mathrm{F}}}\right)\left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right),\quad\Delta^{(+)}\leq k_{\mathrm{F}}/k.\tag{32}$$

Здесь $v_{\mathrm{F}}=\hbar k_{\mathrm{F}}/m_e$ — скорость Ферми, $\omega_e=(4\pi n_e e^2/m_e)^{1/2}$ — электронная плазменная частота,

$$\Delta^{(-/+)}(k,\omega)=\left(\frac{m_e\omega}{\hbar k^2}\right)\mp\left(\frac{1}{2}\right).\tag{33}$$

При выводе (29)–(33) учтено, что собственный магнитный момент электрона, который характеризуется спином $s_e=1/2$, равен $\mu_e=-\mu_{\mathrm{B}}$, где $\mu_{\mathrm{B}}=|e|\hbar/2m_ec$ — магнетон Бора.

При этом следует иметь в виду, что даже при выполнении условия (27) поперечная диэлектрическая проницаемость вырожденной электронной плазмы $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k,\omega)$

зависит также от двух независимых безразмерных параметров β_k и β_ω:

$$\beta_k = \epsilon_k/T = (k\Lambda_e)^2/4\pi, \quad \beta_\omega = \hbar\omega/T, \tag{34}$$

где $\Lambda_e = (2\pi\hbar^2/m_e T)^{1/2}$ — тепловая длина волны де Бройля для электронов. Это означает, что приближение $T = +0$ не может быть использовано для описания функции $\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)$ в области малых волновых векторов $\beta_k \ll 1$ и низких частот $\beta_\omega \ll 1$. Другими словами, соотношения (29)–(33) справедливы, когда

$$\beta_k \gg 1, \quad \beta_\omega \gg 1. \tag{35}$$

Это означает, что необходимо оценить возможность использования соотношений (29)–(33) для вычисления спектрального распределения энергии равновесного излучения ε_ω (11)–(13) в вырожденной электронной плазме. Непосредственно из (22)–(24) нетрудно убедиться, что вклад области малых волновых векторов $\beta_k \ll 1$ в величину $\Delta\varepsilon_\omega$ (13) чрезвычайно мал при условии

$$\hbar\omega/\epsilon_{\mathrm{F}} \gg 1. \tag{36}$$

С учетом (27) условие (36) удовлетворяет второму неравенству в (35).

Таким образом, представленные выше результаты для поперечной диэлектрической проницаемости могут быть использованы для анализа асимптотического поведения спектрального распределения энергии равновесного излучения в вырожденной электронной плазме в области высоких частот.

Высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в вырожденной электронной плазме

Прежде всего отметим, что в области высоких частот (36) с учетом (27), (35) вклад величины $\varepsilon^{(0)}_\omega(T)$, определяемой формулой Планка (12), в спектральное распределение энергии ε_ω (11) экспоненциально мал.

Кроме того, при рассмотрении области высоких частот (36), понимаемых для вырожденной электронной плазмы как предел $\omega \to \infty$, соотношение (13) для функции $\Delta\varepsilon_\omega$ можно существенно упростить. Дело в том, что, согласно (14), (22)–(24), (29)–(33), при фиксированном значении волнового вектора k справедливы равенства

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Re}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = 1, \quad \lim_{\omega\to\infty} \mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) = 0. \tag{37}$$

Далее рассмотрим функцию

$$F(\omega) = \frac{c^5}{\pi\omega^5}\int_0^\infty dk\, k^4 \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)}{|\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) - c^2k^2/\omega^2|^2}. \tag{38}$$

В пределе $\omega \to \infty$ эта функция имеет вид

$$F(\omega)\big|_{\omega\to\infty} = F(\infty) + \Delta F(\omega), \quad F(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} F(\omega),$$
$$\lim_{\omega\to\infty} \Delta F(\omega) = 0. \tag{39}$$

Чтобы вычислить величину $F(\infty)$ (40), необходимо учесть, что, согласно (37)

$$\left(\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)}{\big(\mathrm{Re}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega) - c^2k^2/\omega^2\big)^2 + \big(\mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)\big)^2}\right)\Bigg|_{\omega\to\infty}$$
$$\to \pi\delta(1 - c^2k^2/\omega^2), \tag{40}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Следовательно,

$$F(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} F(\omega) = 1/2. \tag{41}$$

В свою очередь, для функции $\Delta F(\omega)$ (39), согласно (37), в пределе $\omega \to \infty$ можно записать

$$\Delta F(\omega)\big|_{\omega\to\infty} = \frac{c^3}{\pi\omega^5}\int_0^\infty dk\, k^4\, \mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)\big|_{\omega\to\infty}. \tag{42}$$

Тогда, подставляя (38)–(42) в (13), находим

$$\Delta\varepsilon_\omega(T, \{\gamma_a\})\big|_{\omega\to\infty} \to \frac{\hbar c^2}{\pi^3\omega^2}\int_0^\infty dk\, k^4\, \mathrm{Im}\,\varepsilon^{\mathrm{tr}}(k, \omega)\big|_{\omega\to\infty}. \tag{43}$$

Таким образом, появляется возможность установить степень влияния вырожденной электронной плазмы на спектральное распределение энергии равновесного излучения в области высоких частот, для которой с учетом (14), (20), (27), (30), (32) имеем

$$\Delta\varepsilon_\omega(\epsilon_{\mathrm{F}})\big|_{\omega\to\infty} \to \Delta\varepsilon^{(dd)}_\omega + \Delta\varepsilon^{(pp)}_\omega, \tag{44}$$

$$\Delta\varepsilon^{(dd)}_\omega = \frac{3\hbar c^2\omega_e^2 k_{\mathrm{F}}^5}{16\pi^2\omega^4}\, Y^{(dd)}(W)\big|_{W\to\infty}, \tag{45}$$

$$\Delta\varepsilon^{(pp)}_\omega = \frac{3\hbar c^2\omega_e^2 k_{\mathrm{F}}^5}{16\pi^2\omega^4}\, Y^{(pp)}(W)\big|_{W\to\infty}, \tag{46}$$

$$Y^{(dd)}(W) = \int_{\sqrt{W+1}-1}^{\sqrt{W+1}+1} dx\, x^3\left[1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{W}{x^2} - 1\right)^2\right]^2, \tag{47}$$

$$Y^{(pp)}(W) = \int_{\sqrt{W+1}-1}^{\sqrt{W+1}+1} dx\, x^5\left[1 - \frac{x^2}{4}\left(\frac{W}{x^2} - 1\right)^2\right]^2, \tag{48}$$

где $W = \hbar\omega/\epsilon_{\mathrm{F}}$. Чтобы упростить вычисление асимптотического поведения функций $Y^{(dd)}(W)$ и $Y^{(pp)}(W)$ в пределе $W \to \infty$, произведем в интегралах (47) и (48) сначала замену переменных $x = y\sqrt{W+1}$, а затем $z = (y - 1)$. В результате получаем

$$Y^{(dd)}(W) = (W+1)^2 \int_{-(W+1)^{-1/2}}^{(W+1)^{-1/2}} dx\, \psi^{(dd)}(z, W), \tag{49}$$

$$\psi^{(dd)}(z, W) = (z+1)^3 \left[1 - (W+1)\frac{(z+1)^2}{4} \times \left(\frac{W}{(W+1)(z+1)^2} - 1\right)^2\right]^2,$$

$$Y^{(pp)}(W) = (W+1)^3 \int\limits_{-(W+1)^{-1/2}}^{(W+1)^{-1/2}} dz\, \psi^{(pp)}(z, W),$$

$$\psi^{(pp)}(z, W) = (z+1)^5 \left[1 - (W+1)\frac{(z+1)^2}{4} \times \left(\frac{W}{(W+1)(z+1)^2} - 1\right)^2\right], \qquad (50)$$

Следовательно,

$$Y^{(dd)}(W)\big|_{W\to\infty} = \left(\frac{2(W+1)^2}{\sqrt{W+1}} \lim_{Z\to 0} \psi^{(dd)}(z, W)\right)\Big|_{W\to\infty} \to 2W^{3/2,} \qquad (51)$$

$$Y^{(pp)}(W)\big|_{W\to\infty} = \left(\frac{2(W+1)^3}{\sqrt{W+1}} \lim_{Z\to 0} \psi^{(pp)}(z, W)\right)\Big|_{W\to\infty} \to 2W^{5/2}. \qquad (52)$$

Подставляя (51), (52) соответственно в (45), (46), находим

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(dd)} = \frac{6m_e c^2 \omega_e^2}{\pi^2 v_{\mathrm F}^3}\left(\frac{\epsilon_{\mathrm F}}{\hbar\omega}\right)^{5/2},$$

$$\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)} = \frac{6m_e c^2 \omega_e^2}{\pi^2 v_{\mathrm F}^3}\left(\frac{\epsilon_{\mathrm F}}{\hbar\omega}\right)^{3/2}. \qquad (53)$$

Таким образом, в области высоких частот асимптотическое поведение спектрального распределения энергии равновесного излучения $\Delta\varepsilon_\omega(\epsilon_{\mathrm F})\big|_{\omega\to\infty}$ (44) в вырожденной электронной плазме полностью определяется наличием вещества (электронов), причем наиболее существенным является вклад „парамагнитной“ функции $\Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}$ (53):

$$\Delta\varepsilon_\omega(\epsilon_{\mathrm F})\big|_{\omega\to\infty} \to \Delta\varepsilon_\omega^{(pp)}. \qquad (54)$$

Это означает, что для корректного описания характеристик равновесного излучения в материальной среде необходимо последовательно учитывать собственный магнитный момент частиц вещества. Аналогичные результаты имеют место и при рассмотрении газовой полностью ионизованной плазмы (см. подробнее [9,25]).

В заключение отметим, что в применении к жидким металлам полученные выше результаты имеют место только в отношении так называемых „коллективизированных“ электронов. Для описания электронных состояний, локализованных около ядер, требуется учет эффектов сильного взаимодействия, что выходит за рамки данной работы.

Автор благодарен А.А. Рухадзе и С.А. Тригеру за полезные обсуждения. Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-02-00573).

Список литературы

[1] *Planck M.* // Ann. der Phys. 1901. Vol. 309. N 3. P. 553–563.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
[3] *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. 308 с.
[4] *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* // УФН. 2007. Т. 177. Вып. 9. С. 921–951.
[5] *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* // УФН. 2009. Т. 179. Вып. 5. С. 449–485.
[6] *Bobrov V.B.* // J. Phys.: Cond. Matt. 1990. Vol. 2. N 31. P. 6695–6698.
[7] *Бобров В.Б.* // ТМФ. 1991. Т. 88. Вып. 1. С. 141–145.
[8] *Бобров В.Б., Соколов И.М., Тригер С.А.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. Вып. 5. С. 326–329.
[9] *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2016. Т. 187. Вып. 1. С. 104–113.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 524 с.
[11] *Trigger S.A.* // Phys. Lett. A. 2007. Vol. 370. N 5–6. P. 365–369.
[12] *Khomkin A.L., Shumikhin A.S., Trigger S.A.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2015. Vol. 653. P. 012024 (1–5).
[13] *Агранович В.М., Гинзбург В.Л.* Электродинамика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М.: Наука, 1964. 376 с.
[14] *Бараш Ю.С., Гинзбург В.Л.* // УФН. 1975. Т. 116. Вып. 1. С. 5–40.
[15] *Ахиезер А.И., Пелетминский С.В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 368 с.
[16] *Фрадкин Е.С.* // Труды ФИАН. 1965. Т. 29. С. 7–138.
[17] *Бобров В.Б., Тригер С.А., Петров О.Ф.* // ТВТ. 2017. Т. 55. Вып. 1. С. 154–157.
[18] *Силин В.П., Рухадзе А.А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М.: Либроком, 2013. 248 с.
[19] *Агранат М.Б., Ашитков С.И., Овчинников А.В., Ситников Д.С., Юркевич А.А., Чефонов О.В., Перельман Л.Т., Анисимов С.И., Фортов В.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2015. Т. 101. Вып. 9. С. 671–676.
[20] *Дьячков Л.Г.* // ТВТ. 2016. Т. 54. Вып. 1. С. 7–12.
[21] *Bobrov V.B.* // Physica A. 1992. Vol. 187. N 3–4. P. 603–624.
[22] *Крефт В.-Д., Кремп Д., Эбелинг В., Репке Г.* Квантовая статистика систем заряженных частиц. М.: Мир, 1988. 408 с.
[23] *Бобров В.Б.* // ТВТ. 2016. Т. 54. Вып. 3. С. 475–478.
[24] *Бобров В.Б.* // ТВТ. 2017. Т. 55. Вып. 4. С. 489–492.
[25] *Бобров В.Б., Тригер С.А.* // ТМФ. 2017. Т. 192. Вып. 3. С. 523–535.