

## Новые возможности позитронно-эмиссионной томографии

© А.Н. Волобуев

Самарский государственный медицинский университет,  
Кафедра медицинской и биологической физики,  
443099 Самара, Россия  
e-mail: volobuev47@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 25 января 2017 г.)

Исследованы причины возникновения углового распределения фотонов, образующихся при аннигиляции электрона и позитрона в позитронно-эмиссионном томографе. Показано, что угловое распределение интенсивности излучения, т.е. вероятности излучения фотонов по различным углам, является следствием эффекта Доплера в системе отсчета центра масс электрона и позитрона. В системе отсчета, связанной с электроном, угловое распределение количества вылетающих фотонов отсутствует, но заменяется доплеровским изменением частот фотонов. Полученные результаты позволяют расширить возможности позитронно-эмиссионного томографа при диагностике заболеваний и дополнительно получить механические характеристики ткани организма: плотность, вязкость и т.д.

DOI: 10.21883/JTF.2018.01.45498.2178

### Введение

Позитронно-эмиссионная томография — это метод радиоизотопной диагностики, в котором используется внутривенное введение радиофармацевтических препаратов (РФП), излучающих позитроны [1]. Позитроны возникают в результате  $\beta$ -позитронного распада короткоживущих радиофармацевтических изотопов, например  $C_6^{11}$ ,  $O_8^{15}$ ,  $N_7^{13}$ ,  $F_9^{18}$ ,  $P_{15}^{30}$ . Поэтому важным узлом позитронно-эмиссионного томографа (ПЭТ) является циклотрон, вырабатывающий эти короткоживущие радиоизотопы с периодом полураспада  $T_{1/2} \sim 10-20$  min. Испущенные ядром изотопа позитроны  $e_{+1}^0$ , сталкиваясь с электронами  $e_{-1}^0$ , которых всегда много в веществе, аннигилируют  $e_{-1}^0 + e_{+1}^0 \rightarrow 2\hbar\omega$  ( $\hbar$  — постоянная Планка,  $\omega$  — циклическая частота фотона). В результате появляется два  $\gamma$ -кванта (фотона) (рис. 1).

Особенностью этих  $\gamma$ -квантов, с энергией  $\sim 511$  keV является то, что они излучаются практически в строго противоположных направлениях.

В ПЭТ кушетка с пациентом, у которого в тканях имеется патологический участок 2, в котором накопился РФП, помещается в кольцо  $I$ , состоящее из детекторов, регистрирующих  $\gamma$ -кванты. Информационную ценность имеет только событие, когда два излученных в процессе аннигиляции  $\gamma$ -кванта достигают противоположных детекторов одновременно, т.е. оба  $\gamma$ -кванта пролетают одинаковый путь до детекторов. Например,  $\gamma$ -кванты, излученные из точки  $a$  патологического очага, достигают двух детекторов  $\gamma$ -излучения  $D_1$  и  $D_2$ , расположенных на линии  $A-A$ , одновременно, эти сигналы участвуют в построении изображения.

Одновременность регистрации  $\gamma$ -квантов служит признаком того, что ЭВМ, на которую поступают сигналы от детекторов, должна использовать полученные сигналы для формирования изображения.

Координата, излучающей  $\gamma$ -кванты точки патологического очага находится на линии, соединяющей детекторы точно посередине между ними. Интенсивность сигнала от детекторов указывает на количество накопленного РФП.

Сигналы детекторов, не одновременно регистрируемых  $\gamma$ -кванты, игнорируются. Это связано с тем, что для таких  $\gamma$ -квантов невозможно рассчитать точку их испускания в связи с очень большой скоростью движения  $\gamma$ -квантов.

При перемещении кушетки с пациентом вдоль оси, перпендикулярной плоскости кольца детекторов, получается трехмерное (3D) изображение распределения концентрации РФП в патологическом очаге.

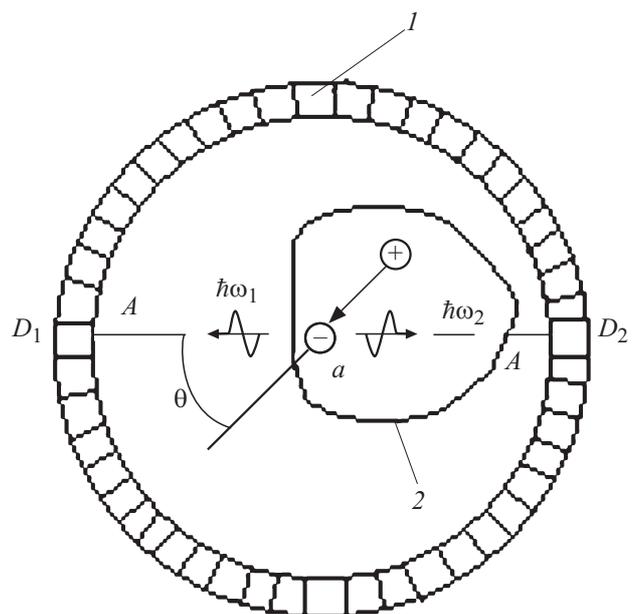


Рис. 1. Схема регистрации фотонов в ПЭТ.

Результаты регистрации  $\gamma$ -квантов всеми одновременно срабатывающими детекторами, обрабатываются с помощью ЭВМ. При этом получается изображение высокой информативности.

Разрешающая способность ПЭТ определяется в основном длиной пробега позитрона до аннигиляции и составляет 4–6 мм. Метод позитронно-эмиссионной томографии в настоящее время является наиболее информативным по сравнению с другими диагностическими методами, включая компьютерную рентгеновскую томографию и магниторезонансную томографию. Он успешно применяется прежде всего для раннего обнаружения онкологических новообразований и особенно метастазов. С его помощью обнаруживаются патологические очаги, когда структурных изменений еще нет, но течение биохимических реакций в клетках уже нарушено.

Широкое использование ПЭТ сдерживается его исключительно высокой стоимостью, однако, по нашему мнению, возможности ПЭТ используются далеко не полностью.

Целью настоящей работы является показать, как с помощью ПЭТ можно найти некоторые механические характеристики тканей организма: плотность, вязкость и т. д.

## Угловое и энергетическое распределения аннигиляционного излучения

Для этого проанализируем угловое распределение вылетающих фотонов энергией  $\hbar\omega$  при аннигиляции позитрона и электрона в ПЭТ. К сожалению, механизм процесса аннигиляции электрона и позитрона до настоящего времени неизвестен. П. Дираком была предложена модель этого процесса.

Согласно представлениям Дирака [2,3], аннигиляцию можно представить как переход электрона из состояния с положительной энергией в состояние с отрицательной энергией. Согласно теории вакуумных дырок Дирака, позитрон представляет собой дырку в поле вакуума. Взаимодействие электрона и позитрона, их аннигиляция — это заполнение вакуумной дырки электроном. При этом выделяется энергия в виде двух квантов электромагнитного излучения.

Квантово-электродинамические расчеты процесса аннигиляции были проведены довольно давно, неоднократно проверялись и перепроверялись.

В результате этих расчетов были получены две формулы для дифференциального эффективного сечения рассеяния квантов электромагнитного излучения в телесный угол  $d\Omega$ .

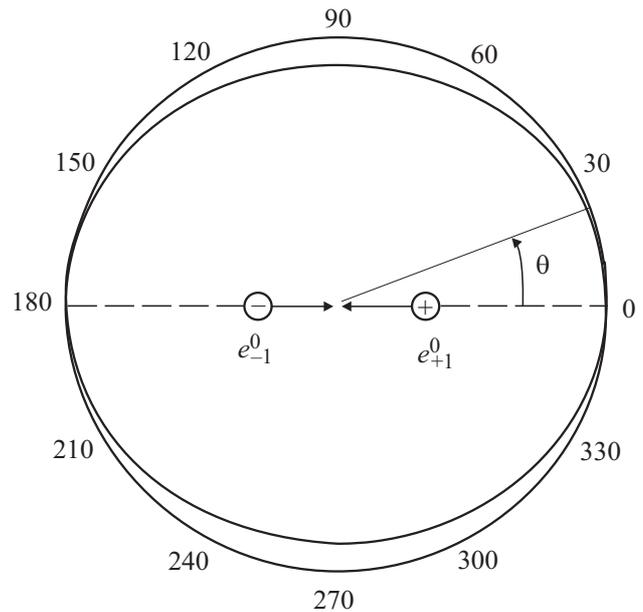


Рис. 2. Угловое распределение аннигиляционного излучения.

Первая по времени формула была получена Гайтлером [4]. Эта формула имеет вид

$$d\sigma = \frac{e^4}{4(4\pi)^2 k^0 p} \left\{ \frac{(k^0)^2 + p^2 + p^2 \sin^2 \theta}{(k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta} - \frac{2p^4 \sin^4 \theta}{((k^0)^2 - p^2 \cos^2 \theta)^2} \right\} d\Omega. \quad (1)$$

Формула дана в обозначениях [5], где имеется ее подробный вывод. Использована так называемая рациональная система единиц, в которой скорость света и постоянная Планка равны единице  $c = \hbar = 1$ . В этой системе единиц энергия импульс и масса имеют одну и ту же размерность.

В формуле (1)  $e$  — заряд электрона (или позитрона с противоположным знаком),  $k^0$  — энергия фотона,  $p$  — импульс электрона,  $\theta$  — угол между импульсами электрона и одного из излученных фотонов. Формула (1) получена при условии суммирования по всем направлениям поляризации фотонов.

При выводе (1) использована система отсчета, связанная с центром масс взаимодействующих электрона и позитрона, в которой импульсы электрона и позитрона равны по модулю между собой и противоположны по направлению  $p_1 = -p_2 = p$ . Импульсы фотонов также равны по модулю между собой и противоположны по направлению  $k_1 = k_2$  [4,5]. Отметим, что в этой системе отсчета условия наблюдения обоих фотонов одинаковы.

На рис. 2 показано угловое распределение  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = f(\theta)$  согласно формуле (1). Это распределение показано для отношения  $\frac{p^2}{(k^0)^2} = 0.2$ . Коэффициент перед квадратными скобками в (1) принят равным единице. График на рис. 2

имеет иллюстративный характер, так как будет показано ниже,

$$\frac{p^2}{(k^0)^2} = \frac{\alpha^2}{4} \sim 10^{-5},$$

где  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  постоянная тонкой структуры. В этом случае распределение  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  практически сферически симметрично.

Вторая формула была предложена несколько позже Фейнманом [6]. Она представляет собой частотное или энергетическое распределение вылетающих квантов

$$d\sigma = \frac{e^4 \omega_1^2}{64\pi^2 4m^2 |\mathbf{p}_+| (E_+ + m)} \times \left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right] d\Omega. \quad (2)$$

Формула (2) записана в обозначениях [6]. Как и в предыдущем случае, использована рациональная система единиц.

В формуле (2)  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  — единичные векторы поляризации излученных при аннигиляции фотонов,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты излученных фотонов,  $m$  — масса электрона (или позитрона),  $|\mathbf{p}_+|$  — модуль импульса позитрона,  $E_+$  — его энергия.

Формула (2) похожа на формулу Клейна–Нишины для эффекта Комптона [7]. Главное отличие в том, что перед третьим и четвертым слагаемыми в скобках знаки изменены на противоположные.

Важнейшим отличительным условием вывода формулы (2) является использование другой системы отсчета по сравнению с выводом формулы (1). Формула (2) выводилась в системе отсчета, в которой электрон покоится, а движется позитрон.

Эта система отсчета в целом эквивалентна системе отсчета, связанной с ПЭТ. Поэтому назовем эту систему отсчета лабораторной. Электроны объекта, исследуемого в ПЭТ, в основном находятся в связанном состоянии. Поэтому электроны в лабораторной системе отсчета можно считать неподвижными (если исключить хаотическое тепловое движение молекул).

Обе формулы (1) и (2) выводились с помощью стандартной диаграммной техники Фейнмана и диаграмм второго порядка теории возмущений. Однако результаты вывода существенно различаются.

Во-первых, формула (1) предполагает довольно сложное угловое распределение интенсивности  $I$  аннигиляционного излучения, так как  $d\sigma \sim dP \sim Id\Omega$ , где  $dP$  — поток энергии излучения через площадь  $dS$ , интенсивность  $I = \frac{dP}{dS}$ . Причем это распределение связано только с импульсом электрона, угол  $\theta$  присутствует только в комплексе с импульсом  $p$ . В формуле (2) угловое распределение фотонов в явном виде отсутствует.

Во-вторых, формула (2) предполагает возможность различной энергии фотонов при аннигиляции, что запрещается выводом формулы (1), вследствие  $k_1 = -k_2$ .

Поэтому прежде всего возникает вопрос, какова природа углового распределения интенсивности аннигиляционного излучения в (1)? Связано ли это распределение с самим процессом аннигиляции, т.е. переходом „вещество–энергия“, либо определяется какими-то другими эффектами? Сохранится ли данное угловое распределение фотонов при переходе к другой системе отсчета, например, связанной с ПЭТ?

### Причины углового и энергетического распределения аннигиляционного излучения

Для исследования причины угловой зависимости дифференциального эффективного сечения (1) рассмотрим промежуточное выражение вывода, которое еще не проинтегрировано по направлениям поляризации фотонов [5]

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{(k^0)^4}{(pk_1)(pk_2)} - \frac{4(k^0)^4 (pe_1)^2 (pe_2)^2}{(pk_1)^2 (pk_2)^2} - \left[ \frac{4(k^0)^2 (e_1 e_2) (pe_1) (pe_2)}{(pk_1)(pk_2)} - (e_1 e_2)^2 \right] \right\} d\Omega, \quad (3)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — импульсы фотонов. Переменные в квадратных скобках: импульс электрона, импульсы фотонов, единичные векторы поляризации фотонов записаны в виде 4 векторов.

Формулу (3) несложно преобразовать к виду

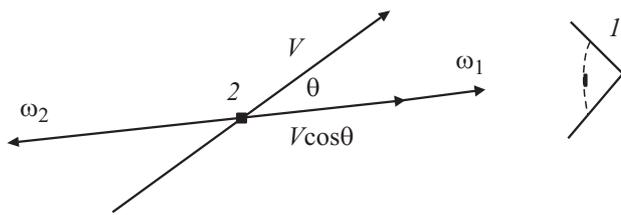
$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{(k^0)^4}{(pk_1)(pk_2)} - \left[ 2(k^0)^2 \frac{(pe_1)(pe_2)}{(pk_1)(pk_2)} + (e_1 e_2)^2 \right] \right\} d\Omega. \quad (4)$$

Перейдем в (4) к пространственным векторам, используя правило  $(ab) = a^0 b^0 - \mathbf{a} \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — трехмерные векторы,  $a^0$  и  $b^0$  — энергетические компоненты 4-векторов.

Переходя к трехмерным векторам, а также учитывая отсутствие энергетических компонент у поляризационных 4-векторов  $e^0 = 0$ , выражение (4) можно представить в виде

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{(k^0)^4}{(k^0)^4 - (\mathbf{pk}_1)^2} - \left[ 2(k^0)^2 \frac{(\mathbf{pe}_1)(\mathbf{pe}_2)}{(k^0)^4 (\mathbf{pk}_1)^2} + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right] \right\} d\Omega = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{(\mathbf{pk}_1)^2}{(k^0)^2}} - \left[ \frac{2}{(k^0)^2} \frac{(\mathbf{pe}_1)(\mathbf{pe}_2)}{1 - \frac{(\mathbf{pk}_1)^2}{(k^0)^2}} + (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^2 \right] \right\} d\Omega. \quad (5)$$

При выводе (5) также использовано условие вылета фотонов в строго противоположных направлениях  $k_2 = -k_1$ .



**Рис. 3.** Наблюдение фотона, который излучается движущейся частицей.

Учитывая  $|\mathbf{k}_1| = k^0$ , а также в соответствии с законом сохранения энергии  $ck^0 = mc^2$  (для наглядности вводим внутри скобок скорость света  $c = 1$ ), в формуле (5) заменим  $\frac{pk_1}{(k^0)^2} = \frac{V}{c} \cos \theta$ , где  $V$  — скорость электрона. В результате получим

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - (\frac{V}{c} \cos \theta)^2} - \left[ \frac{2}{1 - (\frac{V}{c} \cos \theta)^2} \frac{(\mathbf{p}\mathbf{e}_1)(\mathbf{p}\mathbf{e}_2)}{(k^0)^2} + (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \right]^2 \right\} d\Omega. \quad (6)$$

Перейдем в (6) в лабораторную систему отсчета, связанную с электроном. В этом случае  $p = 0$ , а  $V$  — можно рассматривать как скорость движения позитрона. То же самое относится и к величине  $p$  в коэффициенте перед скобками. В данной системе отсчета формула (6) значительно упрощается

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{1 - (\frac{V}{c} \cos \theta)^2} - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega. \quad (7)$$

Для дальнейшего анализа исследуем вспомогательную задачу.

Наблюдатель  $I$ , находящийся в „неподвижной“ (связанной с Землей) системе отсчета (рис. 3), рассматривает некоторую движущуюся со скоростью  $V$  частицу 2, которая в определенный момент времени излучает два противоположно направленных кванта. При  $V = 0$  частоты квантов равны  $\omega_0$ . Угол между скоростью частицы и направлением распространения одного из квантов равен  $\theta$ . В направлении наблюдателя частица имеет составляющую скорости  $V \cos \theta$ .

За счет эффекта Доплера квант, движущийся в направлении наблюдателя, будет обладать повышенной частотой [8]

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (8)$$

Для кванта, движущегося в противоположном направлении, будет наблюдаться так называемое „красное смещение“:

$$\omega_2 = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta}. \quad (9)$$

Используя (8) и (9), найдем величину комплекса  $\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2$ , который входит в формулу (2):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 = \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{\omega_1\omega_2} = \frac{4}{1 - (\frac{V}{c} \cos \theta)^2}. \quad (10)$$

Отметим, что различие в частотах квантов в рассматриваемой задаче определяется различием в условиях наблюдения этих квантов: один квант движется к наблюдателю, другой удаляется от него.

В формуле (7) фактически реализуется рассмотренная вспомогательная задача. При этом под движущейся частицей подразумевается позитрон, а наблюдатель находится на „неподвижном“ электроне. Поэтому, подставляя (10) в (7), найдем

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 \right) - (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{4pk^0} \left\{ \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 \right\} d\Omega. \quad (11)$$

При использовании формулы (10) мы фактически отказались от условия  $k_2 = -k_1$ .

Если в коэффициенте перед скобками в формуле (2) принять  $k^0 = E_+ = m = \omega_1$ , то формулы (2) и (11) становятся тождественными.

Отметим еще один существенный момент, проявляющийся при переходе от системы отсчета, связанной с центром масс электрона и позитрона, к лабораторной системе отсчета, связанной с электроном. Если поделить формулу (9) на формулу (8), то получается результат, отличающийся от результата, полученного в монографиях, например, [9,10].

При делении (9) на (8) и принимая  $c = 1$ , получаем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1 - V \cos \theta}{1 + V \cos \theta}. \quad (12)$$

В [9,10] предлагается следующее соотношение:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{E_+ - p_+ \cos \theta}{m}. \quad (13)$$

Учитывая  $E_+ = m$  и  $p_+ = mV$ , находим

$$\frac{k_2}{k_1} = 1 - V \cos \theta. \quad (14)$$

Формула (14) несколько отличается от формулы (12). Это связано с тем, что формула (14) получена в рамках первого приближения теории возмущений. Поэтому она принципиально неточная. Формула (12) следует из точных формул эффекта Доплера. Таким образом, оставаясь только в рамках первого приближения теории возмущений, невозможно установить эквивалентность формул (1) и (2).

В заключение просуммируем формулу (11) по поляризациям фотонов. Возвращаясь к поляризационным 4 векторам с учетом  $e^0 = 0$  и используя  $\sum_{e_1 e_2} (e_1 e_2)^2 = 2$  [5], найдем

$$d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{4pk^0} \left\{ \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 2 - 4(e_1 e_2)^2 \right| \right\} d\Omega$$

$$= \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \left| 1 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\omega_1 \omega_2} \right| \right\} d\Omega. \quad (15)$$

Знак модуля принят вследствие стандартного использования модуля составного матричного элемента при нахождении дифференциального эффективного сечения процесса [4].

### Применение аннигиляционного излучения в ПЭТ

Учитывая, что в ПЭТ скорости позитронов невелики, а также учитывая (8) и (9), можно записать

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cos^2 \theta} \approx \omega_0^2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (15), получим

$$d\sigma \approx \frac{1}{128\pi^2} \frac{e^4}{pk^0} \left\{ \left| 1 - \frac{(\Delta\omega)^2}{4\omega_0^2} \right| \right\} d\Omega, \quad (17)$$

где обозначено  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Найдем разность частот излучаемых фотонов, т.е. величину  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , используя формулы (8) и (9):

$$\Delta\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} - \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}$$

$$= \omega_0 \frac{2\frac{v}{c} \cos \theta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cos^2 \theta}. \quad (18)$$

При аннигиляции позитрона и электрона, находящегося в точке  $a$  ПЭТ (рис. 1), вылетают два  $\gamma$ -кванта с энергиями  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  в противоположных направлениях. Детекторы в кольце  $I$  с точки зрения эффекта Доплера в системе отсчета, связанной с электронами, играют роль неподвижных наблюдателей.

По количеству квантов, вылетающих в разных направлениях, процесс сферически симметричен. Поэтому плотность детекторов в кольце  $I$  должна быть равномерной. Однако частоты квантов, а следовательно, и их энергии, в зависимости от направления на детектор  $\theta$  за счет эффекта Доплера могут различаться на величину  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Если угол  $\theta = 0$ , т.е. позитрон движется по линии  $A-A$ , соединяющей детекторы  $\gamma$ -излучения  $D_1$  и  $D_2$ ,

разность частот фотонов будет максимально возможной и формула (18) преобразуется к виду

$$\Delta\omega_{\max} = \omega_0 \frac{2\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (19)$$

Учитывая  $v \ll c$ , найдем

$$\frac{\Delta\omega_{\max}}{2\omega_0} = \frac{v}{c}. \quad (20)$$

Величину  $\omega_0$  можно получить, исходя из приближенного равенства  $\hbar\omega_0 \approx mc^2$ . В этом случае

$$\Delta\omega_{\max} = 2 \frac{V}{\lambda}, \quad (21)$$

где  $\lambda = \frac{\hbar}{mc} = 3.86159 \cdot 10^{-13} m$  — комптоновская длина волны электрона [11].

Оценим величину  $\Delta\omega_{\max}$ . Позитрон при распаде используемого в ПЭТ радиофармацевтического элемента вылетает с очень большой скоростью, близкой к скорости света. Но двухфотонная аннигиляция возможна только при малой скорости частиц через образование позитрония [7]. При большой энергии позитрона возникают либо мезоны, либо адроны. Поэтому для возникновения двухфотонной аннигиляции позитрон должен значительно замедлиться. Энергия позитрония равна

$$E = mc^2 \frac{\alpha^2}{4},$$

где  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  — постоянная тонкой структуры [7]. Полагая энергию позитрона в электрическом поле электрона  $E_p = \frac{p^2}{2m}$  равной половине энергии позитрония, найдем импульс позитрона из соотношения  $mc^2 \frac{\alpha^2}{8} = \frac{p^2}{2m}$ . Так как скорость позитрона невелика,  $p = m_0 c \frac{\alpha}{2}$ , а скорость позитрона  $V = c \frac{\alpha}{2}$ . Используя (21), найдем  $\Delta\omega_{\max} = \frac{c\alpha}{\lambda} \approx 0.0057 \cdot 10^{21} s^{-1}$ . Найденная разность частот эквивалентна 3.75 keV. Если принять энергию аннигиляционного фотона 511 keV, то полученная разность частот составляет 0.73%. Данная величина вполне приемлема для измерения современными детекторами  $\gamma$ -излучения.

Ранее при оценке реальной формы распределения аннигиляционного излучения (рис. 2) отмечалось, что отношение  $\frac{p^2}{(k^0)^2} = \frac{\alpha^2}{4} \sim 10^{-5}$ . Действительно, из формулы  $mc^2 \frac{\alpha^2}{8} = \frac{p^2}{2m}$  следует

$$\frac{p^2 c^2}{m^2 c^4} = \frac{p^2}{(k^0)^2} = \frac{\alpha^2}{4}.$$

С практической точки зрения, регистрируя разность частот или энергий, вылетевших в противоположных направлениях квантов, используя максимальное значение этой разности за время измерения  $\Delta\omega_{\max}$ , можно

оценить действительную скорость движения позитронов (21) перед аннигиляцией. Скорость позитрона после его замедления в тканях зависит от механических параметров ткани, через которую он движется: плотности, вязкости и т.д., поэтому в процессе диагностики организма с помощью ПЭТ можно получить дополнительные механические характеристики ткани.

## Заключение

По результатам проведенного анализа можно сделать следующие выводы.

Формулы (1) и (2) адекватно в разных системах отсчета описывают разлет фотонов при аннигиляции электрона и позитрона.

В лабораторной системе отсчета, связанной с электроном (или позитронно-эмиссионным томографом), угловое распределение количества вылетающих фотонов сферически-симметрично, однако за счет различия в условиях наблюдения квантов вследствие эффекта Доплера возникает различие в частотах излученных квантов.

При переходе в систему отсчета, связанную с центром масс электрона и позитрона, различие в частотах излученных квантов редуцируется в угловое распределение интенсивности аннигиляционного излучения, которое также является следствием эффекта Доплера.

Исследуя угловое распределение интенсивности электромагнитного излучения при аннигиляции позитрона и электрона в системе их центра масс, мы исследуем не аннигиляцию, а совершенно другое физическое явление — эффект Доплера, который сопровождает аннигиляционное излучение.

Измеряя разность частот или энергий квантов, вылетающих в противоположных направлениях, можно оценить скорость движения позитронов. Учитывая связь скорости движения позитрона, после его замедления в тканях организма, с механическими характеристиками ткани, через которые он пролетает: плотностью, вязкостью и т.д., можно получить информацию о величине этих характеристик.

## Список литературы

- [1] Волобуев А.Н. Основы медицинской и биологической физики. Самара: Самарский дом печати, 2011. С. 636.
- [2] Dirac P.A.M. Direction in physics / Ed. H. Hora, J.R. Shepanski. NY: John Wiley & Sons, 1978. 78 p.
- [3] Thomson M. Modern Particle Physics. Cambridge: University Printing House, 2013. P. 96–97.
- [4] Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: ИИЛ, 1956. С. 302–304.
- [5] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1976. С. 203–205.
- [6] Фейнман Р. Квантовая электродинамика. Курс лекций. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009. С. 135–137.
- [7] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. Т. 4. С. 413, 421.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1967. С. 156.
- [9] Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. С. 280.
- [10] Бьеркен Дж.Д., Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. С. 138.
- [11] Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М.: Наука, 1990. С. 576.