03

Ускорение потока и увеличение энтальпии в источнике ионизованного газа электрическим полем в режиме постоянного числа Маха

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская обл., Россия
e-mail: ank@aerocentr.msk.su, arkadi.kucherov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 22 февраля 2017 г.)

В рамках задачи управления радиальным источником (вихреисточником) исследована возможность в режиме числа Маха, поддерживаемого постоянным с помощью энергоподвода и внешней силы (в данном случае, радиальным электрическим полем), перейти от одних характерных физических параметров (энтальпии торможения, температуры, давления, плотности и т.д.) к другим, заданным. Показаны изменения полной энтальпии при вариации энергетического и силового параметров подобия в случае задания силы на единицу массы и на единицу объема при равенстве конвекционного тока и тока проводимости, а также при преобладании тока проводимости над конвекционным, и наоборот. В пределе пренебрежимо малого конвекционного тока или тока проводимости показан переход к аналитическим решениям для случая чисто энергетического воздействия и чисто силового. Получены аналитические зависимости приращения скорости (кинетической энергии), температуры и полной энтальпии от интенсивности внешней силы и энергоподвода, от числа Маха и от протяженности зоны воздействия.

DOI: 10.21883/JTF.2018.05.45893.2214

Введение

В [1] предложена процедура перехода с помощью воздействия на источник энергоподводом и внешней силой к новым заданным физическим параметрам источника, в частности, к параметрам с увеличенным теплосодержанием или кинетической энергией, в общем случае с измененной полной энтальпией. В конкретных ситуациях (полный набор, перечисленный в [1], включает четыре ситуации) надо рассматривать отличительные особенности, возможные и трудно реализуемые с прикладной точки зрения варианты. Параллельно развивается общий анализ невозможных (недопустимых) и возможных (разрешенных) случаев реализации ускорения потока и увеличения полной энтальпии с точки зрения физических законов, в первую очередь законов сохранения массы, количества движения, энергии. В одномерных течениях типа источник, включая цилиндрический и сферический, важную роль играет явление запирания при достижении числом Маха значения единица.

В магнитной газодинамике наиболее часто при теоретическом анализе и в эксперименте цитируют работы [2,3], в которых выполнены первые оценки объемной электрической (электромагнитной) силы в широком диапазоне физических параметров для явлений, оказывающих ускоряющее или тормозящее действие на ионизованный газ или жидкость, на нагрев рабочего вещества. В вышеупомянутых и последующих обзорах и книгах [4–10] наряду с многомерными задачами рассматривались одномерные и квазиодномерные варианты, в которых параметры потока и воздействующего поля зависят от одной продольной по потоку переменной x (или r), хотя в целом задача может быть 2- или 3-мерной. Существует направление одномерных и квазиодномерных магнитогидродинамических течений в каналах [3,6,7], имеющее не только теоретическое [5], но и прикладное значение [4]. Обзор экспериментальных работ по МГД-ускорителю содержится, например, в [8], расчетно-теоретических работ — в [9,10]. Рассматривалось преимущественно действие на поток магнитной силы, равной векторному произведению плотности тока $\mathbf{j}$ на индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$: $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ — где векторы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{B}$ перпендикулярны друг к другу и к вектору скорости $\mathbf{u}$.

В настоящей работе в рамках проблемы управления источником [1,11] (вихреисточником, стоком) исследуется воздействие на поток внешними источниками энергии и силы. Цель воздействия — увеличение на заданном участке потока ионизованного газа $[r_1, r_2]$ кинетической энергии (потенциально скорости) и полной энтальпии с последующим моделированием в лаборатории условий полета на больших высотах. Можно организовать разгон ионизованного газа электрическим полем, создав разность потенциала сетками (системой металлических сеток), хорошо пропускающими газ, на протяжении всего отрезка $[r_1, r_2]$. Газ протекает между двумя плоскими поверхностями, расположенными на расстоянии Δz, и ограничен двумя радиальными стенками с углом раствора $\Delta\varphi$. Предполагается малость поперечной силы по сравнению с радиальной, пренебрегаем индуцированным (вторичным, вычисляемым из уравнений Максвелла) магнитным полем B по сравнению с заданным электрическим полем E. Действия (плотности) конвекционного тока $j_u = \rho_e u$, A/m^2, и (плотности) тока проводимости

$j_E = \sigma E$, A/m преобладают над действием индуцированного магнитным полем (плотности) тока $j_B = \sigma u B$, где ρ_e — плотность электрических зарядов, C/m^3, σ — удельная проводимость, S/m, u скорость ионизованного газа, m/s [5–7]. Искомые газодинамические и электродинамические величины зависят от одной радиальной координаты r в цилиндрической системе координат (r, φ, z).

1. Физико-математическая постановка задачи

Физические стационарные уравнения сохранения массы, импульса (количества движения), энергии и уравнение состояния имеют следующий вид в цилиндрических координатах в квазиодномерном приближении [5–7]:

$$r\rho u = \frac{m_0}{2\pi}, \tag{1}$$

$$\rho u \frac{du}{dr} + \frac{dp}{dr} = \frac{\rho_e}{2\pi} E_r(r), \tag{2}$$

$$\rho u \frac{dH}{dr} = \frac{\mathbf{jE}}{2\pi} = \frac{j_r E_r(r)}{2\pi} = \frac{\sigma E_0^2 f^2(r)}{2\pi} + \frac{u(r)}{2\pi u_0} \times \begin{cases} \rho_e u_0 E_0 f(r), \\ q_e u_0 E_0 \rho(r) f_Q(r), \end{cases} \tag{3}$$

$$p = \rho \frac{R}{\mu_m} T. \tag{4}$$

Здесь ρ — плотность газа, kg/m^3; m_0 — расход газа, kg/s; p — давление, Pa/m^2; ρ_e — плотность электрических зарядов; $E_r = E_0\ f(r)$ — радиальная компонента напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, V/m, E_0 — характерное значение напряженности электрического поля E_r, $f(r)$ — безразмерная функция распределения; $j_r = \sigma E_r + \rho_e u = \sigma E_0 f(r) + \rho_e u(r)$ — радиальная компонента плотности тока $\mathbf{j}$ (ток проводимости плюс конвекционный ток), A/m^2; $j_r = \sigma E_r + q_e \rho(r) u(r)$ — вариант с заданным распределением зарядов q_e на единицу массы, C/kg (в этом случае $E_r = E_0 f_Q(r)$ — ток и функция распределения поля другие); R — универсальная газовая постоянная, J/(K kmol), μ_m — молярная масса, kg/kmol; T — температура, K. Обезразмерим уравнения.

Выберем в качестве характерных величин, как принято в задачах с источником, минимальный радиус r_0 (на котором число Маха M равно единице), параметры заторможенного газа — плотность ρ_0, давление p_0, температуру T_0, энтальпию $h_0 = C_p T_0$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении, максимальную скорость $u_0 = \sqrt{(2h_0)}$ — скорость истечения в вакуум, а также характерную напряженность электрического поля E_0, плотности тока проводимости $j_{0E} = \rho E_0$ (примем $\sigma = \mathrm{const}$) и конвективного тока $j_{0u} = \rho_e u_0$. Получим систему уравнений (специальных обозначений для безразмерных величин не вводим):

$$r\rho u = m = \frac{m_0}{2\pi r_0 \rho_0 u_0}, \tag{5}$$

$$\rho u \frac{du}{dr} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{dp}{dr} = \frac{F(r)}{2}, \quad F(r) = \begin{cases} F_E f(r) \\ \rho(r) F_Q f_Q, \end{cases}$$

$$F_E = \frac{\rho_e E_0 r_0}{2\pi \rho_0 h_0}, \quad F_Q = \frac{q_e E_0 r_0}{2\pi h_0}, \tag{6}$$

$$\rho u \frac{dH}{dr} = g(r) + u(r) F(r), \quad g(r) = \begin{cases} Q_E f^2(r) \\ Q f_Q^2(r) \end{cases},$$

$$Q_E = Q = \frac{\sigma E_0^2 r_0}{2\pi \rho_0 u_0 h_0}, \tag{7}$$

$$p = \rho T. \tag{8}$$

Здесь F_E, F_Q — силовые параметры подобия в вариантах плотности заряда, заданной на единицу объема, ρ_e, и на единицу массы, q_e; Q_E и Q — соответствующие энергетические параметры подобия. Последние одинаковы по структурной зависимости от физических величин, но будут различны, как и функции распределения $f(r)$, $f_Q(r)$, ввиду различия силы $F(r)$ в верхней и в нижней строках в (6), т. е. ввиду различия заданных плотностей заряда ρ_e и q_e. Параметры подобия: показатель адиабаты γ, безразмерный расход m (зависит только от γ), силовой параметр F_E (или F_Q), энергетический параметр Q_E (или Q), который описывает джоулево тепло, диссипативные потери энергии поля. Второе слагаемое в правой части уравнении сохранения энергии описывает работу внешней силы и может быть отрицательным. Решение в отсутствие энергоподвода и внешней силы при $F_E = F_Q = 0 = Q_E = Q$ имеет две ветви, сверхзвуковую и дозвуковую, в вакуум $(1 < M < \infty)$ или в затопленное пространство $(0 < M < 1)$; еще две ветви получим при изменении направления течения из вакуума и из затопленного пространства до минимального радиуса, в котором $M = 1$. Внешнее воздействие ограничивает область существования решений как в сверхзвуковом, так и в дозвуковом вариантах; ограничения связаны с обращением числа Маха в единицу и запиранием потока.

Потребуем сохранения значения числа Маха $M^2 = 2[u(r)]^2/(\gamma - 1)T(r) = M_1^2 = \mathrm{const}$, тем самым „отодвинем“ критическое сечение с числом $M = 1$ и устраним возможность запирания стационарного течения. В настоящей работе остановимся прежде всего на режиме I (в вакуум), на вариантах воздействия, приводящего к увеличению скорости и температуры, в конечном итоге — полной энтальпии. Такой поток может быть использован при моделировании условий полета летательного аппарата в аэродинамической трубе.

Решение для источника без воздействия задает начальные условия при координате r_1:

$$r_1 = \frac{m}{\left[(1 - T_1) T_1^{\frac{2}{\gamma - 1}}\right]^{1/2}}, \quad T_1 = \frac{1}{1 + \frac{(\gamma - 1) M_1^2}{2}},$$

$$\rho_1 = T_1^{\frac{1}{\gamma - 1}}, \quad p_1 = \rho_1 T_1, \quad u_1^2 = 1 - T_1. \tag{9}$$

Условие $M^2 = M_1^2 = \text{const}$ с учетом невозмущенного решения (9) в начальном сечении зоны воздействия дает связь искомых величин полной энтальпии $H(r)$, температуры $T(r)$, скорости $u(r)$, давления $p(r)$, плотности $\rho(r)$ в зоне:

$$M^2(r) = \frac{2u^2(r)}{(\gamma-1)T(r)} = M_1^2,$$

$$H(r) = \frac{T(r)}{T_1} = \frac{u^2(r)}{u_1^2} = \left(\frac{r_1\rho_1}{r\rho}\right)^2 = \left(\frac{rp}{r_1p_1}\right)^2. \quad (10)$$

Из (1)–(8) производную dM/dr запишем как функцию энергоподвода $g(r)$ и внешней силы $F(r)$ и приравняем нулю. Получим связь H с $g(r)$ и $F(r)$:

$$\frac{1-M_1^2}{M_1}\frac{dM}{dr} = -\frac{1}{rT_1} + \frac{D_1 g(r)}{\rho u T(r)} - \frac{F(r)}{s\rho T(r)} = 0,$$

$$H(r) = \frac{D_1 r g(r)}{\rho u} - \frac{rF(r)}{s\rho}, \quad D_1 = \frac{\gamma M_1^2 + 1}{2},$$

$$s = 2\,\frac{\gamma-1}{\gamma+1}. \quad (11)$$

Замкнули систему уравнений, свели задачу к решению уравнения (3) или (7) для $H(r)$. Функции распределения электрического поля $f(r)$, $f_Q(r)$ находим из (11) в процессе решения уравнения. Свободными параметрами (подобия) остаются силовой и энергетический F_E, Q_E или F_Q, Q. Напомним, что энергоподвод задан на единицу объема и в верхней, и в нижней строках уравнения (7), но сила в нижних строках уравнений (6) и (7) — на единицу массы. Отношение силовых параметров F_E, F_Q к энергетическим Q_E, Q есть отношение конвекционного тока к току проводимости $F_E/Q_E = j_{0u}/j_{0E} = \rho_e u_0/\sigma E_0$, $F_Q/Q = j_{0u}/j_{0E} = \rho_0 q_e u_0/\sigma E_0$. Следовательно, силовой эффект преобладает над энергетическим при $F_E > Q_E$, $F_Q > Q$ $(j_{0u} > j_{0E})$, энергетический — при $F_E < Q_E$, $F_Q < Q$ $(j_{0u} < j_{0E})$.

2. Результаты. Влияние энергетических и силовых параметров

2.1. Равные исходные ток проводимости и конвекционный ток, $F_E = Q_E$, E-вариант

На рис. 1, *a* построены распределения температуры $T(r)$, скорости $u(r)$, полной энтальпии $H(r)$, давления $p(r)$, плотности $\rho(r)$ для E-варианта (энергия и внешняя сила заданы на единицу объема) при равных значениях энергетического и силового параметров $Q_E = 0.5 = F_E$. Отметим монотонный рост температуры, скорости, полной энтальпии и давления (кривые *1–4*) и убыль плотности (5). Функции распределения электрического поля $f(r)$ (рис. 1, *b*, кривые *6*), внешней силы $F(r)$ (7) и энергоподвода $g(r)$ (8), возрастают с ростом r. На рис. 1, *c* показаны приращения полной энтальпии ΔH, температуры ΔT и скорости Δu (кривые *9–11*). Упомянутые величины растут с увеличением темпа роста.

Наложенное ограничение на процесс ускорения и нагрева — постоянное число Маха, $M = M_1 = 1.5$ — задает начальное сечение r_1, величину $f_1 = f(r_1)$ и дальнейшее изменение распределения $f(r)$ электрического поля. Умножив уравнение (7) на радиус r и проинтегрировав обе части уравнения по длине зоны воздействия, получим (для E- и Q-вариантов соответственно)

$$m(H_2 - H_1) = Q_E \int_{r_1}^{r_2} r f^2(r)dr + mF_E \int_{r_1}^{r_2} f(r)/\rho(r)dr$$

$$= Q_E I_E + mF_E I_{FE} = Q_{E,new} + mF_{E,new},$$

$$I_E = \int_{r_1}^{r_2} r f^2(r)dr, \quad I_{FE} = \int_{r_1}^{r_2} f(r)/\rho(r)dr, \quad (12)$$

$$m(H_2 - H_1) = Q \int_{r_1}^{r_2} r f_Q^2(r)dr + mF_Q \int_{r_1}^{r_2} f_Q(r)dr$$

$$= QI_Q + mF_Q I_{FQ} = Q_{new} + mF_{Q,new},$$

$$I_Q = \int_{r_1}^{r_2} r f_Q^2(r)dr, \quad I_{FQ} = \int_{r_1}^{r_2} f_Q(r)dr \quad (13)$$

для E- и Q-вариантов (задана ρ_e или q_e соответственно). Новые параметры подобия энергоподвода $Q_{E,new}$, Q_{new}, полученные как произведения исходных параметров Q_E, Q на соответствующие интегралы I_E, I_Q, есть приращения полного потока энтальпии $m\Delta H$ за счет энергоподвода $g(r)$. Аналогично новые параметры подобия внешней силы $F_{E,new}$, $F_{Q,new}$, равные произведению исходных параметров F_E, F_Q на соответствующие интегралы I_{FE}, I_{FQ}, являются приращениями полной энтальпии ΔH за счет работы внешней силы $F(r)$. Для случая, приведенного на рис. 1, *a, b, c*, значения параметров $Q_{E,new}$ и $F_{E,new}$ составили 0.379 и 0.863, т. е. энергетический параметр почти на четверть меньше, а силовой — на 27% больше исходных $Q_E = 0.5 = F_E$. На рис. 1, *b* приведена „нормированная“ (поделенная на интеграл по зоне воздействия I_{FE}) функция распределения электрического поля $f(r)$, кривая *6*. Уточненные силовой и энергетический параметры $F_{E,new}$ и $Q_{E,new}$ (или $F_{Q,new}$, Q_{new}) дают количественное описание вклада внешней силы и энергии в изменение полной энтальпии и потока полной энтальпии. В рассмотренных примерах получили преобладание силового воздействия над энергетическим при равных исходных значениях силового F_E и энергетического Q_E параметров подобия. Таким образом, перенормировка функции поля с обращением в единицу соответствующих интегралов дает уточненную

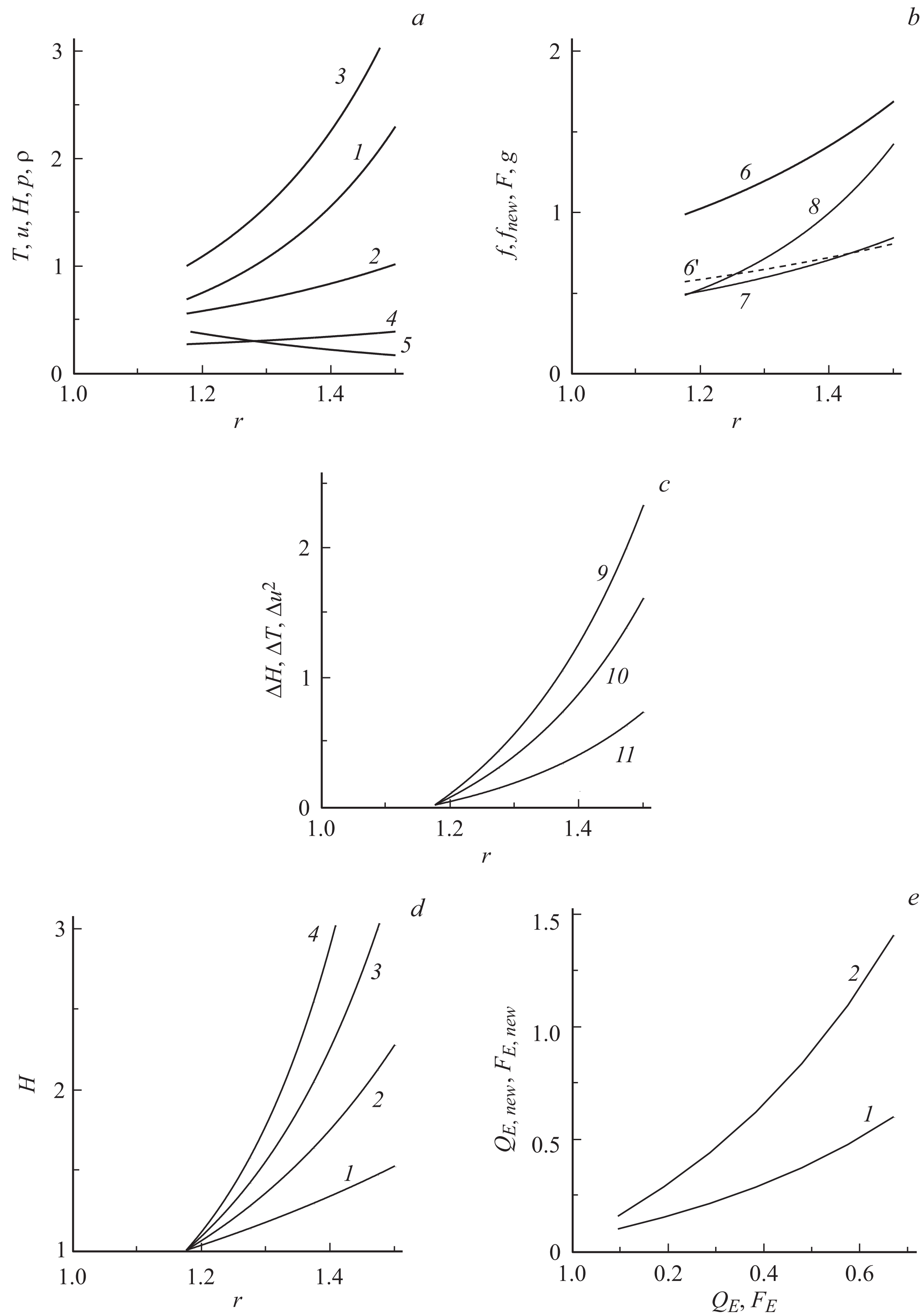

Рис. 1. E-вариант. Распределения безразмерных: a — температуры T (кривая *1*), скорости u (*2*), полной энтальпии H (*3*), давления p (*4*), плотности ρ (*5*) при ускорении и нагреве потока электрическим полем $\mathbf{E}(r)$ в интервале $[r_1 = 1.176,\ r_2 = 1.5]$ при постоянном $M_1 = 1.5$; b — функция распределения поля $f(r)$ (*6*), нормированная $f_{new} = f(r)/I_{FE}$ (*6′*), функции внешней силы $F(r) = F_E f(r)$ (*7*) и энергоподвода $g(r) = Q_E[f(r)]^2$ (*8*); c — приращение полной энтальпии ΔH (*9*), температуры ΔT (*10*), квадрата скорости Δu^2 (*11*); энергетический параметр $Q_E = 0.5$ ($Q_{E,new} = 0.379$), силовой параметр $F_E = 0.5$ ($F_{E,new} = 0.863$); d — $H(r)$ при вариации $Q_E = F_E = 0.1$ (*1*), 0.3 (*2*), 0.5 (*3*), 0.7 (*4*); e — зависимость параметров энергоподвода $Q_{E,new}$ (*1*) и внешней силы $F_{E,new}$ (*2*) от исходных $Q_E,\ F_E$ соответственно.

количественную оценку силового и энергетического воздействия на поток, на изменение полной энтальпии и ее потока.

Рис. $1,d$ показывает изменения полной энтальпии $H(r)$ при равных исходных значениях силового и энергетического параметров $Q_E = F_E = 0.1$ (кривая *1*), 0.3 (*2*), 0.5 (*3*), 0.7 (*4*). Кривые *1* и *2* на рис. $1,e$ описывают изменения вычисленных количественных параметров подобия $Q_{E,new}$ и $F_{E,new}$ с ростом исходных Q_E, F_E. Если поделить $Q_{E,new}$ на расход $m = 0.2588$, находим, на первый взгляд, что приращение полной энтальпии ΔH за счет теплоподвода больше работы внешней силы (кривая *1* выше кривой *2*). Но, растянув ось Q_E в $1/m$ раз, возвращаемся к ситуации — кривая *1* идет ниже кривой *2*, следовательно, работа внешней силы преобладает.

2.2. Равные исходные ток проводимости и конвекционный ток, $Q = F_Q$, Q-вариант

Рассмотрим вариант с внешней силой, заданной на единицу массы, Q-вариант. Работа внешней силы $F(r)$, обусловленной конвекционным током $j = \rho_e u(r)$, может быть отрицательной, как отметили выше, а функция $g(r)$, описывающая джоулево тепло, — только положительной. Рассмотрим положительную $F(r)$; предельный переход $F(r) \to 0$ описывается в следующем разделе.

На рис. $2,a,b,c$ представлены распределения температуры $T(r)$, скорости $u(r)$, полной энтальпии $H(r)$, давления $p(r)$, плотности $\rho(r)$ при $Q = 1 = F_Q$ (рис. $2,a$), а также функция распределения электрического поля $f_Q(r)$ (кривая *6*, „нормированная" — *6'*), функции внешней силы $F(r)$ (7) и энергоподвода $g(r)$ (8) (рис. $2,b$); приращения полной энтальпии ΔH (*9*), температуры ΔT (10), квадрата скорости Δu^2 (11) (рис. $2,c$). В противоположность E-варианту функции поля $f_Q(r)$, внешней силы $F(r)$ и энергоподвода $g(r)$ не возрастающие, а убывающие. Темп роста значений газодинамических величин полной энтальпии $H(r)$, температуры $T(r)$, скорости $u(r)$ и приращений ΔH, температуры ΔT, скорости Δu^2 слабо снижается (рис. $2,a,c$), а не растет, как на рис. $1,a,c$.

На рис. $2,d$ показаны изменения полной энтальпии при вариации параметров энергоподвода и внешней силы $Q = F_Q = 0.1$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 1.5 (*4*), 2 (*5*). Зависимости близки к линейным, но темп роста слабо убывает с увеличением координаты r. На рис. $2,e$ построены зависимости пересчитанных количественных параметров Q_{new} и $F_{Q,new}$ от исходных параметров Q, F_Q. Пересчет нормирует интегралы от функций распределения $f_Q(r)$, $[f_Q(r)]^2$ (и интегралы от функций распределения $f(r)$, $[f(r)]^2$) к единице и придает количественную трактовку новым силовым и энергетическим параметрам подобия $F_{Q,new}$, Q_{new} как приращения энтальпии ΔH и полного потока энтальпии $m\Delta H$ в зоне воздействия.

2.3. Уменьшение силового параметра F_Q, F при постоянном энергетическом Q, Q_E; пределы F_Q, $F \to 0$

На рис. 3 для Q и E-вариантов (рис. $3,a,b$ и c,d соответственно) приводятся полные энтальпии $H(r)$ (рис. $3,a,c$) и функции энергоподвода $g(r)$ (рис. $3,b,d$) при постоянных значениях энергетических параметров и приближающихся к нулевому значению силовых параметров подобия: $F_Q, F_E \to 0$.

В Q-варианте величина энергетического параметра Q равна 1, силовой параметр изменяется от $F_Q = 1.5$ до 0.1 (кривые *1*–*4*). Соответствующие зависимости $H(r)$, $g(r)$ приближаются к предельным при $F_Q = 0$, кривые *5* на рис. $3,a,b$ (соответствующий предел см. в [11], рис. $1,a$, кривая *1*, $H(r)$, рис. $1,b$, кривая *4*, $g(r)$).

Нормировка функции распределения $f_Q(r)$ дала новые значения энергетического и силового параметров $Q_{new} = 0.845$, 0.510, 0.283, 0.168, 0.1475, $F_{Q,new} = 1.323$, 0.686, 0.256, 0.0396, 0 при $F_Q = 1.5$, 1.0, 0.5, 0.1 и 0.

В E-варианте величина энергетического параметра Q_E выбрана равной 0.5, силовой параметр убывает от $F_E = 0.7$ до 0.1 (кривые *1*–*4*). Координата замыкающего сечения $r_2 = 1.5$. Зависимости $H(r)$, $g(r)$ приближаются к предельным при $F_E = 0$, кривая *5* на рис. $3,c,d$ (соответствующий случай см. в [11], рис. $1,a$, кривая *1*, рис. $1,b$, кривая *4*, рис. $5,e$, кривая *1*). В пределе $F_Q = 0 = F_E$ решения для E- и Q-вариантов совпадают. Совпадают также решения при одинаковых начальных координатах зоны r_1 и различных длинах зоны r_2 на совпадающих участках, например при $r_2 = 3$ и 5 (см. [11], рис. $5,e$). Пересчитанные параметры подобия составили $Q_{E,new} = 1.133$, 0.379, 0.138, 0.052 и 0.0323, $F_{E,new} = 2.77$, 0.863, 0.262, 0.048, 0 при $F_E = 0.7, 0.5, 0.3, 0.1, 0$. Напомним решение $H(r)$ в пределе F_Q, $F_E \to 0$, совпадающее для E- и Q-вариантов (T, u, p, ρ определяются из (10)):

$$H = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{D_1}},$$

$$Q_{E,new} = Q_{new} = m\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/D_1} - 1\right] = m[H_2 - H_1]. \tag{14}$$

3. Переход к новым физическим параметрам источника

В [1] на примере предельного случая $F_Q = 0 = F_E$ с заданным теплоподводом $g(r)$ описано, как можно перейти к новому источнику с характерными физическими параметрами минимальным радиусом r_{01}, давлением p_{01}, температурой T_{01}, энтальпией h_{01}, плотностью ρ_{01}, скоростью u_{01}. Предварительным подогревом $g(r)$ в отсутствие внешней силы можно изменить (увеличить или уменьшить) число Маха до заданного значения M_1,

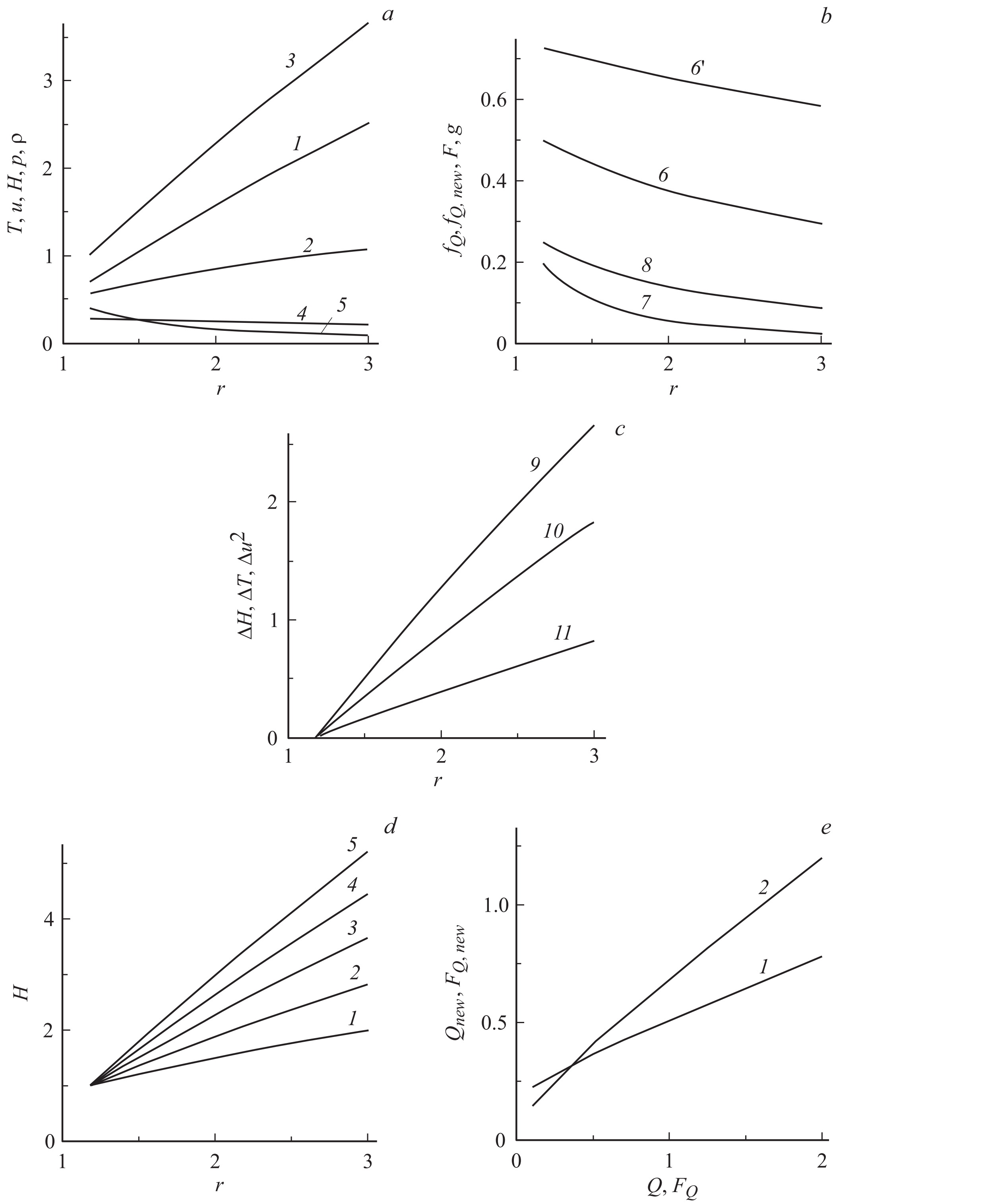

Рис. 2. Q-вариант. Распределения безразмерных: a — температуры T (кривая *1*), скорости u (*2*), полной энтальпии H (*3*), давления p (*4*), плотности ρ (*5*) при ускорении и нагреве электрическим полем $\mathbf{E}(r)$ на отрезке $[r_1 = 1.176, \ \ r_2 = 3]$ при постоянном числе Маха $M_1 = 1.5$; b — функция распределения поля $f_Q(r)$ (*6*), функция $f_{Q,new}(r) = f_Q(r)/I_{FQ}$ (*6'*), внешней силы $F(r) = \rho(r)F_Q f_Q(r)$ (*7*) и энергоподвода $g(r) = Q[f_Q(r)]^2$ (*8*); c — приращение полной энтальпии ΔH (*9*), температуры ΔT (*10*), квадрата скорости Δu^2 (*11*); энергетический параметр $Q = 1$, силовой параметр $F_Q = 1$; d — $H(r)$ при вариации $Q = F_Q = 0.1$ (*1*), 0.5 (*2*), 1 (*3*), 1.5 (*4*), 2 (*5*); e — зависимость параметров энергоподвода Q_{new} (*1*) и внешней силы $F_{Q,new}$ (*2*) от исходных Q, F_Q соответственно.

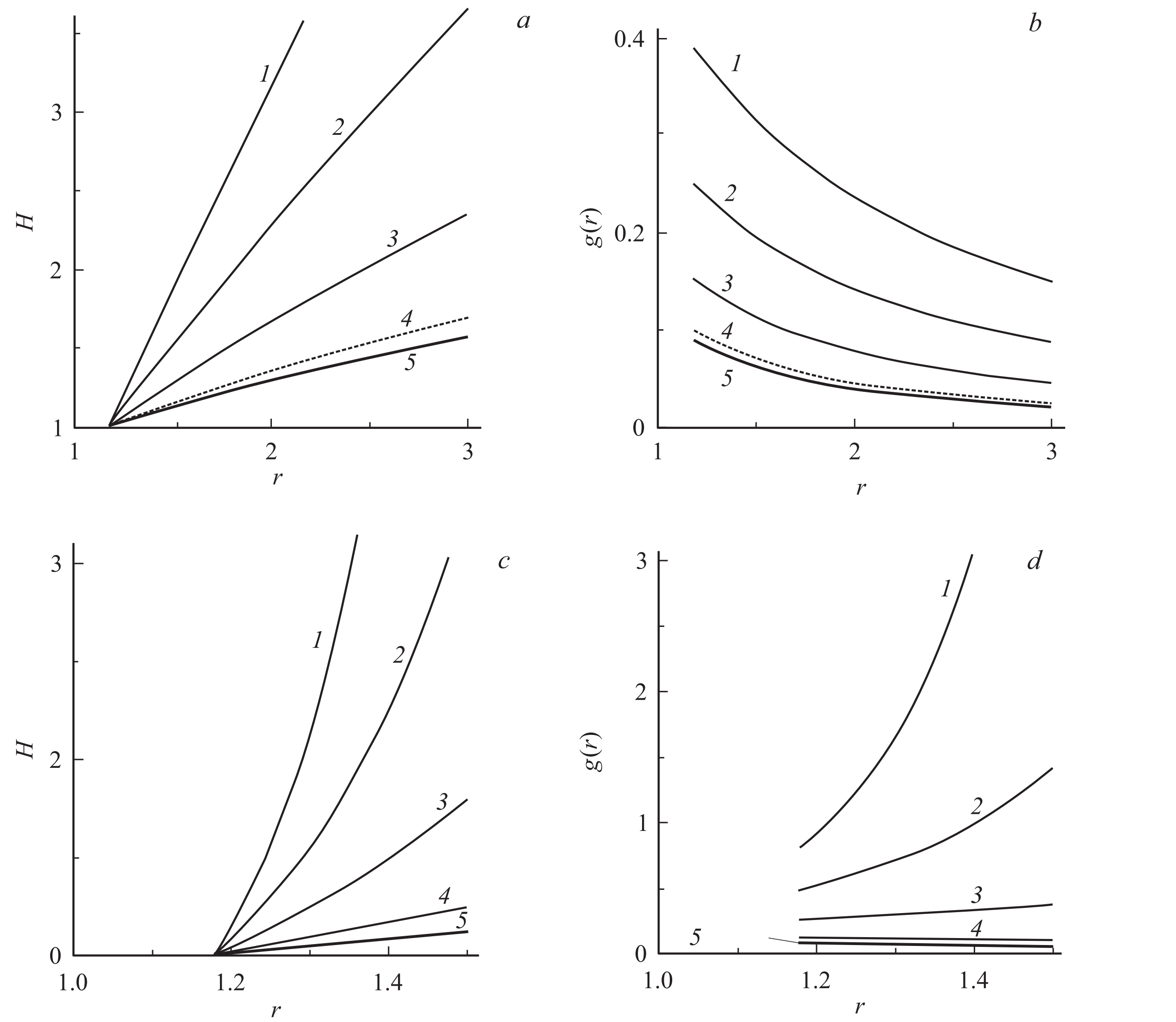

Рис. 3. *a* — *Q*-вариант, полная энтальпия $H(r)$: *1* — силовой параметр $F_Q = 1.5$, *2* — 1, *3* — 0.5, *4* — 0.1, *5* — 0; энергетический параметр $Q = 1$, число Маха $M_1 = 1.5$, $r_1 = 1.176$, $r_2 = 3$; *b* — интенсивность энергоподвода $g(r)$; *c* — *E*-вариант, $H(r)$: *1* — силовой параметр $F_E = 0.7$, *2* — 0.5, *3* — 0.3, *4* — 0.1, *5* — 0; энергетический параметр $Q_E = 0.5$, число $M_1 = 1.5$, $r_1 = 1.176$, $r_2 = 1.5$; *d* — энергоподвод $g(r)$.

например лазерным излучением, используя хорошо поглощающий газ на выбранной длине волны. Полагаем, что заданное число Маха M_1 установлено для потока до сечения, в котором организуем энерго-силовое воздействие. Число Маха близко к единице $M_1 \approx 1$, меньше или больше единицы, так что ниже по течению реализуется одна из ветвей, дозвуковая $0 < M < 1$ либо сверхзвуковая $1 < M < \infty$.

Предположим, при безразмерной координате L ($L = L_{\text{phys}}/r_0$, где r_0 есть старое минимальное сечение) энерго-силовым воздействием в режиме постоянного числа Маха получили новые параметры источника — давление p_{01}, температуру T_{01}, энтальпию h_{01}, плотность ρ_{01}, скорость u_{01}, и далее намерены решать новые задачи, используя поле течения источника с минимальным радиусом $r_{01} = r_0 L$.

Для каждой физической величины A в сечении $r = L$ приравняем ее значение A_{phys} $(r = L)$ произведению $A_{\text{phys}}(r = L) = A_{01}A_m$ характерной величины A_{01} на значение безразмерной величины A_m при новом минимальном радиусе $r_{01} = r_0 L$ (безразмерном $r_m = r_{\text{phys}}/r_{01} = 1$). Используя полученные решения $T(r)$, $H(r)$, $U(r)$, $P(r)$, $R(r)$ в виде формул, либо массивов данных или таблиц, найдем новые характерные величины источника:

$$T_{01} = T_0\,\frac{T(L)}{T_m}, \quad h_{01} = h_0\,\frac{T(L)}{T_m}, \quad u_{01} = u_0\,\frac{U(L)}{u_m},$$

$$\rho_{01} = \rho_0\,\frac{R(L)}{\rho_m}, \quad p_{01} = p_0\,\frac{P(L)}{p_m}, \qquad (14)$$

где $T_m = 2/(\gamma + 1)$, $u_m = \sqrt{[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]}$, $\rho_m = T_m^{1/(\gamma-1)}$, $p_m = T_m^{\gamma/(\gamma-1)}$ — безразмерные значения на минимальном радиусе для температуры, скорости, плотности и давления. Сохраняется число Маха $M = M_1$ и массовый расход $m_{01} = m_0$ (либо используется и эта возможность — изменять расход $m_0 \to m_{01} \neq m_0$). Энергетические параметры можно записать, например, для энерго-силового воздействия, заменяя характерные величины на новые:

$$F_E = \frac{\rho_e E_0 r_{01}}{2\pi\rho_{01} h_{01}}, \quad F_Q = \frac{q_e E_0 r_{01}}{2\pi h_{01}},$$

$$Q_E = Q = \frac{\sigma E_0^2 r_{01}}{2\pi\rho_{01} u_{01} h_{01}}. \tag{15}$$

Например, при увеличении минимального радиуса в два раза ($L = 2$, $r_{01} = 2r_0$) температура T_{01} превысила T_0 в $T_{01}/T_0 = T(L = 2)/T_m$ раз; энтальпия h_{01} превысила величину h_0 также в $h_{01}/h_0 = T(L = 2)/T_m$ раз. Давление p_{01} превысило прежнее p_0 в $P(L = 2)/p_m$ раз. Процедуру можно разбить на несколько этапов.

4. Влияние числа Маха M_1 на приращение энтальпии и других величин

Выполним исследования влияния числа Маха M_1 в начальном сечении r_1 зоны энерго-силового воздействия на нагрев и ускорение газа. На рис. 4, *a* для Q-варианта представлены температура T_2, скорость u_2, полная энтальпия H_2, давление p_2 в замыкающем сечении $r_2 = 3$, а также скорректированные параметры, энергетический Q_{new} и силовой $F_{Q,new}$, как функции M_1, кривые *1, 2, 3, 4, 5, 6* соответственно. Исходные энергетический Q и силовой F_Q параметры равны $Q = 0.1 = F_Q$. Нормировка функции распределения электрического поля $f_Q(r)$, приводящая интегралы I_Q, I_{FQ}, входящие в уравнения сохранения энергии (13), к единице, изменяет значения энергетического Q и силового F_Q параметров при различных M_1. Следовательно, различные доли потока полной энтальпии $m\Delta H_Q = Q_{new}$ и различные доли работы внешней силы $\Delta HF_Q = F_{Q,new}$ входят в изменение полной энтальпии $\Delta H = H_2 - H_1$ и в изменение ее потока $m\Delta H$. Величины T_2, H_2, p_2, Q_{new} (кривые *1, 3, 4, 5*) имеют ярко выраженные максимумы при $M_{1,\max} \approx 0.55$, 0.55, 0.3, 0.55. Величины u_2 и $F_{Q,new}$ имеют максимумы приблизительно при 1.01 и 0.55 соответственно. Согласно представленным зависимостям, наиболее благоприятные условия для увеличения как локальных значений температуры T_2 и полной энтальпии H_2 в конце зоны, так и в интеграле приращения потока полной энтальпии $m\Delta H = Q_{new} + mF_{Q,new}$ расположены в дозвуковом диапазоне чисел Маха при M_1, приблизительно равном 0.55.

На рис. 4, *b* показаны скорректированные энергетические Q_{new} (кривые *1, 3*) и силовые $F_{Q,new}$ (*2, 4*) параметры в зависимости от исходных Q и F_Q соответственно. Кривые *1, 2* получены при $M_1 = 1.5$, кривые *3, 4* — при $M_1 = 0.5$. Предполагается ситуация, при которой характерный конвекционный ток равен характерному току проводимости, параметры $Q = F_Q = 0.1{-}2$. Такой же быстрый рост параметров Q_{new} и $F_{Q,new}$, как и с ростом параметров Q и F_Q, происходит с ростом параметра подобия — протяженности области воздействия $\Delta r = r_2 - r_1$ или, что эквивалентно, с ростом координаты r_2 (рис. 1, *a*, 2, *a*).

Аналогичные экстремальные результаты локального роста температуры, скорости, полной энтальпии, а также скорректированных значений энергетического и силового параметров получены для E-варианта (плотность заряда задана на единицу объема). По отношению к Q-варианту максимумы величин T_2, u_2, H_2, p_2 и $Q_{E,new}$, $F_{E,new}$ сдвинуты в сторону сверхзвуковых значений M_1, которые равны приблизительно $M_{1,\max} \approx 0.75$, 1.01, 0.8, 0.5 и 0.75, 0.90 (рис. 4, *c*).

Если зависимости Q_{new}, $F_{Q,new}$ от исходных Q, F_Q близки к линейным (в Q-варианте), то соответствующий рост параметров $Q_{E,new}$, $F_{E,new}$ с ростом исходных значений Q_E, F_E энергетического и силового параметров происходит с нарастанием темпа роста (рис. 4, *d*), причем как при различных числах Маха M_1, так и при различных протяженностях зоны (при различных координатах r_2), сравните кривые *1, 2* ($r_2 = 1.5$), кривые *3, 4* ($r_2 = 2$) все при $M_1 = 1.5$ с кривыми *5, 6* ($r_2 = 2$, $M_1 = 0.75$).

5. Стремление к нулю энергетического параметра Q, $Q_E \to 0$ при постоянном отрицательном силовом параметре F_Q, $F_E < 0$

Постоянными будем поддерживать также другие параметры подобия: число Маха $M_1 = 1.5$ (равносильно задавать r_1 или T_1, и т.д., см. (9)), замыкающую координату $r_2 = 3$ (равносильно задавать протяженность зоны воздействия $r_2 - r_1$), показатель адиабаты $\gamma = 1.4$ (один и тот же сорт газа, воздух), электромагнитную схему (структуру) источников энергии и внешней силы. Последняя (схема) определяет, из каких слагаемых (Q_{new}, $Q_{E,new}$, $F_{Q,new}$, $F_{E,new}$) состоят суммарные изменения полной энтальпии ΔH и потока полной энтальпии $m\Delta H$ в зоне воздействия, в какой степени в интегралы входят функции распределения поля $f(r)$, $f_Q(r)$, какие параметры включают эти функции (см. Приложение 1). Отрицательную силу в эксперименте получим, изменив полярность сеток — электродов. При вычислении решения уравнения сохранения энергии (7) с учетом связи (11) функций распределения внешней силы $F_1(r) = F(r)/\rho(r)$, $F(r)$ с полной энтальпией $H(r)$ необходимо брать нижнюю ветвь со знаком минус перед радикалом (см. Приложение 1).

На рис. 5, *a* показаны распределения полной энтальпии $H(r)$ для Q-варианта при исходном силовом параметре $F_Q = -1$ постоянном и уменьшающемся энергетическом параметре $Q = 1$ (кривая *1*), 0.5 (*2*), 0.1 (*3*),

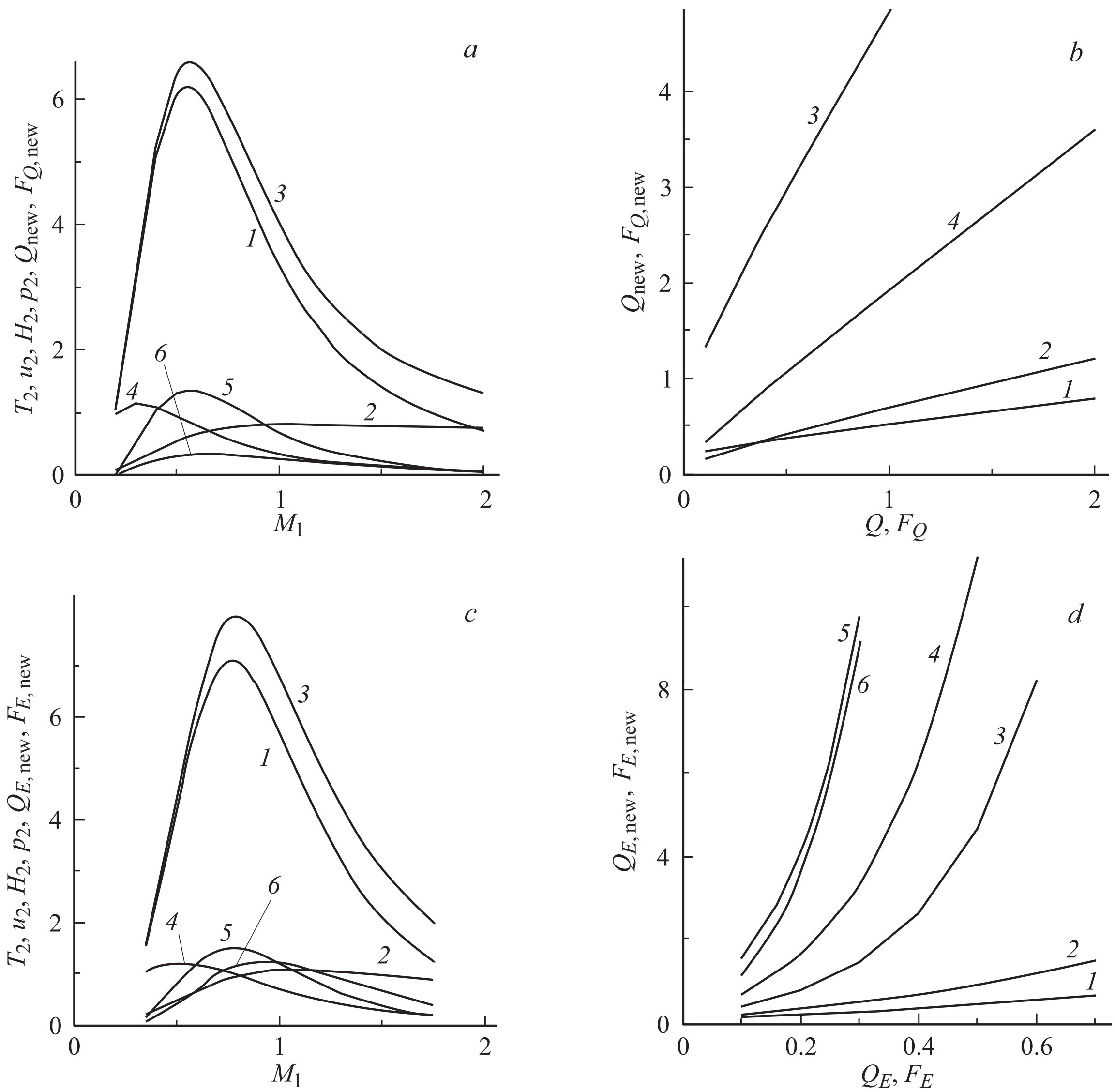

Рис. 4. a — Q-вариант, температура (в конце зоны $r_2 = 3$) T_2 (кривая *1*), скорость u_2 (*2*), полная энтальпия H_2 (*3*), давление p_2 (*4*), скорректированные энергетический Q_{new} (*5*) и силовой $F_{Q,new}$ (*6*) параметры в зависимости от числа M_1; исходные $Q = 0.1 = F_Q$, $\gamma = 1.4$, $m = 0.2588$; b параметры Q_{new} (кривые *1, 3*) и $F_{Q,new}$ (*2, 4*) в зависимости от исходных Q и F_Q, соответственно при $M_1 = 1.5$ (*1, 2*) и 0.5 (*3, 4*); c — E-вариант, величины T_2 (кривая *1*), u_2 (*2*), H_2 (*3*), p_2 (*4*) (при $r_2 = 2$), энергетический $Q_{E,new}$ (*5*) и силовой $F_{E,new}$ (*6*) параметры в зависимости от M_1; исходные значения $Q_E = 0.1 = F_E$; d — параметры $Q_{E,new}$ (*1, 3, 5*) и $F_{E,new}$ (*2, 4, 6*) в зависимости от исходных Q_E и F_E при $M_1 = 1.5$ (кривые *1, 2*, $r_2 = 1.5$), (*3, 4*, $r_2 = 2$) и $M_1 = 0.75$ (*5, 6*).

0.05 (*4*), 0 (*5*). Пересчитанные значения энергетического параметра Q_{new} (для нормированной функции распределения поля $f_Q(r)$) составили $Q_{new} = 0.04117$, 0.02647, 0.00705, 0.00369, 0.0 и силового параметра — $F_{Q,new} = -0.1963$, -0.2225, -0.2562, -0.2619, 0.2681 соответственно. Последнее (при $Q = 0$) значение равно [1,11] $F_{Q,new} = F_{E,new} = H_2 - H_1 = (r_2/r_1)^{-s} - 1 = -0.2681$, где показатель степени $s = 2(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. В пределе Q, $Q_E \to 0$, так же как и при F_Q, $F_E \to 0$, решения для Q- и E-вариантов совпадают.

На рис. 5, b представлены распределения полной функции объемной силы $F(r) = F_1(r)\rho(r)$ (функция $F_1(r)$ — сила на единицу массы) для рассмотренного на рис. 5, a примера. Видим сгущение линий решения по мере приближения к пределу $Q \to 0$.

На рис. 5, c приведены зависимости $H(r)$ и $F(r)$ для E-варианта при исходном силовом параметре $F_E = -0.5$ и вариации энергетического параметра $Q_E = 1$ (кривая *1*), 0.5 (*2*), 0.1 (*3*), 0.05 (*4*) и 0.0 (*5*). После нормировки функции распределения поля $f(r)$ значения энергетического параметр $Q_{E,new}$ составили $Q_{E,new} = 0.018002$, 0.010536, 0.002499, 0.001282, 0 и значения силового параметра $F_{E,new} = -0.2403$, -0.2522, -0.2644, -0.2662, -0.2681 соответственно. Отметим, что уменьшение полной энтальпии ΔH составляет от -0.1708 до -0.2613 при значении силового

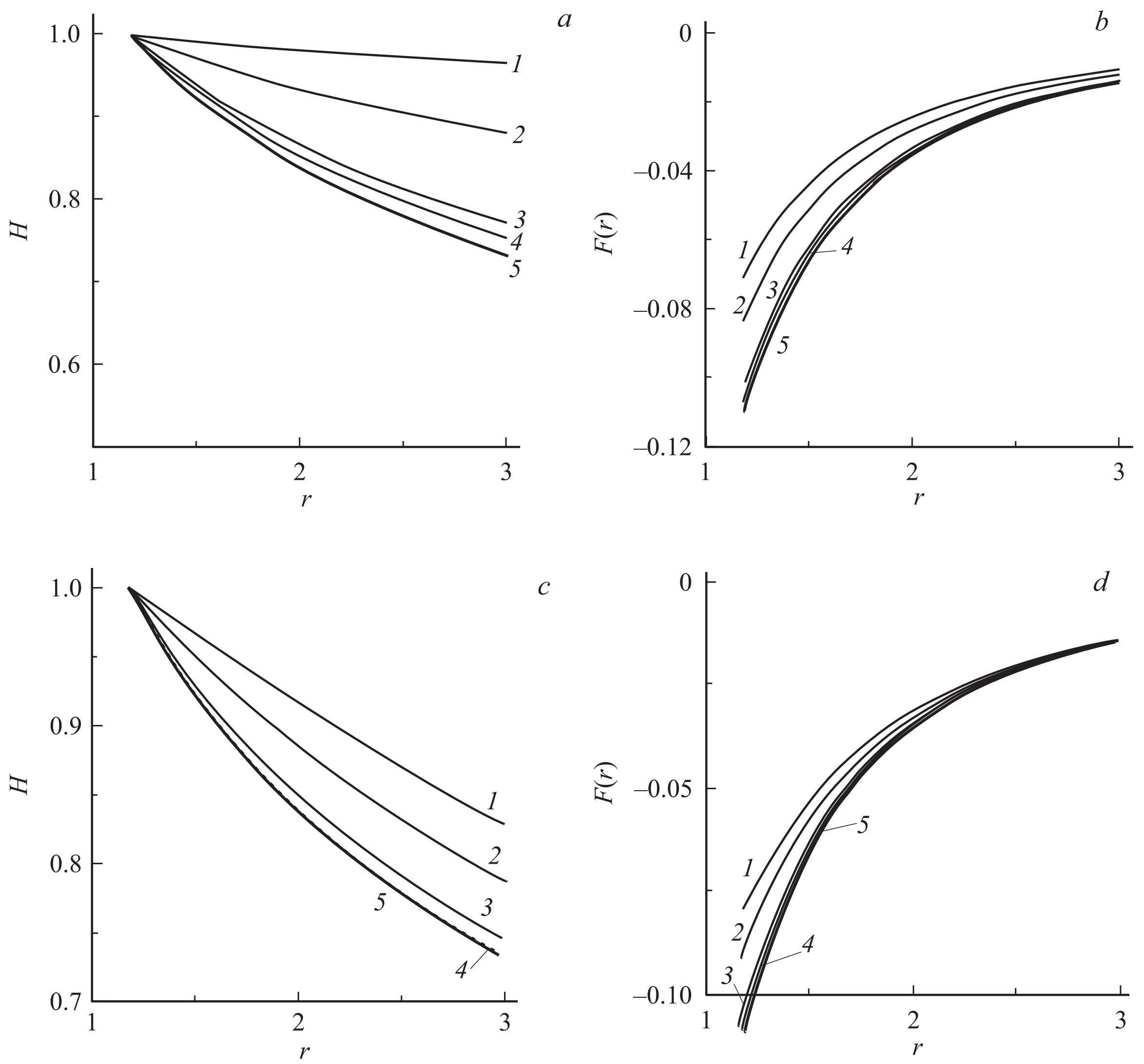

Рис. 5. a — Q-вариант, энтальпия $H(r)$: *1* — энергетический параметр $Q = 1$, *2* — 0.5, *3* — 0.1, *4* — 0.05, *5* — 0; силовой — $F_Q = -1.0$, число $M_1 = 1.5$, $r_1 = 1.176$, $r_2 = 3$; b — внешняя сила $F(r)$; c — E-вариант, $H(r)$: *1* — энергетический параметр $Q_E = 1$, *2* — 0.5, *3* — 0.1, *4* — 0.05, *5* — 0; силовой параметр $F_E = -0.5$, число $M_1 = 1.5$, $r_1 = 1.176$, $r_2 = 3$; d — интенсивность внешней силы $F(r)$.

параметра $F_E = -0.5$, т.е. больше по модулю, чем в Q-варианте ($\Delta H = -0.0372 - -0.2476$), хотя параметр внешней силы F_Q по модулю больше в 2 раза, $F_Q = -1$, при прочих равных параметрах ($r_1 = 1.176$, $r_2 = 3$, $\gamma = 1.4$; Q, Q_E меняются от 1 до 0). Однако в E-варианте после перенормировки энергетический параметр в два с лишним раза меньше, а силовой $F_{E,new}$ превосходит по модулю соответствующий $F_{Q,new}$. При торможении часть отрицательной работы внешней силы идет на уменьшение скорости (кинетической энергии) и часть — на уменьшение энтальпии (температуры).

Уравнения (7), (11), кроме численного решения, допускают аналитические решения (см. Приложения 1–3), явные $H(r)$ в E-варианте и обратные $r(H)$ в Q-варианте. Несмотря на громоздкие выражения и преимущество численного алгоритма в общем случае других зависимостей функций распределения $f(r)$, $f_Q(r)$, например, от газодинамических величин $u(r)$, $T(r)$, ..., аналитические решения полезны для контроля алгоритмов, для исследования асимптотических ситуаций, существенного преобладания того или иного физического фактора — внешней силы, энергоподвода; для исследования режима источника (стока), влияния числа Маха, условий на большом удалении, сорта газа.

Выводы

1. В E-варианте (задана плотность зарядов ρ_e, C/m^3) температура, скорость, полная энтальпия газа при воздействии электрическим полем увеличиваются с возрастающим темпом на свою величину на участке протяженностью меньше минимального радиуса.

2. В Q-варианте (плотность зарядов q_e, C/kg) температура, скорость, полная энтальпия газа возрастают медленнее и с убывающим темпом роста.

3. При воздействии электрическим полем с ускорением и нагревом источника, истекающего в вакуум, возможно в режиме постоянного числа Маха на свою величину изменять характерные физические параметры источника: минимальный радиус и параметры заторможенного газа — энтальпию, температуру, давление, плотность.

4. В режиме постоянного числа Маха в рассматриваемой электрической версии воздействия на источник увеличение температуры преобладает над увеличением скорости в диапазоне дозвуковых чисел Маха M_1 с экстремальным (максимальным) увеличением полной энтальпии.

5. На последующем участке источника (без воздействия) можно реализовать полный набор чисел Маха M от 1 до ∞ (в режиме I истечения в вакуум) или от 0 до 1 (в режиме II в затопленное пространство); при больших конечных M возможна реализация желаемого диапазона плотности или температуры газа, давления или энтальпии, скорости газа.

Приложение 1. Соотношение (11) для E- и Q-вариантов (задана ρ_e, C/m^3, либо q_e, C/kg соответственно), переходя к функциям внешней силы $F(r) = F_E f(r)$, $F_1(r) = F_Q f_Q(r)$, запишем, с учетом (10):

$$H(r) = \frac{D_1 r^2}{m} \times \begin{cases} \frac{Q_E F^2(r)}{F_E^2} \\ \frac{Q F_1^2(r)}{F_Q^2} \end{cases} - \frac{r}{s} \times \begin{cases} \frac{rF(r)\sqrt{H(r)}}{r_1\rho_1} \\ F_1(r) \end{cases}. \tag{П1.1}$$

Представим (П1.1) в виде уравнений

$$F^2(r) + bF(r) + c = 0, \quad b = -\frac{u_1\sqrt{H(r)}F_E^2}{sD_1Q_E},$$

$$c = -\frac{H(r)mF_E^2}{r^2D_1Q_E}, \tag{П1.2}$$

$$F_1^2(r) + \beta F_1(r) + \delta = 0, \quad \beta = -\frac{mF_Q^2}{rsD_1Q},$$

$$\delta = -\frac{H(r)mF_Q^2}{r^2D_1}. \tag{П1.3}$$

Решения

$$F(r) = -\frac{b}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c}{b^2}}\right] = \sqrt{H}B_1\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{B_0}{r^2}}\right], \tag{П1.4}$$

$$F_1(r) = -\frac{\beta}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\delta}{\beta^2}}\right] = \frac{A_1}{r}\left[1 \pm \sqrt{1 + \alpha_0 H}\right], \tag{П1.5}$$

$$B_1 = \frac{mF_E^2}{2sr_1\rho_1D_1Q_E}, \quad B_0 = \frac{2sr_1\rho_1}{B_1};$$

$$\alpha_0 = \frac{4s^2D_1Q}{mF_Q^2}, \quad A_1 = \frac{2s}{\alpha_0}.$$

Верхние ветви решений описывают положительную ускоряющую газ силу, нижние ветви — отрицательную тормозящую газ силу. Структура (П1.4), (П1.5) подсказывает путь построения аналитического решения — разделение переменных r и H.

Приложение 2. Аналитическое решение в E-варианте

В уравнении энергии (7) выразим тепловой источник $g(r)/\rho u(r)$ через силовую функцию $F(r)$, см. (П1.4), а плотность $\rho(r)$ — через полную энтальпию $H(r)$, формула (10). Получим

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dr} = \frac{r}{D_1B_0}\big(1 \pm Z(r)\big)\big[1 + 2sD_1 \pm Z(r)\big], \tag{П2.1}$$

$$Z(r) = \sqrt{1 + B_0/r^2}, \quad B_0 = \frac{4(sr_1\rho_1)^2D_1Q_E}{mF_E^2},$$

$$r^2 = \frac{B_0}{Z^2 - 1}, \quad \frac{d(r^2)}{dZ} = \frac{-2B_0Z}{(Z^2 - 1)^2}.$$

Сделали замену независимой переменной r на Z, нижний знак „–“ соответствует отрицательной силе $F(r)$, вызывающей торможение газа. Окончательное уравнение в переменных Z и $H\big(Z(r)\big)$ имеет вид

$$\frac{1}{H}\frac{dH}{dZ} = -2s\,\frac{Z(1 \pm Z)\left[1 + \frac{1}{2sD_1}(1 \pm Z)\right]}{(z - 1)^2(Z + 1)^2}$$

$$= \mp 2s\left\{\frac{A_\pm}{Z \pm 1} + \frac{B_\pm}{Z \mp 1} + \frac{A_\pm}{(Z \mp 1)^2}\right\},$$

$$A_\pm = \mp\frac{1}{4}, \quad B_\pm = \pm\left(\frac{1}{2sD_1} + \frac{1}{4}\right), \quad C_\pm = \frac{1}{2sD_1} + \frac{1}{2}. \tag{П2.2}$$

Решение с учетом начального условия $H(r_1) = H\big(Z_1 = Z(r_1)\big) = 1$ следующее:

$$H(r) = \frac{\left[|Z \pm 1|^{\mp 2sA_\pm}|Z \mp 1|^{\mp 2sB_\pm}\exp\left(\pm\frac{2sC_\pm}{Z \mp 1}\right)\right]}{[\ldots Z_1 = Z(r_1)\ldots]}. \tag{П2.3}$$

Знаменатель в правой части отличается от числителя заменой Z на Z_1.

Приложение 3. Аналитическое решение в Q-варианте

Исключим в правой части уравнения (7) тепловой источник $g(r)$ (выраженный через квадрат внешней силы $F_1^2(r)$), используя уравнение (11):

$$\frac{dH}{H + \alpha_1\left[1 \pm \sqrt{1 + \alpha_0 H(r)}\right]} = \frac{dr}{rD_1},$$

$$\alpha_0 = \frac{4s^2D_1Q}{mF_Q^2}, \quad \alpha_1 = 2(1 + sD_1)/\alpha_0. \tag{П3.1}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Знак „±“ учитывает убывание полной энтальпии при торможении газа, сила $F_1(r)$ отрицательная. Выполним замену

$$Y = \sqrt{1 + \alpha_0 H(r)}, \quad H = (Y^2 - 1)/\alpha_0, \quad \frac{dH}{dY} = \frac{2Y}{\alpha_0},$$

преобразуем уравнение к виду

$$\frac{2YdY}{Y^2-1+\alpha_2(1\pm Y)}=\frac{dr}{rD_1},\quad \alpha_2=\alpha_0\alpha_1=2(1+sD_1). \tag{П3.2}$$

Приведем знаменатель в левой части к виду, удобному для интегрирования,

$$\frac{2YdY}{Y^2\pm(\alpha_3+1)Y+\alpha_3}=\frac{dr}{rD_1},$$
$$\alpha_3=-1+\alpha_2=1+2sD_1. \tag{П3.3}$$

Решение с учетом начального условия $Y_1=Y(H_1=1)=$ $=\pm\sqrt{(1+\alpha_0)}$ есть

$$\frac{r}{r_1}=\left\{\frac{|Y\pm 1||Y\pm\alpha_3|\left|\frac{Y\pm 1}{Y\pm\alpha_3}\right|^{\alpha_4}}{|Y_1\pm 1||Y_1\pm\alpha_3|\left|\frac{Y_1\pm 1}{Y_1\pm\alpha_3}\right|^{\alpha_4}}\right\}^{D_1},$$
$$\alpha_4=\frac{1+\alpha_3}{1-\alpha_3}=-1-\frac{1}{sD_1}. \tag{П3.4}$$

Решение включает две ветви, с положительной ускоряющей силой $F_1(r)$ и с отрицательной, тормозящей поток газа, соответственно верхний и нижний знаки „±“.

Список литературы

[1] *Кучеров А.Н.* // ИФЖ. 2017. Т. 90. № 6. С. 1525–1536.

[2] *Реслер Э., Сирс У.* Перспективы магнитной аэродинамики // В сб. перев. „Механика“. М.: ИЛ, 1958. № 6 (52). С. 3–22. (Resler E.L., jr., Sears W.R. The Prospects for Magneto-Aerodynamics // J. Aeronautical Sciences. 1958. Vol. 25. N 4. P. 235–245, 258); *Реслер Э., Сирс У.* Перспективы магнитной аэродинамики. Исправление и добавление // В сб. перев. „Механика“. М.: ИЛ, 1959. № 6. С. 47–48. (*Resler E.L., Sears W.R.* The prospects for Magneto-Aerodynamics. J. Aero/Space Sciences. 1959. Vol. 26. N 5. P. 318).

[3] *Реслер Э., Сирс У.* Магнитогазодинамическое течение в канале // В сб. перев. „Механика“. М.: ИЛ, 1959. № 6. С. 39–46. (*Resler E.L., Sears W.R.* // Magneto-Gasdynamic Channel Flow. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1958. Vol. 9b. N 5/6. 509–518).

[4] *Кирко И.М.* // Электричество. 1959. № 4. С. 9–16.

[5] *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.

[6] *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир. 1967. 320 с. (*J.A. Shercliff.* A Textbook of Magnetohydrodynamics. Oxford, London, Edinburgh, N.Y., Paris, Frankfurt; Pergamon Press: 1965).

[7] *Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.

[8] *Алферов В.И.* // ТВТ. 2000. Т. 38. № 2. С. 321–334.

[9] *Битюрин В.А., Бочаров А.Н.* // Известия РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 188–207.

[10] *Битюрин В.А., Бочаров А.Н.* Обзор моделей гиперзвуковых МГД-течений // 3-я школа-семинар по магнитоплазменной аэродинамике. 8–10 апреля. 2008 (доклады). М. 2008. С. 216–255.

[11] *Кучеров А.Н.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 2. С. 182–191.