

01;03

## **Формирование особенностей на поверхности раздела жидких диэлектриков в горизонтальном электрическом поле при наличии тангенциального разрыва скоростей**

© Н.М. Зубарев<sup>1,2</sup>, Е.А. Кочурин<sup>1,¶</sup><sup>1</sup> Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия<sup>2</sup> Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

¶ E-mail: kochurin@ier.uran.ru

Поступило в Редакцию 6 октября 2017 г.

Исследована нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в условиях подавления неустойчивости Кельвина–Гельмгольца тангенциальным электрическим полем. Выявлено два широких класса точных аналитических решений уравнений движения, описывающих эволюцию пространственно локализованных, а также периодических возмущений границы. Оба класса решений демонстрируют тенденцию к формированию сильных особенностей — разрывов границы с формально бесконечной амплитудой. Знак разрыва определяется знаком скачка скоростей жидкостей на поверхности раздела.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.05.45705.17070

Граница раздела двух жидкостей неустойчива при наличии тангенциального разрыва скоростей [1]. В отсутствие капиллярных и гравитационных сил развитие этой неустойчивости — так называемой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца — приводит к формированию на границе слабых особенностей, для которых поверхность раздела остается гладкой, а ее кривизна неограниченно возрастает за конечное время [2,3]. Гидродинамические неустойчивости границы могут подавляться горизонтальным электрическим полем (см., например, [4,5]), которое, как известно [6], оказывает стабилизирующее воздействие на поверхность раздела непроводящих жидкостей (вертикальное поле, напротив, дестабилизирует границу [6,7]), оказывая на нее влияние,

сходное с влиянием тангенциального разрыва скоростей [8,9]). В настоящей работе исследуется нелинейная динамика границы раздела диэлектрических жидкостей в состоянии нейтрального равновесия, когда дестабилизирующее влияние разрыва скоростей в линейном приближении полностью компенсируется стабилизирующим влиянием горизонтального электрического поля. В такой ситуации поведение границы определяется только влиянием нелинейности, и, исследуя характер движения жидкостей, можно делать выводы о том, как нелинейность себя проявляет. Нами будет продемонстрировано, что в задаче возникает тенденция к формированию сильных особенностей — точек, в которых не только кривизна границы, как это было для слабых особенностей типа Мура [2], но и сама граница раздела претерпевает разрыв.

Итак, рассмотрим динамику поверхности раздела двух несмешивающихся идеальных непроводящих жидкостей с плотностями  $\rho_{1,2}$  и проницаемостями во внешнем горизонтальном электрическом поле величиной  $E$  (индексы 1 и 2 относятся соответственно к нижней и верхней жидкости). В невозмущенном состоянии поверхность раздела представляет собой плоскость  $y = 0$  (ось  $y$  направлена по нормали к этой плоскости, а направление оси  $x$  совпадает с направлением внешнего поля). Жидкости двигаются вдоль оси  $x$  со скоростями  $V_{1,2}$ , т.е. имеется ненулевой скачок скоростей  $\Delta V = V_1 - V_2$ . Для определенности будем считать, что  $\Delta V > 0$ . Удобно также положить  $\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = 0$ , что соответствует рассмотрению задачи в системе центра масс. Мы ограничимся анализом двумерных течений, когда все величины зависят от двух пространственных переменных:  $x$  и  $y$ . Тогда в возмущенном состоянии форма поверхности раздела задается уравнением  $y = \eta(x, t)$ .

В недавней работе [10] было показано, что при выполнении условия  $\varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2$  для параметров жидкостей (примеры пар таких жидкостей приведены в [11]) и условия нейтрального равновесия  $\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 E^2 = \varepsilon_1 \rho_1 (\Delta V)^2$  (здесь  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная) для исследуемой системы возможна реализация особого режима движения жидкостей, когда в определенной системе координат жидкости двигаются вдоль силовых линий электрического поля. В квадратично-нелинейном приближении уравнения движения тогда сводятся к един-

ственному интегродифференциальному уравнению

$$\eta_t = c [\hat{H}(\eta\eta_x)_x - (\eta\hat{H}\eta_x)_x], \quad (1)$$

где  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта, действие которого в Фурье-пространстве определяется как  $\hat{H}_k = i \operatorname{sign}(k)$ , а  $c = 2\rho_1\rho_2\Delta V/(\rho_1 + \rho_2)^2$  — постоянная, имеющая размерность скорости.

Важнейшей особенностью нелинейного уравнения (1) является то, что оно допускает построение точных аналитических решений, описывающих эволюцию пространственно локализованных, а также периодических возмущений границы. Его удобно переписать с использованием аналитических продолжений функции  $\eta$  в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной переменной  $x$ :  $\eta^\pm = \hat{P}^\pm \eta$ , где  $\hat{P}^\pm = (1 \mp i\hat{H})/2$  — соответствующие проекторы. Уравнение (1) на функцию  $\eta \equiv \eta^+ + \eta^-$  принимает тогда компактный вид

$$\eta_t^+ = 2i\hat{P}^+(\eta^+\eta_x^-)_x, \quad (2)$$

где мы перешли к безразмерным обозначениям путем замены  $\eta \rightarrow \eta\lambda$ ,  $x \rightarrow x\lambda$  и  $t \rightarrow t\lambda/c$  (здесь  $\lambda$  — характерная длина волны). В работе [10] был выявлен широкий класс несингулярных решений уравнения (2), описывающих распространение и взаимодействие системы уединенных волн — так называемых рациональных солитонов. Амплитуда возмущений границы для этих решений всегда оставалась финитной. Покажем теперь, что уравнение (1) допускает и сингулярные решения, описывающие коллапс поверхностных волн.

Будем искать решение уравнения (2) в виде суммы  $N$  полюсов

$$\eta^+(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{S_n/2}{x - p_n(t)}. \quad (3)$$

Здесь  $S_n$  — вещественные параметры, а комплексные функции  $p_n(t)$  задают положения полюсов (они находятся в нижней полуплоскости комплексной переменной  $x$ , т. е. справедливо  $\operatorname{Im} p_n < 0$ ). Каждый полюс соответствует отдельному локализованному возмущению границы

$$\eta = \sum_{n=1}^N \eta_n, \quad \eta_n = \frac{S_n(x - \operatorname{Re} p_n(t))}{(x - \operatorname{Re} p_n(t))^2 + (\operatorname{Im} p_n(t))^2},$$

которое затухает при  $|x| \rightarrow \infty$  как  $\eta_n \approx S_n/x$ . Подстановка ряда (3) в уравнение (2) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений (горизонтальная черта обозначает комплексное сопряжение)

$$\frac{dp_n}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{iS_j}{(p_n - \bar{p}_j)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

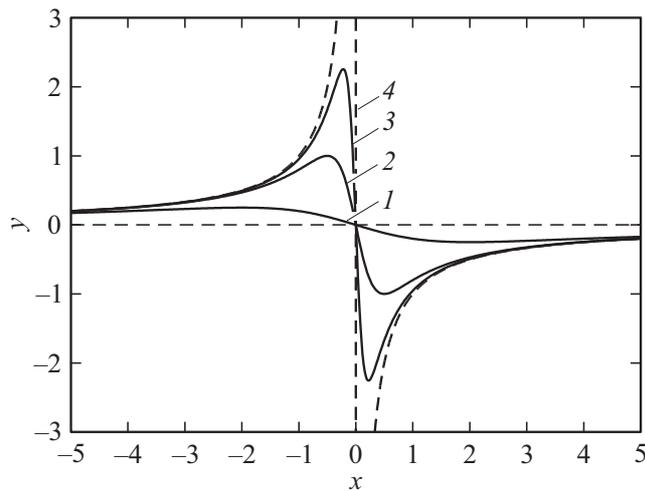
Система (4) описывает движение  $N$  взаимодействующих полюсов по комплексной плоскости; она может демонстрировать довольно сложное поведение. Рассмотрим наиболее простой, но важный случай  $N = 1$ . В этой ситуации без потери общности можно положить  $\operatorname{Re} p_1 = 0$ . Форма поверхности раздела будет задаваться формулой

$$\eta(x, t) = sx/(x^2 + a^2(t)), \quad (5)$$

где для удобства мы обозначили  $a(t) = -\operatorname{Im} p_1(t)$  и  $s = S_1$ . Система (4) тогда сводится к дифференциальному уравнению  $da/dt = s/a^2$ , которое описывает движение полюса по мнимой числовой оси. При  $s > 0$  полюс отдаляется от начала координат,  $a(t) \sim t^{1/3}$ , что соответствует релаксации исходного возмущения границы:  $\eta(x, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В случае  $s < 0$  особая точка движется к вещественной оси:  $a(t) = [3s(t - t_c)/4]^{1/3}$ , достигая начала координат за конечное время  $t_c = 4a^3(0)/|3s|$ . Амплитуда возмущения поверхности раздела при этом неограниченно возрастает, и в момент времени  $t_c$  происходит формирование сингулярности:  $\eta(x, t_c) = s/x$ . В точке  $x = 0$  функция  $\eta$ , задающая форму границы, испытывает бесконечный разрыв, меняя знак с положительного на отрицательный, как показано на рис. 1. Отметим, что знак разрыва изменится на противоположный для отрицательного значения  $\Delta V$ . Это связано с инвариантностью уравнения (1) относительно одновременной замены  $\Delta V \rightarrow -\Delta V$  (или, что то же самое,  $c \rightarrow -c$ ) и  $\eta \rightarrow -\eta$ .

Другой класс точных решений уравнения (1) можно построить, если положить, что возмущение границы представимо в виде суммы  $N$  периодических функций — гармоник Фурье. Действительно, подстановка

$$\eta^+(x, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \exp(inx)$$

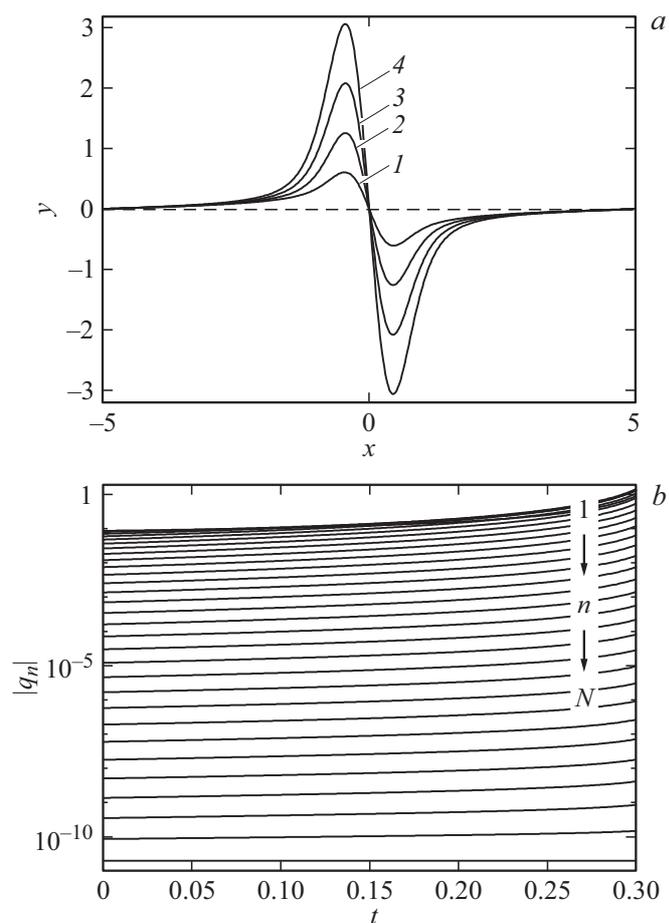


**Рис. 1.** Профиль поверхности жидкости в последовательные моменты времени  $t = 0$  (1), 4.50 (2), 7.50 (3), 10.67 (4) для  $a(0) = 2$  и  $s = -1$ .

в (2) приводит к системе  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд  $q_n(t)$

$$\frac{dq_n}{dt} = 2in \sum_{m=1}^{N-n} m \bar{q}_m q_{m+n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Важно, что система (6) замкнутая, т.е. особенностью уравнения (2) является то, что взаимодействие гармоник не приводит к появлению новых гармоник с номерами, большими  $N$ , или, иными словами, не происходит перекачки энергии в высшие гармоники. В случае  $N = 1$  система (6) сводится к тривиальному уравнению  $dq_1/dt = 0$ , т.е. решение, содержащее единственную гармонику, является стационарным: учет квадратичных нелинейностей не нарушает нейтрального равновесия границы. При  $N > 1$  описываемая системой (6) динамика становится уже достаточно сложной, однако амплитуда высшей гармоники всегда остается постоянной:  $dq_N/dt = 0$ .



**Рис. 2.** *a* — профиль поверхности жидкости в последовательные моменты времени  $t = 0$  (1), 0.16 (2), 0.22 (3), 0.25 (4); *b* — эволюция амплитуд гармоник Фурье для  $s = -1$ ,  $p = 2$  и  $N = 30$ .

Тот факт, что точное решение уравнения (1) может быть представлено в виде конечного ряда Фурье, дает возможность исследовать динамику границы практически произвольной формы при помощи

численного решения системы (6). Рассмотрим в качестве примера динамику возмущения границы, задаваемого функцией Доусона

$$\eta(x, 0) = -s\hat{H} \exp[-(px)^2],$$

где  $p$  и  $s$  — константы. Подобная форма границы качественно близка к рассмотренной выше форме (5); параметр  $s$ , как и ранее, будет определять симметрию возмущения границы раздела. Будем использовать аппроксимацию формы границы конечным рядом Фурье с  $N = 30$ , причем для удобства сопоставления результатов с показанным на рис. 1 частным решением (5) выберем пространственный период равным 10. На рис. 2, *a* показана эволюция возмущения для  $s < 0$ . Из сравнения рисунков видно, что динамика поверхности для обоих случаев во многом аналогична: наблюдается тенденция к формированию разрыва. На рис. 2 *b* показана, временная динамика амплитуд гармоник. Как видно, амплитуды всех гармоник (кроме гармоники  $N$ ) неограниченно нарастают со временем, причем рост крупномасштабных гармоник происходит быстрее, чем мелкомасштабных. Особенностью этого решения, отличающего его от предыдущего случая, является то, что ширина формирующегося разрыва остается конечной. Описанные результаты справедливы для  $\Delta V > 0$ . При  $\Delta V < 0$  возмущение с  $s < 0$  будет затухать (это связано с инвариантностью исходного уравнения (1) относительно одновременной замены  $\Delta V \rightarrow -\Delta V$  и  $t \rightarrow -t$ ), а нарастать будет возмущение с  $s > 0$  (это уже следствие инвариантности относительно замен  $\Delta V \rightarrow -\Delta V$  и  $\eta \rightarrow -\eta$ ).

Таким образом, анализ нелинейного интегродифференциального уравнения (1), описывающего эволюцию границы раздела диэлектрических жидкостей в условиях подавления неустойчивости Кельвина–Гельмгольца тангенциальным электрическим полем, продемонстрировал тенденцию к образованию сильных особенностей — разрывов с формально бесконечной амплитудой. Знак разрыва коррелирует со знаком скачка скоростей  $\Delta V$ . Если  $\Delta V > 0$ , то в области разрыва будет  $\eta_x \rightarrow -\infty$ . Если, напротив,  $\Delta V < 0$ , то  $\eta_x \rightarrow +\infty$ . Подобное поведение может быть связано с тенденцией к формированию вихревых спиралей (см., например, [12]).

Работа выполнена в рамках темы госзадания 0389-2015-0023 при поддержке РФФИ (проекты № 16-38-60002\_мол\_а\_дк, 16-08-00228\_а и 17-08-00430\_а), Президиумов РАН и УрО РАН (проекты № 2 и 18-2-2-15, соответственно) и Совета по грантам Президента РФ (проект СП-132.2016.1).

**Список литературы**

- [1] Степаняни Ю.А., Фабрикант А.Л. // УФН. 1989. Т. 159. С. 83–123.
- [2] Moore D.W. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1979. V. 365. P. 105–119.
- [3] Зубарев Н.М., Кузнецов Е.А. // ЖЭТФ. 2014. Т. 146. В. 1. С. 194–204.
- [4] Barannik L.L., Parageorgiou D.T., Petropoulos P.G. // Math. Comp. Sim. 2012. V. 82. P. 1008–1016.
- [5] Коровин В.М. // ЖТФ. 2017. Т. 87. В. 9. С. 1306–1311.
- [6] Melcher J.R. Field-coupled surface Waves. Cambridge: MIT Press, 1963, 190 p.
- [7] Жакин А.И. // УФН. 2013. Т. 183. В. 2. С. 153–177.
- [8] Зубарев Н.М., Зубарева О.В. // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 7. С. 21–29.
- [9] Zubarev N.M. // Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 128–131.
- [10] Зубарев Н.М., Кочурин Е.А. // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 104. В. 4. С. 277–282.
- [11] Kochurin E.A., Zubarev N.M., Zubaeva O.V. // Phys. Rev. E. 2013. V. 88. P. 023014.
- [12] Krasny R. // J. Comput. Phys. 1986. V. 65. P. 292–313.