

03

Аномальный отклик стратифицированной жидкости на механическое воздействие, обусловленный термодиффузией

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,
249038 Обнинск, Россия
Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН,
119017 Москва, Россия
e-mail: lev.ingel@gmail.com

(Поступило в Редакцию 24 мая 2017 г.)

В линейном приближении аналитически исследованы стационарные возмущения, вносимые в стратифицированную по температуре жидкую бинарную смесь (например, соленую воду) неоднородными касательными напряжениями на ее поверхности. Показано, что эффект термодиффузии может приводить к резкому увеличению глубины проникновения термических возмущений в среду, несмотря на устойчивую фоновую стратификацию плотности.

DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45474.2350

Введение

Если к поверхности жидкости приложены неоднородные механические касательные напряжения, то в приповерхностном слое возникают горизонтально-неоднородные течения; из соображений неразрывности это означает возникновение вертикальных движений. В вертикально стратифицированной по температуре среде при этом возникают термические неоднородности. Подобные задачи имеют важные приложения, в частности в геофизике, например, задача расчета отклика верхнего слоя водоемов на неоднородные ветровые воздействия [1]. Если стратификация плотности достаточно устойчива, то глубина проникновения упомянутых неоднородностей в среду относительно мала по сравнению с характерными горизонтальными масштабами неоднородных напряжений L . В простейшем случае гармонических по горизонтали неоднородностей, когда $L = 2\pi/k$, где k — волновое число, характерный вертикальный масштаб возмущений составляет [1] $h \sim (\nu k/k^2 \alpha g \gamma_T)^{1/6} = (\nu k/N_T^2 k^2)^{1/6}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, g — ускорение свободного падения, α — термический коэффициент расширения среды, γ_T — фоновый вертикальный градиент температуры, $N_T = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}$ — частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести). В распространенных ситуациях значения аналога числа Рэлея $N_T^2/\nu k k^4$ велики, так что $h \ll L$, т. е. речь идет о возмущениях, проникающих лишь в весьма тонкий верхний слой среды.

В работах [2,3] было обращено внимание на то, что в двухкомпонентных средах (плотность которых зависит как от температуры, так и от концентрации примеси, например, в соленой морской воде) ситуация может радикально меняться — глубина проникновения термических возмущений может возрастать на порядки и достигать порядка горизонтального масштаба неод-

нородностей L . Но необходимое условие этого нетривиального эффекта — наличие фоновой стратификации концентрации примеси, т. е. достаточно заметного вклада примеси в фоновую стратификацию плотности.

В упомянутых работах использовано распространенное приближение, в котором не учитывается термодиффузия (эффект Соре, см., например, [4–6]) — влияние температурных неоднородностей на перенос примеси. В настоящей работе показано, что при учете даже относительно слабой термодиффузии, присущей, например, соленой морской воде, глубина проникновения термических возмущений в среду может резко возрасти и при отсутствии фоновой стратификации примеси.

Постановка задачи

Геометрия задачи схематически изображена на рис. 1. Рассматривается полуограниченный слой среды $z \leq 0$ (ось z направлена вертикально вверх), устойчиво стратифицированный по температуре. Фоновая стратификация концентрации примеси (для определенности будем говорить о соленой воде) в отличие от [2,3] отсутствует.

Линеаризованная стационарная система уравнений для возмущений в приближении Буссинеска с учетом

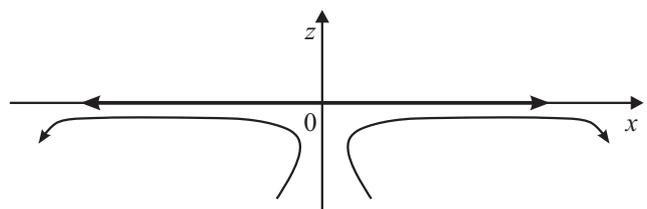


Рис. 1. Геометрия задачи. Стрелками схематически обозначены неоднородные касательные напряжения на горизонтальной поверхности жидкости и линии тока возникающих течений.

термодиффузии, имеет вид [2-6]

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + g(\alpha T - \beta s) \mathbf{e}_z, \quad \nabla \mathbf{v} = 0,$$

$$\gamma_T \mathbf{v} \mathbf{e}_z = \kappa \nabla^2 T, \quad 0 = \chi \nabla^2 s + \chi_T \nabla^2 T. \quad (1)$$

Здесь T и s — возмущения температуры и концентрации примеси (солености, промилле) соответственно, \mathbf{v} — вектор возмущения поля скорости, p — возмущение давления, \mathbf{e}_z — единичный вектор в направлении вертикальной оси z , ρ_0 — отсчетная плотность среды, χ — коэффициент диффузии примеси, χ_T — соответствующий коэффициент, относящийся к термодиффузии, β — коэффициент солёностного сжатия среды.

Поясним последнее из уравнений (1) (остальные достаточно традиционны). В более общем случае стационарное уравнение переноса примеси имеет вид [5]

$$0 = \nabla \left[\chi \nabla c + \chi_{sT} c \left(1 - \frac{c}{\rho} \right) \nabla T \right]. \quad (2)$$

Здесь c — концентрация примеси (kg/m^3), ρ — плотность среды, T — температура, s_T — коэффициент Cope ($^\circ\text{C}$)⁻¹ [4,5]. Ограничиваемся рассмотрением возмущений, проникающих в среду не слишком глубоко — рассматриваем не слишком большие значения горизонтальных масштабов неоднородностей L (в толстых слоях стационарное решение устанавливается очень долго ввиду медленности диффузии), когда можно пренебречь вариациями величин χ , s_T и ρ (так что последнюю заменяем на ρ_0). В этом случае уравнение (2) можно переписать в виде

$$\chi \nabla^2 \mu + \chi_{sT} \nabla [\mu(1 - \mu)] \nabla T + \chi_{sT} \mu(1 - \mu) \nabla^2 T = 0, \quad (3)$$

где введено обозначение $\mu = c/\rho_0$ — массовая доля примеси. Концентрация примеси и температура складываются из фоновых значений и возмущений. При линеаризации по возмущениям первое слагаемое имеет вид $\chi \nabla^2 \mu'$; порядок второго слагаемого — $\chi_{sT} \gamma_T \nabla \mu'$ (здесь штрихом обозначены возмущения). Отношение абсолютной величины второго слагаемого к первому, как видно из масштабного анализа, порядка $l s_T \gamma_T$, где l — наименьший из рассматриваемых пространственных масштабов возмущений. Ниже будут рассматриваться значения параметров, при которых упомянутое отношение много меньше единицы. Поэтому пренебрегаем вторым слагаемым и приходим к последнему уравнению (1), в котором

$$\chi_T = 10^3 \chi_{sT} \bar{\mu} (1 - \bar{\mu}), \quad (4)$$

где чертой обозначено фоновое значение, а множитель 10^3 связан с тем, что возмущение концентрации примеси s здесь измеряется в промилле.

Предполагаем, что на поверхности жидкости $z = 0$ заданы стационарные касательные напряжения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x (ограничиваемся двумерной задачей на плоскости (x, z)):

$$\rho_0 \nu \frac{\partial u}{\partial z} = E \sin kx \quad \text{при } z = 0, \quad (5)$$

где E — амплитуда напряжения, u — горизонтальная составляющая скорости, k — волновое число. Пренебрегаем деформациями поверхности, так что вертикальная составляющая скорости w на поверхности $z = 0$ обращается в нуль. Для отклонений температуры и концентрации примеси на поверхности предполагается выполнение краевых условий третьего рода:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{T}{h_T}, \quad \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{s}{h_s}, \quad \text{при } z = 0, \quad (6)$$

где неотрицательные величины h_T, h_s — заданные масштабы длины. Предполагаем, что вдали от поверхности (при $z \rightarrow -\infty$) все возмущения затухают.

Решение и его анализ

Исключая T из последних двух уравнений (1), получаем уравнение

$$w \gamma_s = \chi \nabla^2 s, \quad (7)$$

где введено обозначение

$$\gamma_s \equiv -\frac{\gamma_T \chi_T}{\kappa} = -10^3 \frac{\chi}{\kappa} \gamma_T s_T \bar{\mu} (1 - \bar{\mu}). \quad (8)$$

Уравнение (7) формально совпадает с рассматриваемым в [2,3] линеаризованным уравнением переноса примеси, где не учитывается термодиффузия, но предполагается наличие фоновой вертикальной стратификации примеси (фоновый вертикальный градиент концентрации примеси в этих работах обозначался через γ_s , ppm/m). Иными словами, задача, в которой последнее уравнение (1) можно теперь заменить на (7), свелась к ранее исследованной. Поэтому достаточно лишь вкратце напомнить решение.

Ищем для возмущений стационарные решения, гармонически зависящие от горизонтальной координаты x :

$$u(x, z) = U(z) \sin(kx), \quad w(x, z) = W(z) \cos(kx),$$

$$T(x, z) = \theta(z) \cos(kx), \quad s(x, z) = \vartheta(z) \cos(kx)$$

и т. д. Исключая из системы уравнений все неизвестные, кроме w , нетрудно получить уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right)^3 W = k^6 \mathbf{R} W, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{1}{k^4 \nu} \left(\frac{N_T^2}{\kappa} + \frac{N_s^2}{\chi} \right) = \mathbf{R}_T (1 - \xi) = \mathbf{R}_T + \frac{\mathbf{R}_s}{\delta}. \quad (10)$$

Здесь величины $N_T^2 = \alpha g \gamma_T$ и $N_s^2 = -\beta g \gamma_s$ имеют смысл квадратов частот плавучести, обусловленных стратификациями температуры и примеси соответственно; $R_T = N_T^2 / \nu k k^4$, $R_s = N_s^2 / \nu k k^4$ — аналоги чисел Рэлея,

$$\xi \equiv \frac{\kappa \beta \gamma_s}{\chi \alpha \gamma_T} = -\frac{\kappa}{\chi} \frac{N_s^2}{N_T^2} = -\frac{1}{\delta} \frac{N_s^2}{N_T^2}, \quad \delta = \frac{\chi}{\kappa}. \quad (11)$$

Безразмерный параметр R имеет смысл некоторого обобщенного числа Рэлея. Для рассматриваемой области допустимых значений γ_T и γ_s (предполагается гидростатическая устойчивость среды) он неотрицателен.

Ищем решение уравнения (9) в виде линейной комбинации экспонент $\exp(q_i k z)$, где q_i — корни характеристического уравнения

$$(q^2 - 1)^3 = R. \quad (12)$$

Из этих шести экспонент лишь три затухают при $z \rightarrow -\infty$; коэффициенты при остальных следует положить равными нулю. Поэтому решение для вертикальной скорости можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{i=1}^3 C_i \exp(q_i k z), \quad (13)$$

$$q_1 = (1 + R^{1/3})^{1/2}, \quad q_{2,3} = \left[1 + R^{1/3} \exp\left(\pm \frac{2}{3} \pi i\right) \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Здесь C_i — постоянные интегрирования, $\text{Re } q_i > 0$. Ниже ограничимся анализом решения для случая $R \gg 1$ (точнее, предполагается выполнение более сильного неравенства $R^{1/6} \gg 1$). Это соответствует ситуациям, когда устойчивая стратификация плотности достаточно существенна и в большой степени определяет структуру возникающих в среде возмущений. В таких случаях можно пренебречь единицей по сравнению с другими слагаемыми в выражениях (12), (14)

$$q_1 \approx R^{1/6}, \quad q_{2,3} \approx R^{1/6} \exp\left(\pm \frac{1}{3} \pi i\right),$$

и решение заметно упрощается. В показателях экспонент в (13) (а также в выражениях для u и возмущений давления и плавучести) присутствует большой множитель $R^{1/6}$, так что возмущения упомянутых величин быстро затухают с глубиной по сравнению с их характерным горизонтальным масштабом $L = 2\pi/k$. Иными словами, аспектное отношение (отношение характерного горизонтального масштаба к вертикальному) у этих возмущений много больше единицы.

В выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси по сравнению с (13), как легко видеть, вообще говоря, имеется и четвертая экспонента $\exp(kz)$. Постоянные интегрирования (коэффициенты при экспонентах) находятся из краевых условий. В аналитическое решение, приведенное в [2], вкрасиль

отдельные опечатки; хотя они и не повлияли на основные результаты [2], имеет смысл привести здесь исправленное решение (за небольшими исключениями сохраняем те же обозначения, что и в [2]):

$$u = -R^{1/6} e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} - 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \cos \sqrt{3} Kz - \frac{\tau}{2} \sin \sqrt{3} Kz \right] \sin(kx),$$

$$w = e^{Kz} \left[C_1 (e^{Kz} - \cos \sqrt{3} Kz) - (\sqrt{3} C_1 + \tau) \sin \sqrt{3} Kz \right] \times \cos(kx),$$

$$T = \frac{\gamma_T}{\kappa k^2 R^{1/3}} \left\{ C_T e^{Kz} + e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} + 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \times \cos \sqrt{3} Kz + \frac{\tau}{2} \sin \sqrt{3} Kz \right] \right\} \cos(kx),$$

$$s = \frac{\gamma_s}{\chi k^2 R^{1/3}} \left\{ \xi^{-1} C_T e^{Kz} + e^{Kz} \left[C_1 e^{Kz} + 2 \left(C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \right) \times \cos \sqrt{3} Kz + \frac{\tau}{2} \sin \sqrt{3} Kz \right] \right\} \cos(kx)$$

(в [2] в последних двух формулах вместо последнего косинуса был набран знак синуса). Здесь

$$K = k R^{1/6} / 2, \quad \tau = Ek / 2 \sqrt{3} K^2 \nu \rho_0 = 2E / \sqrt{3} k \nu \rho_0 R^{1/3},$$

$$C_T = - \left(\frac{h_T}{h_s} - 1 \right) \Phi,$$

$$C_1 = - \left[(1 + kh_T) \left(1 + \frac{1}{2Kh_s} \right) - \xi^{-1} \frac{h_T}{h_s} (1 + kh_s) \right] \times \left(1 + \frac{1}{2Kh_T} \right) \Phi,$$

$$C_1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \tau = \frac{1}{4Kh_s} [1 + kh_T - \xi^{-1} (1 + kh_s)] \Phi,$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{3}}{4} \tau \left[(1 + kh_T) \left(1 + \frac{3}{4Kh_s} \right) - \xi^{-1} \frac{h_T}{h_s} (1 + kh_s) \left(1 + \frac{3}{4Kh_T} \right) \right]^{-1}. \quad (15)$$

В [2] в последней формуле имеются две опечатки.

Решение зависит от ряда безразмерных параметров, в частности, R , ξ , δ , $b_T \equiv kh_T$, $b_s \equiv kh_s$ (два последних обратны соответствующим аналогам числа Био [7]). Зависимость от глубины решения для составляющих скорости (а также возмущений давления и плотности

среды) представляет собой линейную комбинацию трех функций

$$\exp(2Kz), \exp(Kz) \cos(\sqrt{3}Kz), \exp(Kz) \sin(\sqrt{3}Kz), \tag{16}$$

где определенная выше величина $K \gg L^{-1}$. Экспоненты в них убывают с глубиной на масштабах h порядка $L/R^{1/6}$. В рассматриваемом приближении $R \gg 1$ это много меньше характерного горизонтального масштаба возмущений $L \equiv 2\pi/k$. Длина волны синусоид в упомянутых функциях (16) — того же порядка h . Этот результат аналогичен известным решениям для обычных однокомпонентных сред [1], в которых возмущения представляют собой систему циркуляционных ячеек с вертикальным и горизонтальным масштабами h и L соответственно, интенсивность которых экспоненциально затухает с глубиной с тем же характерным масштабом порядка h .

Итак, возникающие у поверхности циркуляционные ячейки, поля возмущений скорости, давления и плотности проникают в устойчиво стратифицированную среду очень неглубоко по сравнению с их горизонтальным масштабом L . Но в выражениях для возмущений температуры и концентрации примеси, вообще говоря, присутствует еще одно слагаемое, пропорциональное медленно убывающей экспоненте $\exp(kz)$. Это не имеет аналогов в случае однокомпонентной среды и принципиально меняет свойства решений для возникающих температурных возмущений.

Благодаря эффекту термодиффузии термические возмущения (как и возникающие возмущения концентрации примеси) могут проникать в двухкомпонентную устойчиво стратифицированную среду гораздо глубже, чем в однокомпонентную — до глубин порядка горизонтальных масштабов неоднородных напряжений L . При отсутствии термодиффузии ($s_T = 0$) коэффициент при упомянутой медленно убывающей экспоненте в полученном решении обращается в нуль, так же как и в случае одинаковых краевых условий для двух субстанций ($h_T = h_s$). На глубинах, больших h , возмущения температуры и концентрации примеси в большой степени компенсируют друг друга в поле плотности. Поэтому возмущения плавучести, давления и скорости проникают и в двухкомпонентные среды лишь до глубин порядка h — как и в случае однокомпонентных сред.

Рассмотрим численный пример, отвечающий возможным лабораторным экспериментам. Пусть неоднородные касательные напряжения приложены к поверхности воды, устойчиво стратифицированной по температуре; $L = 0.5 \text{ m}$, $k = 2\pi/L \approx 12.5 \text{ m}^{-1}$, $\gamma_T = 30 \text{ K/m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\kappa = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, $\alpha = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, фоновая стратификация солености отсутствует. В этом случае $R_T \approx 2.63 \cdot 10^7$. Имеет смысл сравнить стационарные температурные профили с учетом и без учета эффекта термодиффузии. Пусть фоновая соленость воды составляет 30‰ (промилле) — порядок величины, характерный для морской воды;

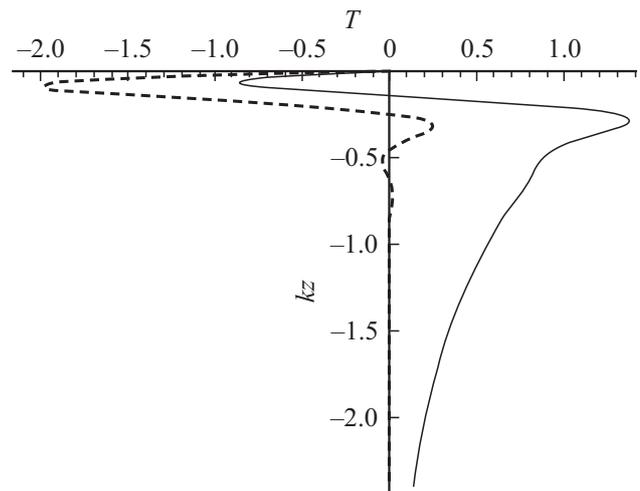


Рис. 2. Примеры безразмерных (нормированных на $\sqrt{3} \cdot 10^{-3} \gamma_T \tau / 4 \kappa k^2$) вертикальных профилей температурных возмущений на вертикали $x = 0$ для рассмотренных в тексте численных значений параметров с учетом термодиффузии (сплошная кривая) и без ее учета ($\gamma_s = 0$, штриховая линия).

$\beta = 0.76 \cdot 10^{-3} (\text{‰})^{-1}$, $\chi = 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ [3]. Температурная зависимость коэффициента Соре s_T приведена, например, в работе [5]. При температуре 30°C значение этого коэффициента порядка 10^{-3} K^{-1} . При таких значениях параметров величины $\gamma_s \approx -0.94 \cdot 10^{-2} \text{ ppm/m}$, $R_s \approx 2.13 \cdot 10^4$, $\xi = -0.074$, так что $R \approx R_T \approx 3 \cdot 10^7$, $R^{1/6} \approx 17$. На рис. 2 представлены профили температуры при $b_T = 0$, $b_s = \infty$, рассчитанные с учетом и без учета термодиффузии. Видно, что в первом случае глубина проникновения термических возмущений в среду существенно больше (показатели основных убывающих с глубиной экспонент различаются примерно на порядок).

Этот результат можно понять из следующих соображений. В однокомпонентной среде термические возмущения не могут проникать в среду глубже масштаба $h \ll L$, поскольку на больших вертикальных масштабах возникающие отклонения плавучести вызывают возникновение переносящих тепло вертикальных течений, компенсирующих температурные возмущения. Иными словами, в устойчиво стратифицированной среде существуют известные отрицательные обратные связи, благодаря которым изопикны (поверхности равной плотности) могут отклоняться от горизонтали только в тонком слое вблизи приложенной силы. При наличии же отклонений концентрации примеси последние могут компенсировать температурные отклонения в поле плотности — выравнивание изопикн не исключает возможности возникновения значительных отклонений в поле каждой из этих субстанций, что и происходит в рассмотренном примере. Таким образом, „совместные“ отклонения температуры и концентрации могут глубоко проникать в среду (до глубин порядка L), не вызывая отклонений плавучести и упомянутых компенсирующих течений.

Заключение

В геофизической гидродинамике эффекты термодиффузии обычно не учитываются. Считается, что при реальной (относительно небольшой) солености морской воды они незначительны ввиду малости значений коэффициента $Sore$ s_T и фоновой концентрации примеси $\bar{\mu}$. Но представленные расчеты показывают, что в некоторых ситуациях эти эффекты могут быть заметными. Роль возникающих отклонений концентрации примеси становится заметной благодаря двум обстоятельствам: 1) медленность диффузии примеси, что способствует „жизнеспособности“ отклонений ее концентрации; 2) различие краевых условий для температуры и концентрации на верхней границе — в рассмотренном численном примере температура на поверхности жестко фиксирована, в то время как отклонения концентрации примеси не теряются на границе.

Еще более значительными эффекты термодиффузии могут быть в средах с большими концентрациями примеси или с большими значениями коэффициента $Sore$. Один из возможных примеров — „солнечные пруды“ (solar ponds [5]) — искусственные водоемы, используемые для аккумуляции солнечной энергии. Конвективный теплообмен в них подавляется путем существенного искусственного повышения солености в придонных слоях — поддержания устойчивой стратификации плотности.

В рассмотренном примере значение коэффициента $Sore$ было положительным. Но оно может быть и отрицательным. Например, в соленой воде его значение отрицательно при более низких температурах — меняет знак при температуре около 10°C [5]. В этом случае значения параметров γ_s и ξ положительны, и выражение в квадратных скобках в (15), вообще говоря, может приближаться к нулю, что соответствует неограниченному возрастанию амплитуды возмущений — порогу неустойчивости. Такой тип неустойчивости, обусловленный термодиффузией, насколько нам известно, ранее не рассматривался. Условие неустойчивости с точностью до обозначений совпадает с [2], где неустойчивость обусловлена не термодиффузией, а наличием фоновой стратификации концентрации примеси. Это условие подробно проанализировано в упомянутой работе.

Список литературы

- [1] *Линейкин П.С., Мадерич В.С.* Теория океанического термомоклина. Л.: Гидрометеоздат, 1982. 271 с.
- [2] *Ингель Л.Х.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. № 1. С. 213–220.
- [3] *Ингель Л.Х., Калашник М.В.* // УФН. 2012. Т. 182. № 4. С. 379–406.
- [4] *Рыжков И.И.* Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: СО РАН, 2013. 200 с.
- [5] *Angeli C., Leonardi E.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 2005. Vol. 48. P. 4633–4639.
- [6] *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [7] *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.