

Влияние электрического тока на миграцию межузельных атомов водорода у вершины трещины в кристалле

© Д.Н. Карпинский, С.В. Санников

Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики Ростовского государственного университета, 344090 Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: karp@math.rsu.ru

(Поступила в Редакцию в окончательном виде 8 апреля 2002 г.)

Дана оценка влияния постоянного электрического тока на миграцию точечных дефектов, растворенных в кристалле у вершины трещины растяжения. Расчет учитывает пластическую деформацию у вершины трещины в нагруженном образце, обусловленную движением дислокаций в плоскостях активного скольжения кристалла под действием сдвиговых напряжений механического и электрического происхождения, выделение джоулева тепла, эффект Томсона и действие пондеромоторных сил, а также влияние газообмена на берегах трещины на эволюцию распределения межузельных примесных атомов. Получены временные распределения коэффициента интенсивности напряжения при протекании постоянного электрического тока у вершины трещины и без него. Численные расчеты выполнены для кристалла α -Fe.

В последние годы достоверно установлено наличие резкого снижения сопротивления металла деформированию и повышение его пластичности под влиянием электрического тока большой плотности [1–3]. В связи с этим представляет значительный интерес исследование эволюции точечных дефектов у вершины трещины при совместном действии сил механического и электрического происхождения. Особый интерес с точки зрения практики представляет исследование проникновения атомов водорода в нагруженные образцы с дефектами. Взаимное влияние процессов разрушения и наводораживания отмечено в [4]. Временная зависимость распределения точечных дефектов в отсутствие электрического тока оценена в [5]. Однако для разработки методов электрохимического наводораживания [6] и других задач важно понимать закономерности влияния электрического тока на прочность образцов, которая существенно зависит от миграции точечных дефектов в них. В этом направлении исследований авторам известна только работа [7], в которой выполнен расчет эволюции распределения атомов водорода, растворенных вблизи надреза в токонесящем стержне, но в этом расчете предполагалось, что внешняя нагрузка не вызывает пластической деформации, а накопление газообразной примеси в полости надреза отсутствует. Ранее в [8] были исследованы три механизма переноса межузельных атомов водорода у вершины трещины в отсутствие электрического тока: 1) решеточная диффузия; 2) дислокационное „выметание“ точечных дефектов; 3) перенос примесных атомов в ядрах дислокаций, движущихся в пластической зоне. Результаты расчетов [5,8,9] показали, что первый механизм переноса межузельных атомов (решеточная диффузия) вносит основной вклад в поток примесных атомов в полость трещины.

Рассмотрим трещину длиной $2l$, расположенную в плоскости скола (010) (вдоль отрицательной полуоси Ox) объемно центрированного кубического (ОЦК) кристалла толщиной H , бесконечного в двух других на-

правлениях (рис. 1). К плоскостям кристалла $y \rightarrow \pm\infty$ приложено однородное напряжение растяжения $\sigma_a(t)$ (мода 1), монотонно возрастающее до некоторого значения σ_{\max} , достаточного для пластического деформирования кристалла, но недостаточного для роста трещины. Аналогично [10] будем предполагать, что пластическая деформация ОЦК-кристалла осуществляется путем перемещения полных дислокаций с вектором Бюргерса $\mathbf{b} = 1/2\langle 111 \rangle$ вдоль плоскостей легкого скольжения $\{110\}$. Плоскости $\langle 110 \rangle$, пересекаясь с плоскостью Oxy , образуют на ней два семейства линий скольжения, направления которых заданы векторами $\xi_j (j = 1, 2)$. В кристалле равномерно распределены источники дислокаций, испускающие прямоугольные петли, лежащие в плоскостях легкого скольжения. Тогда скорость пла-

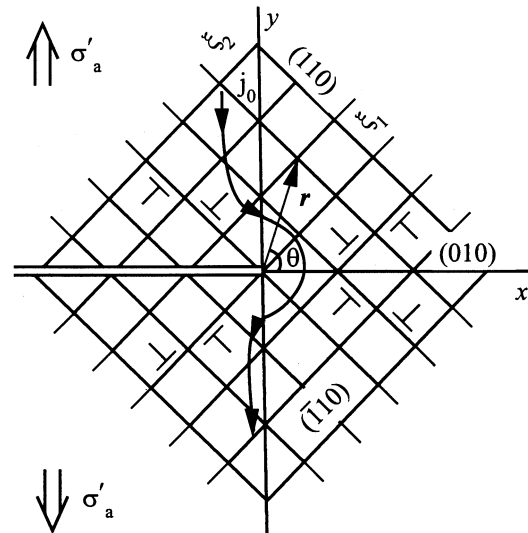


Рис. 1. Кристаллографическая схема плоскостей легкого скольжения $\{110\}$ у вершины трещины скола $\{001\}$ при растяжении напряжением σ . Показаны линии постоянного электрического тока.

стического деформирования, обусловленного движением дислокаций у вершины трещины [10,11],

$$\frac{d\varepsilon^j(\mathbf{r}, t)}{dt} = \varepsilon_0 \exp \left[-\frac{U_0 \{1 - [\sigma_e^j(\mathbf{r}, t)/\tau_0]^{1/2}\}}{k_B T(\mathbf{r}, t)} \right] \times \text{sign} \sigma_e^j(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где U_0 — энергия активации, ε_0 и τ_0 — постоянные, σ_e^j — эффективное напряжение сдвига в плоскостях легкого скольжения,

$$\sigma_e^j(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \sigma^j(\mathbf{r}, t) - \sigma_s(\mathbf{r}, t) \text{sign} \sigma^j(\mathbf{r}, t), & |\sigma^j| > |\sigma_s|, \\ 0, & |\sigma^j| < |\sigma_s|. \end{cases} \quad (2)$$

В (2) сдвиговое напряжение $\sigma^j(\mathbf{r}, t) = \sigma_j^c(\mathbf{r}, t) + \sigma_j^l(\mathbf{r}, t)$, где $\sigma_j^c(\mathbf{r}, t)$ — напряжение Вестергарда,

$$\sigma_j^c(\mathbf{r}, t) = \frac{K^c}{\sqrt{2\pi r}} \Psi(\varphi), \quad (3)$$

$\sigma_j^l(\mathbf{r}, t)$ — дальнедействующее упругое напряжение, создаваемое дислокациями одного знака в пластической зоне,

$$\sigma_j^l(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^2 \int_{D_k} \hat{\sigma}_j(z'_k) \Delta \rho_k(z', t) dz'. \quad (4)$$

В (3) K^c — коэффициент интенсивности напряжения (КИН) хрупкой трещины под действием механической растягивающей нагрузки,

$$K^c = \sigma_a'(t) \sqrt{\pi l}, \quad (5)$$

$\Psi(\varphi)$ — функция полярного угла φ , в (4) $\Delta \rho_k(z', t)$ — плотность эффективных дислокаций, связанных с деформацией $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ соотношением

$$\Delta \rho_k(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{b} \frac{d}{d\xi_k} \varepsilon^k(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

$\hat{\sigma}_j(z'_k)$ определяет напряжения, создаваемые дислокацией в упругой плоскости с полубесконечным разрезом.

Метод расчета эволюции пластической деформации у вершины трещины подробно изложен в [10,11].

Дополним [10,11] предположением, что через кристалл перпендикулярно плоскости трещины в удаленной от трещины части кристалла пропускается постоянный электрический ток плотностью j_0 ($j_x(\mathbf{r}) = 0$, $j_y = j_0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$). В данной работе будем учитывать три механизма действия тока на дислокации в пластической зоне трещины: 1) джоулево тепло; 2) эффект Томсона (смещение области нагрева джоулевым теплом в направлении дрейфа электронов проводимости); 3) пондермоторные силы (силы, возникающие при взаимодействии электрического тока с собственным магнитным полем) [12].

Представляется актуальным уточнить результаты [5,9], учитывая в данном расчете совместное действие механических и электрических полей на растворенные в кристалле атомы водорода. Причем действие электрического тока обусловлено как его непосредственным влиянием на них, так и опосредованным (через изменение характера движения дислокаций). В [13] принимались во внимание лишь первый и второй механизмы действия электрического тока, в данном исследовании учтен и третий механизм.

Рассмотрим вклад пондермоторных сил в эволюцию пластической деформации у вершины трещины [14]. Электрический ток создает в кристалле по закону Био–Савара–Лапласа магнитную индукцию $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, которая в данной задаче имеет одну ненулевую компоненту $B_z(\mathbf{r}, t)$:

$$B_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu H}{4\pi} \int_S \frac{J_x(\mathbf{r}', t) R_y - J_y(\mathbf{r}', t) R_x}{R^3} dS'. \quad (7)$$

В (7) μ — магнитная восприимчивость кристалла, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, R_x и R_y — проекции \mathbf{R} на оси Ox и Oy , а интегрирование выполняется по области S' , занимаемой электрическим током. Из [12] следует выражение для вектора плотности электрического тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ вблизи вершины трещины в полярных координатах $J_x(\mathbf{r}, t) = J'_0(t) \sqrt{l/2r} \sin(\theta/2)$, $J_y(\mathbf{r}, t) = J'_0(t) \sqrt{l/2r} \cos(\theta/2)$.

В нашем случае плотность пондермоторных сил определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ &= B_z(\mathbf{r}, t) (J_y(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} - J_x(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (8)$$

Под действием массовых сил (8) вдоль легких плоскостей скольжения в кристалле возникает дополнительное сдвиговое напряжения σ_j^{pm} , которое учтено в расчете заменой КИН трещины, не учитывающего влияния на нее пластической деформации $K^c(t) = (\sigma_a'(t) + P(t)) \sqrt{\pi l}$ [9], на

$$K^{cb} = K^c + K^b, \quad (9)$$

где K^b определяется решением задачи теории упругости о равновесии упругой плоскости с полубесконечным разрезом под действием массовых сил (8).

Рассмотрим процесс тепловыделения в пластической зоне у вершины трещины за счет джоулева тепла. Температурное поле в верхней полуплоскости в момент времени t определяется как классическое решение задачи теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \alpha \Delta T + F(x, y, t), \\ -\infty, x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = \Phi(x, t), \quad (11)$$

$$T|_{t=0} = T_0(x, y), \quad 0 < t < \infty. \quad (12)$$

В (10) $a = \lambda/\rho C$ — температуропроводность кристалла, λ — теплопроводность, ρ — плотность, C — теплоемкость,

$$F(x, y, t) = \varrho j^2(x, y, t) + L j_i(x, y, t) \nabla_i T(x, y, t). \quad (13)$$

В (13) $\varrho = \varrho_0[1 + \alpha(T - 273 \text{ К})]$ — удельное электро-сопротивление кристалла, ϱ_0 — удельное электросопротивление при $T = 273 \text{ К}$, α — температурный коэффициент электросопротивления, L — коэффициент Томсона [12]. Используя симметрию задачи относительно $y = 0$, получим граничное условие $\Phi(x, t) = 0$. При расчете в (10) величины $T(x, y, t)$ использовался метод, подробно изложенный в [11].

В расчете предполагалось, что для КИН трещины имеет место представление [9,10]

$$K(t) = K^{cb}(t) + K^p(t). \quad (14)$$

В (14) $K^p(t)$ — поправка, учитывающая влияние пластической деформации на КИН,

$$K^p(t) = \sum_{j=1}^2 \int_{D_j} \hat{K}_j^p(z) \Delta \rho_j(z, t) dz, \quad (15)$$

$$z = x + iy.$$

Величина $\hat{K}_j^p(z) = \hat{K}_I^p - i \hat{K}_{II}^p$ получена в [10].

Скорость нагружения кристалла выбиралась так, чтобы для максимальной скорости деформации в (1) из [9] выполнялось условие $\max |\varepsilon^j(\mathbf{r}, t)| \leq 0.1 \text{ с}^{-1}$. Механическое нагружение кристалла прекращалось, когда величина $K^{cb}(t)$ достигала своего верхнего предела K_{\max}^{cb} . Величина плотности электрического тока увеличивалась монотонно со временем до достижения ею заданной величины j_0 таким образом, чтобы в (9) выполнялось соотношение $K_b = K_c/10$.

Расчеты эволюции пластической деформации у вершины трещины в кристалле $\alpha = \text{Fe}$ под действием внешней механической нагрузки и электрического тока выполнены при следующих значениях постоянных: $H = 10^{-2} \text{ м}$, $2l = 10^{-3} \text{ м}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 78.2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, $C = 460 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, $\varrho_0 = 8.6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{м}$, $L = -22.8 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}$, $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/м}$, $\alpha = 3.3 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $J_0 = 8 \cdot 10^8 \text{ А/м}^2$, $K_{\max}^{cb} = 0.2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Выбор остальных постоянных аналогичен [9].

Рассмотрим теперь уравнение электромехано-диффузии (см., например, [7])

$$\frac{\partial c(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 c(\mathbf{r}, t) + \frac{Dc(\mathbf{r}, t)}{k_B T(\mathbf{r}, t)} \nabla c(\mathbf{r}, t) \nabla V(\mathbf{r}, t), \quad (16)$$

где D — коэффициент диффузии, $V(\mathbf{r}, t) = \Delta v \sigma_{ii}^e(\mathbf{r}, t) - e Z^* \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)$, Δv — изменение объема ячейки кристаллической решетки за счет содержащегося в ней межузельного атома, $\sigma_{ii}^e(\mathbf{r}, t)$ — шаровая

компонента тензора эффективного напряжения у вершины трещины [9], e — элементарный заряд, Z^* — эффективное зарядовое число, $\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t)$ — электрический потенциал тока в кристалле. Из [12] следует, что при $|\mathbf{r}|/l \rightarrow 0$ $\bar{\varphi} = -\rho j_0 \sqrt{2l} \sin(\theta/2)$. Уравнение (16) получено для слабого раствора примесей ($c \ll 1$) с учетом условия $\Delta V = 0$.

Предположим, что до начала нагружения в кристалле равномерно распределены межузельные атомы водорода концентрации c_0 . Тогда начальное условие выберем в виде $c = c_0$ при $t = 0$ и примем следующие граничные условия: при $y = 0$, $x > 0$

$$\frac{\partial c(x > 0, 0, t)}{\partial y} = \frac{e Z^* c j_0 \rho}{k_B T} \sqrt{l/2r}, \quad (17)$$

при $y = 0$, $x < 0$ (закон Зивертса [5])

$$D \frac{\partial c(x < 0, 0, t)}{\partial y} = k_m (c^2 - (\Gamma')^{-1} P(t)), \quad (18)$$

$c = c_0$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. В (18) k_m — постоянная массообмена на границе газа и твердой фазы, $P(t)$ — давление газа в полости трещины, Γ' — модифицированная постоянная Генри [5].

В расчете предполагаем, что газ в полости трещины идеальный, тогда его давление $P(t)$ внутри трещины равно [5]

$$P(t) = \frac{1}{2} \sigma_a'(t) \left\{ \left[1 + \frac{4Gk_B T N(t)}{\pi(1-\nu)(2l)^2 \sigma_a'^2(t)} \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (19)$$

В (19) G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона кристалла. Аналогично [9] предположим, что основной поток газа, растворенного в объеме кристалла, попадает в полость трещины через ее берега. В этом случае количество молекул водорода в полости трещины

$$N(t) = \int_0^t J(t) dt, \text{ где}$$

$$J(t) = k_m \int_{-\infty}^0 [c^2(x, 0, t) - (\Gamma')^{-1} P(t)] dx$$

— поток атомов газа через берега трещины. Метод решения (16)–(19) аналогичен использованному в [5,9].

В расчете учтено пластифицирующее воздействие растворенного водорода введением поправки к пределу текучести σ^r [9,15]

$$\sigma^r = \frac{2\pi\beta^2 c(\mathbf{r}, t)}{3\sqrt{3}r_0 b k_B T}, \quad \beta = \frac{Gb(1+\nu)}{3\pi(1-\nu)} \Delta v. \quad (20)$$

В (20) r_0 — радиус ядра дислокации.

Для расчета миграции межузельных атомов водорода в кристалле $\alpha\text{-Fe}$ выбраны следующие значения постоянных: $b = 2.48 \cdot 10^{-4} \mu\text{м}$, $D = 4.88 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$,

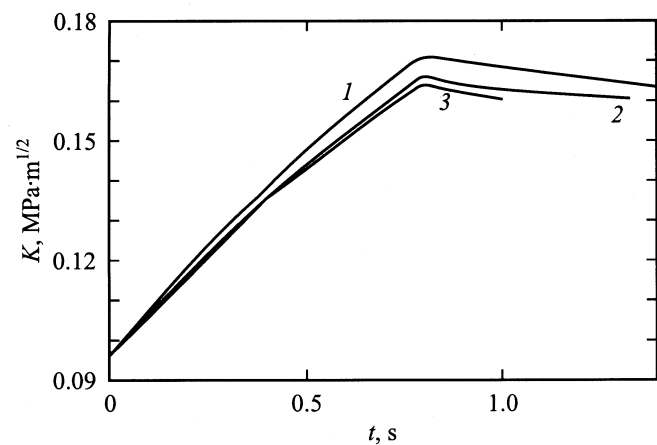


Рис. 2. Временная зависимость коэффициентов интенсивности напряжения для пластичной трещины растяжения в ОЦК-кристалле, содержащем межузельные атомы водорода с начальной концентрацией c_0 : 1 — расчет не учитывает нагрев кристалла джоулевым теплом, $c_0 = 10^{-5}$; 2 — учтены все механизмы действия электрического тока, $c_0 = 10^{-5}$; 3 — то же, что и для кривой 2, при $c_0 = 10^{-4}$.

$$k_m = 4.88 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}, r_0 = 2b, G = 83 \text{ ГПа}, \nu = 0.28, \Delta v = 3 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3.$$

Обсудим теперь особенности влияния электрического тока на эволюцию распределения точечных дефектов у вершины трещины. Прямое действие электрического тока на атомы водорода обусловлено его электрическим потенциалом, джоулевым теплом и эффектом Томсона. Косвенное действие электрического тока на растворенные атомы водорода обусловлено изменением гидростатической компоненты тензора механического напряжения у вершины трещины за счет дополнительного растяжения трещины пондеромоторными силами, которое приводит к перераспределению дислокаций в пластической зоне. Совместное действие дополнительного поля напряжения Вестергарда и упругого поля, создаваемого дислокациями в пластической зоне, вносит изменение в миграцию точечных дефектов. К косвенному действию электрического тока также можно отнести возможное изменение стока атомов водорода в полость трещины и как следствие изменение давления в ней.

На рис. 2 показаны временные зависимости КИН в кристалле, содержащем межузельные атомы водорода при концентрациях $c_0 = 10^{-5}$ (кривая 2) и 10^{-4} (кривая 3). Кривая 1 на этом рисунке соответствует концентрации $c_0 = 10^{-5}$ в случае, когда из расчета исключены джоулево тепло и эффект Томсона. Конечные точки этих кривых соответствуют моментам времени остановки эволюции пластической деформации ε^j , когда эффективное напряжение σ_e^j снижается ниже предела текучести. Из сравнения кривых 1 и 2 видно, что исключение теплового влияния электрического тока заметно уменьшает релаксацию напряжения у вершины трещины ($\sim 3\%$) и увеличивает время до остановки пластической

деформации с 1.34 до 1.4 с. Результаты расчета КИН при концентрации $c_0 = 10^{-4}$ показали незначительное снижение КИН ($\sim 1\%$) по сравнению с расчетом при $c_0 = 10^{-5}$ и заметное уменьшение времени остановки эволюции пластической деформации (до 1.01 с). Это обстоятельство можно связать с заметным снижением предела текучести из-за линейной зависимости σ^f от концентрации c .

Важно отметить, что последовательное снижение КИН (кривые 1–3) на рис. 2 обусловлено конкуренцией механизмов, ускоряющих процесс развития пластической деформации, что приводит к дополнительной релаксации напряжений у вершины за счет джоулева тепла (кривые 1, 2) и снижению предела текучести при увеличении концентрации водорода (кривые 2, 3). В то же время рост давления в полости трещины за счет увеличения „сброса“ водорода в полость трещины из-

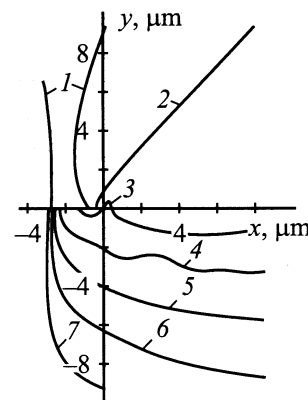


Рис. 3. Распределение безразмерной концентрации $c(r, t)/c_0$ межузельных примесных атомов водорода у вершины трещины при начальной концентрации $c_0 = 10^{-5}$ в момент времени $t = 1.34$ с: 1 — 0.919, 2 — 0.944, 3 — 0.969, 4 — 0.994, 5 — 1.02, 6 — 1.04, 7 — 1.07.

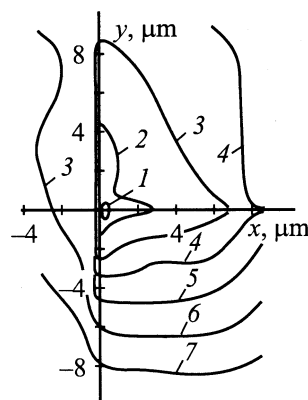


Рис. 4. Распределение безразмерной концентрации $c(r, t)/c_0$ межузельных примесных атомов водорода у вершины трещины при начальной концентрации $c_0 = 10^{-4}$ в момент времени $t = 1.01$ с: 1 — 0.833, 2 — 0.865, 3 — 0.896, 4 — 0.927, 5 — 0.958, 6 — 0.990, 7 — 1.02.

за увеличения подвижности растворенного междузельного водорода при нагреве и начальной концентрации водорода приводит к повышению уровня напряжений у вершины. Нагрев газа в полости трещины за счет джоулева тепла приводит к увеличению давления P (19) и модифицированной постоянной Генри $\Gamma'(T)$ [5,9], которые определяют граничные условия (18). Эти изменения приводят к снижению проницаемости берегов трещины для потоков водорода. Результаты расчетов, выполненных при выбранных значениях постоянных, показали преобладающий вклад механизмов релаксации в эволюцию КИН.

На рис. 3 показано распределение концентрации междузельных атомов водорода у вершины трещины, соответствующее конечной точке кривой 2 на рис. 2. Из этого рисунка видно возникновение асимметрии распределений концентрации относительно линии продолжения трещины. Распределение концентрации точечных дефектов на рис. 4 соответствует конечной точке кривой 3, на рис. 2 однако в этом случае видна область пониженной концентрации (концентрационная „яма“) перед вершиной. При этом важно отметить, что сток атомов водорода в полость трещины через верхний берег (рис. 1) меньше, чем через нижний („теневой“) берег трещины (не более 1%) за исключением начального этапа нагружения. Однако полный поток водорода в полость трещины при наличии электрического тока в кристалле и в его отсутствие не меняется. Иными словами, не удается электрическим током „сбить“ поток растворенного в кристалле водорода в полость трещины. В то же время заметна зависимость распределения концентрации водорода у вершины трещины от электрического тока по сравнению с бестоковым режимом нагружения [5].

В заключение отметим следующее.

1) Релаксационные механизмы действия электрического тока на эволюцию пластической деформации преобладают над механизмами, увеличивающими концентрацию механических напряжений у вершины трещины в кристалле с растворенным в нем водородом.

2) Джоулево тепло является основным механизмом прямого и косвенного действия электрического тока на миграцию междузельных атомов водорода, а также релаксации механических напряжений у вершины трещины.

3) Распределение точечных дефектов у вершины трещины существенно зависит от их начальной концентрации и плотности электрического тока. При доступных плотностях электрического тока не удается „сбить“ растворенных в кристалле атомов водорода, заполняющих полость трещины.

Список литературы

- [1] В.Е. Громов, Л.Б. Зуев, Э.В. Козлов. Электростимулированная пластичность металлов и сплавов. Недра, М. (1997). 280 с.
 [2] В.И. Спицин, О.А. Троицкий. Электропластическая деформация металлов. Наука, М. (1985). 159 с.

- [3] A.F. Sprecher, S.L. Mannan, H. Conrad. Acta Met. **34**, 7, 1145 (1986).
 [4] Ю.А. Хрусталева. Материалы II Междунар. конф. „Микро-механизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений“. Вестн. ТГУ. **5**, 2–3, 234 (2000).
 [5] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. ФММ **85**, 2, 121 (1998).
 [6] С.М. Белоглазов. Наводораживание стали при электрохимических процессах. Изд-во ЛГУ, Л. (1975).
 [7] Н.А. Угодчиков, А.Г. Берендеева. В межвуз. сб.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Тов-во научн. изд. КМК, М. (1997). С. 69.
 [8] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. ФТТ **39**, 9, 1580 (1997).
 [9] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. ФТТ **42**, 12, 2171 (2000).
 [10] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. ПМТФ **34**, 3, 154 (1993).
 [11] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. ФТТ **37**, 2, 505 (1995).
 [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1995).
 [13] Д.Н. Карпинский, С.В. Санников. Материалы II Междунар. конф. „Микро-механизмы пластичности, разрушения и сопутствующих явлений“. Вестн. ТГУ. **5**, 2–3, 236 (2000).
 [14] G.X. Cai, F.G. Yuan. Adv. Eng. Software **29**, 3–6, 297 (1998).
 [15] Н.М. Власов, В.А. Зазноба. ФТТ **41**, 3, 451 (1999).