

05,11

Монте-Карло-исследование влияния начальных состояний и дефектов структуры на неравновесное критическое поведение трехмерной модели Изинга

© В.В. Прудников, П.В. Прудников, П.Н. Маляренко

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
Омск, Россия

E-mail: prudnikv@univer.omsk.su

Осуществлено численное исследование влияния различных начальных значений намагниченности m_0 и дефектов структуры на неравновесное критическое поведение трехмерной модели Изинга. На основе анализа временной зависимости намагниченности и двухвременной зависимости автокорреляционной функции и динамической восприимчивости выявлено существенное влияние начальных состояний на релаксацию намагниченности и эффекты старения, характеризующиеся аномальным замедлением релаксации и корреляции в системе с ростом времени ожидания. Проведено исследование нарушений флуктуационно-диссипативной теоремы и вычислены значения предельного флуктуационно-диссипативного отношения. Показано, что в неравновесном критическом поведении трехмерной модели Изинга с произвольной начальной намагниченностью m_0 можно выделить два подкласса универсальности, соответствующих эволюции системы из высокотемпературного с $m_0 = 0$ и низкотемпературного с $m_0 = 1$ начальных состояний с характерными для этих состояний значениями предельного ФДО.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 17-12-00279, и грантом MD-6868.2018.2 Президента РФ. Для проведения расчетов были использованы ресурсы суперкомпьютерного комплекса МГУ им. М.В. Ломоносова и межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

DOI: 10.21883/FTT.2018.06.45981.05M

1. Введение

Задача описания фазовых переходов и критических явлений является одной из наиболее трудных задач статистической физики. Критические явления характеризуются аномально большими по амплитудам и долгоживущими флуктуациями ряда термодинамических переменных, называемых параметрами порядка, и их эффективно сильным взаимодействием. В результате любое слабое взаимодействие становится вблизи критической точки настолько сильным, что не позволяет применять теорию возмущений. Для описания столь сложных явлений разработаны изощренные методы ренормализационной группы и ε -разложения, а также теоретико-полевого подхода, дающего более точные количественные результаты для систем с фиксированной размерностью при применении методов суммирования асимптотических рядов [1–3]. Наряду с данными аналитическими подходами широко применяются методы численного описания поведения систем при фазовых переходах, особенно методы статистического моделирования Монте-Карло [4,5]. Этому способствует мощное развитие компьютерной техники и увеличение их вычислительных мощностей.

Одной из особенностей, возникающей при описании критического поведения систем, является эффект критического замедления. Он связан с аномальным увеличением времени релаксации системы t_{rel} при при-

ближении к температуре T_c фазового перехода второго рода: $t_{\text{rel}} \sim |T - T_c|^{-z\nu}$, где z , ν — динамический критический индекс и индекс корреляционной длины соответственно. В результате система, находящаяся в критической точке, оказывается не в состоянии прийти к равновесию в течение всего процесса релаксации. Поэтому на временах $t \ll t_{\text{rel}}$ в поведении систем возникают такие необычные неравновесные явления, характерные для систем с медленной динамикой, как старение, нарушение флуктуационно-диссипативной теоремы и влияние различных начальных неравновесных состояний системы [6,7].

В настоящее время поведение систем, характеризующихся аномально медленной динамикой, вызывает большой интерес исследователей [8–10]. Хорошо известными примерами подобных систем с медленной динамикой и эффектами старения являются такие сложные неупорядоченные системы, как спиновые стекла [11,12]. Однако данные особенности неравновесного поведения значительно легче изучать на системах, испытывающих фазовые переходы второго рода, чем на спиновых стеклах.

Эффекты старения, проявляющиеся на неравновесном этапе релаксации системы с медленной динамикой, характеризуются существованием двухвременных зависимостей для таких функций, как автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ и функции отклика $R(t, t_w)$ от времени наблюдения t и времени ожидания t_w , определяемых для спиновой системы со спиновой плотностью $S(x)$

соотношениями

$$C(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d x [\langle S(x, t) S(x, t_w) \rangle - \langle S(x, t) \rangle \langle S(x, t_w) \rangle], \quad (1)$$

$$R(t, t_w) = \frac{1}{V} \int d^d x \left. \frac{\delta \langle S(x, t) \rangle}{\delta h(x, t_w)} \right|_{h=0}, \quad (2)$$

где h — малое внешнее магнитное поле, приложенное к системе в момент времени t_w . Время ожидания определяется временем, прошедшим с момента приготовления образца до начала измерения его характеристик. В течение $t, t_w \ll t_{rel}$ во временном поведении системы проявляется влияние начальных состояний системы и эффектов старения, характеризующихся замедлением релаксационных и корреляционных процессов с увеличением „возраста“ системы t_w .

Согласно общим представлениям о неравновесных процессах ожидается, что для времен $t > t_w \gg t_{rel}$ и $C(t, t_w) = C^{eq}(t - t_w)$ $R(t, t_w) = R^{eq}(t - t_w)$, где C^{eq} и R^{eq} являются соответствующими равновесными величинами, связанными флуктуационно-диссипативной теоремой (ФДТ) $TR^{eq}(t) = -dC^{eq}(t)/dt$. Принципиально важным проявлением медленной динамики является нарушение ФДТ [6, 13, 14], когда связь функции отклика системы на внешнее возмущение $R(t, t_w)$ и автокорреляционной функции $C(t, t_w)$ осуществляется через введение дополнительной величины $X(t, t_w)$, получившей название флуктуационно-диссипативного отношения (ФДО)

$$R(t, t_w) = \frac{X(t, t_w)}{T} \frac{\partial C(t, t_w)}{\partial t_w}. \quad (3)$$

Для времен с $t > t_w \gg t_{rel}$ ФДТ устанавливает, что $X(t, t_w) = 1$. Однако в общем случае для времен с $t, t_w \ll t_{rel}$ $X(t, t_w) \neq 1$. Асимптотическое значение ФДО, вводимое как

$$X^\infty = \lim_{t_w \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t, t_w), \quad (4)$$

является важной универсальной характеристикой неравновесных процессов в различных системах.

Ренормгрупповые [15, 16], численные [17–20] и экспериментальные [21] методы исследования критической динамики структурно неупорядоченных систем позволили к настоящему времени однозначно установить, что присутствие в системах как некоррелированных дефектов структуры, так и дефектов с эффектами дальнедействующей корреляции приводит к новым типам критического поведения и заметному усилению эффектов критического замедления по сравнению с „чистыми“ системами. В связи с этим особенности неравновесного поведения, такие как эффекты старения, несомненно должны найти более яркое проявление в структурно неупорядоченных системах с новыми универсальными значениями флуктуационно-диссипативного отношения.

В исследованиях влияния начальных состояний системы на характеристики неравновесного критического поведения различают высокотемпературные состояния, созданные при $T_0 > T_c$ и характеризующиеся начальной намагниченностью $m_0 = 0$, и низкотемпературные состояния с $T_0 < T_c$ с $m_0 \neq 0$. Дальнейшая реализация неравновесного процесса характеризуется тем, что в начальный момент времени система приводится в контакт с термостатом при критической температуре T_c системы и затем с момента времени t_w проводится измерение двухвременных величин — автокорреляционной функции и функции отклика, на временах $t, t_w \ll t_{rel}$.

К настоящему времени исследование неравновесного критического поведения различных статистических систем наиболее полно проведено для случая их эволюции из высокотемпературного начального состояния (см. обзор [6]). В работах [22–24] было осуществлено численное исследование методами Монте-Карло влияния дефектов структуры на особенности неравновесного поведения трехмерной модели Изинга при ее релаксации из высокотемпературного начального состояния. Изучены эффекты старения. Проведен расчет новой универсальной характеристики неравновесного критического поведения — предельного значения ФДО X^∞ . Выявлена их зависимость от изменения концентрации дефектов. Показано, что присутствие дефектов структуры приводит к усилению эффектов старения и появлению трех универсальных классов неравновесного критического поведения, соответствующих чистой, слабо неупорядоченной и сильно неупорядоченной трехмерной модели Изинга, с различными значениями предельного ФДО. Однако случай неравновесной критической релаксации систем из низкотемпературного начального состояния исследован заметно хуже.

Ренормгрупповой анализ [25] неравновесной динамики диссипативной модели А в классификации Гальперина–Хоэнберга [26] показал, что начальное состояние с намагниченностью $m_0 \neq 0$ приводит к появлению нового временного масштаба $t_m \sim m_0^{-k}$ с показателем $k > 0$, существенно влияющего на временное поведение автокорреляционной функции и функции отклика. Описаны предельные режимы: режим с временами $t_w < t \ll t_m$, который всегда реализуется для случая высокотемпературного начального состояния с $m_0 = 0$ и характеризуется соответствующим этому начальному состоянию временным поведением корреляционной функции и функции отклика, а также режим с большими по сравнению с t_m временами t и t_w , т.е. $t_m \ll t_w < t$. В последнем случае, соответствующем, например, приведенной начальной намагниченности системы с $m_0 = 1$ при $T_0 = 0$, долговременное поведение автокорреляционной функции и функции отклика характеризуется новыми показателями и новым значением предельного ФДО X^∞ .

Проведенное нами в работах [27, 28] численное исследование неравновесного критического поведения струк-

турно неупорядоченной трехмерной модели Изинга с релаксацией из низкотемпературного полностью упорядоченного начального состояния с $m_0 = 1$ при $T_0 = 0$ выявило существенное влияние дефектов структуры на эффекты старения и памяти. В структурно неупорядоченных системах было выявлено сильное замедление эффектов корреляции по сравнению с чистыми системами, связанное с пиннингом доменных стенок на дефектах структуры. В результате было показано, что спадание автокорреляционной функции со временем в нарушение скейлинговой зависимости осуществляется по степенному закону критической релаксации намагниченности, а предельные значения ФДО, определяемые динамикой доменов в долговременном режиме, становятся равными нулю.

Таким образом, сильные различия в неравновесном критическом поведении систем, релаксирующих из разных начальных состояний, вызывают необходимость более детального описания влияния начального значения намагниченности. В данной работе мы представляем результаты численного Монте-Карло-исследования, позволяющего детально изучить этот вопрос для неравновесной критической динамики чистой и структурно неупорядоченной трехмерной модели Изинга.

2. Модель и методы

Гамильтониан ферромагнитной модели Изинга, разбавленной немагнитными атомами примеси, с учетом влияния внешнего магнитного поля h задается выражением

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} p_i p_j S_i S_j - h \sum_i p_i S_i, \quad (5)$$

где $J > 0$ характеризует короткодействующее обменное взаимодействие между спинами $S_i = \pm 1$, зафиксированными в узлах решетки. В данной модели немагнитным атомам примеси сопоставляются пустые узлы. Числа заполнения p_i вводятся как случайные числа, принимающие значения 0 или 1: p_i принимается равным 1, если в узле i находится спин, и 0 в случае его отсутствия (магнитный атом замещен немагнитным атомом примеси). Дефекты структуры распределялись в системе каноническим образом в соответствии с функцией распределения $P(p_i) = (1-p)\delta(p_i) + p\delta(p_i)$, где $p = \langle p_i \rangle$ задает величину спиновой концентрации в системе. Положение дефектов структуры фиксировалось для отдельной примесной конфигурации.

Моделирование проводилось на кубической решетке с наложенными периодическими граничными условиями. $N_s = pL^3$ характеризует число спинов в решетке с линейным размером L .

В качестве характеристик неравновесного процесса рассчитывались такие величины как намагниченность

$$M(t) = \frac{1}{V} \int d^d x [\langle S(x, t) \rangle] = \left[\left\langle \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i(t) \right\rangle \right] \quad (6)$$

и автокорреляционная функция

$$C_{\text{con}}(t, t_w) = \left[\left\langle \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i(t) S_i(t_w) \right\rangle \right] - \left[\left\langle \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i(t) \right\rangle \right] \left[\left\langle \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} p_i S_i(t_w) \right\rangle \right], \quad (7)$$

где угловые скобки обозначают статистическое усреднение по реализациям начального состояния, квадратные — усреднение по различным конфигурациям распределения дефектов в решетке.

Однако линейная функция отклика $R(t, t_w)$, соответствующая определению (2), не может быть непосредственно измерена экспериментально или получена методами компьютерного моделирования. В данной работе, по аналогии с работами [22,25], была использована методика, позволяющая рассчитать функцию отклика без применения внешнего магнитного поля. Расчет обобщенной восприимчивости осуществлялся в виде интегральной функции отклика (термостатической восприимчивости)

$$\begin{aligned} \chi(t, t_w) &= \int_0^{t_w} dt' R(t, t') \\ &= \frac{1}{T_c N} \sum_i [(p_i S_i(t) \Delta S_i(t_w))]. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция $\Delta S_i(t_w)$ в (8) рассчитывается при моделировании состояний системы от начального момента времени $t = 0$ до времени ожидания t_w и определяется соотношением

$$\Delta S_i(t_w) = \sum_{s=0}^{t_w} [S_i(s) - S_i^W(s)], \quad (9)$$

где $S_i^W(s) = \text{th}(J \sum_{j \neq i} p_j S_j / T)$.

С другой стороны, применение в (8) для функции отклика соотношения (3) позволяет получить, что

$$T\chi(t, t_w) = \int_0^{t_w} X(t, t') \frac{\partial C(t, t')}{\partial t'} dt' = \int_0^{C(t, t_w)} X(C) dC. \quad (10)$$

Таким образом, флуктуационно-диссипативное отношение может быть определено соотношением ($T = T_c$)

$$X(t_w) = \lim_{C \rightarrow 0} T_c \frac{\partial \chi(t, t_w)}{\partial C(t, t_w)}, \quad (11)$$

с помощью которого можно вычислить предельное ФДО (4), используя предел $t_w \rightarrow \infty$.

Для расчета характеристик неравновесного критического поведения было осуществлено компьютерное моделирование динамического процесса односпиновых переворотов в рамках статистического метода Монте-Карло. Был реализован динамический процесс односпиновых переворотов с применением алгоритма тепловой

бани [29], задающим вероятность перехода спина системы в новое состояние $S_i \rightarrow S'_i$ посредством формулы

$$W_{sp}(S_i \rightarrow S'_i) = \frac{\exp[-H(S'_i)/T]}{\sum_{S_j} \exp[-H(S_j)/T]}, \quad (12)$$

где суммирование по S_j в знаменателе проводится по всем возможным состояниям спина S_i до переворота. Для модели Изинга с двумя возможными состояниями $S_j = \pm 1$ указанную вероятность переворота можно записать в виде

$$W_{sp} = \frac{\exp(-H(S'_i)/T)}{\exp(H(S_i)/T) + \exp(-H(S_i)/T)} \quad (13)$$

с реализацией так называемой глауберовской динамики. В качестве единицы времени динамического процесса выбирается шаг Монте-Карло на спин (MCS/s), который определяет N_s последовательных переворотов спинов в узлах решетки.

В данной работе проведено моделирование неравновесного поведения как „чистой“, так и структурно неупорядоченной модели Изинга со случайно распределенными по узлам замороженными точечными немагнитными дефектами структуры. Моделирование осуществлялось на трехмерной кубической решетке с линейным размером $L = 128$ при спиновых концентрациях $p = 1.0, 0.95, 0.8, 0.6$ и 0.5 и соответствующих им критических температурах $T_c(p)$: $T_c(1.0) = 4.5114(1)$ [30], $T_c(0.95) = 4.26267(4)$, $T_c(0.8) = 3.4995(2)$, $T_c(0.6) = 2.4241(1)$, $T_c(0.5) = 1.84509(6)$ [3]. Формировались начальные состояния системы со значениями намагниченности, равными $m_0 = 0.02; 0.05; 0.1; 0.25; 0.4; 0.7$ и 1.0 . На ранней стадии эволюции системы корреляционная длина еще достаточно мала и конечность размера моделируемой системы оказывается несущественной. Поэтому применение в исследованиях решетки с достаточно большим линейным размером $L = 128$ позволяет пренебрегать конечномерными эффектами по сравнению с их проявлением при моделировании равновесных критических явлений [18].

3. Влияние начальных состояний и дефектов структуры на критическую релаксацию намагниченности

Одним из необычных свойств неравновесного критического поведения систем, релаксирующих из высокотемпературного начального состояния с $m_0 \ll 1$, является увеличение намагниченности со временем наблюдения, удовлетворяющему степенному закону $M(t) \sim t^{\theta'}$ на временах $t < t_{cr} \sim m_0^{-1/(\theta'+\beta/z\nu)}$ (пример такого поведения намагниченности $M(t)$ для трехмерной модели Изинга с различными спиновыми концентрациями приведен в работе [22] на рис. 1. Здесь β, ν — известные статические индексы, определяющие равновесное критическое поведение намагниченности и корреляционной

длины, z — динамический критический индекс, характеризующий критическое замедление времени релаксации системы.

Действительно, в соответствии с теорией скейлинга сингулярная часть потенциала Гиббса, определяющая состояние системы в критической области,

$$\Phi_{\text{sing}}(t, \tau, h, m_0) = b^{-1} \Phi_{\text{sing}}(b^{a_t} t, b^{a_\tau} \tau, b^{a_h} h, b^{a_m} m_0), \quad (14)$$

характеризуется обобщенной однородностью относительно основных термодинамических переменных: времени t , приведенной температуры τ , поля h и начальной намагниченности m_0 , b — фактор подобия, a_i — показатели подобия.

Как следствие этого, в критической точке ($\tau = 0, h = 0$) при выборе $b = t^{-1/a_t}$ намагниченность $M = -\delta\Phi/\delta h$ характеризуется следующей временной зависимостью:

$$M(t, m_0) = -\delta\Phi/\delta h = t^{(1-a_h)/a_t} \tilde{F}_M(m_0 t^{-a_m/a_t}) \sim t^{-\beta/z\nu} F_M(t/t_m), \quad (15)$$

где $F_M(t/t_m)$ — скейлинговая функция намагниченности.

Разложение правой части в (15) по малой величине $m_0 t^{-a_m/a_t}$ приводит к степенной зависимости

$$M(t) \sim t^{(1-a_h-a_m)/a_t} \sim t^{\theta'}. \quad (16)$$

Все a_i , за исключением a_t ($a_t = -z$) и a_m , можно связать с известными статическими критическими индексами. Поэтому в [31] был введен новый независимый динамический критический индекс θ' , который, как было выявлено при ренормгрупповом описании неравновесного критического поведения системы, принимает положительные значения.

Временную зависимость для намагниченности (15) в итоге можно записать в следующей скейлинговой форме:

$$M(t, t_m) = A_M t^{-\beta/z\nu} F_M(t/t_m), \quad (17)$$

вводя новый временной масштаб $t_m \sim m_0^{a_t/a_m} = B_m m_0^{-k}$, определяемый начальным значением намагниченности. Показатели k и θ' связаны соотношением $k = 1/(\theta' + \beta/(z\nu)) > 0$. Скейлинговая функция $F_M(t/t_m)$ является конечной при $t/t_m \rightarrow 0$, A_M — неуниверсальная амплитуда, значения которой фиксируются условием $F_M(0) = 1$.

Нами было осуществлено исследование неравновесной критической релаксации намагниченности $M(t)$ в чистой и структурно неупорядоченной модели Изинга для широкого набора начальных состояний с намагниченностями $0 < m_0 \leq 1$. Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 1 для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0, 0.8$ и 0.6 . Графики $M(t)$ наглядно демонстрируют существенные как качественные, так и количественные отличия в релаксации намагниченности из высокотемпературного начального состояния с $m_0 \ll 1$, низкотемпературного

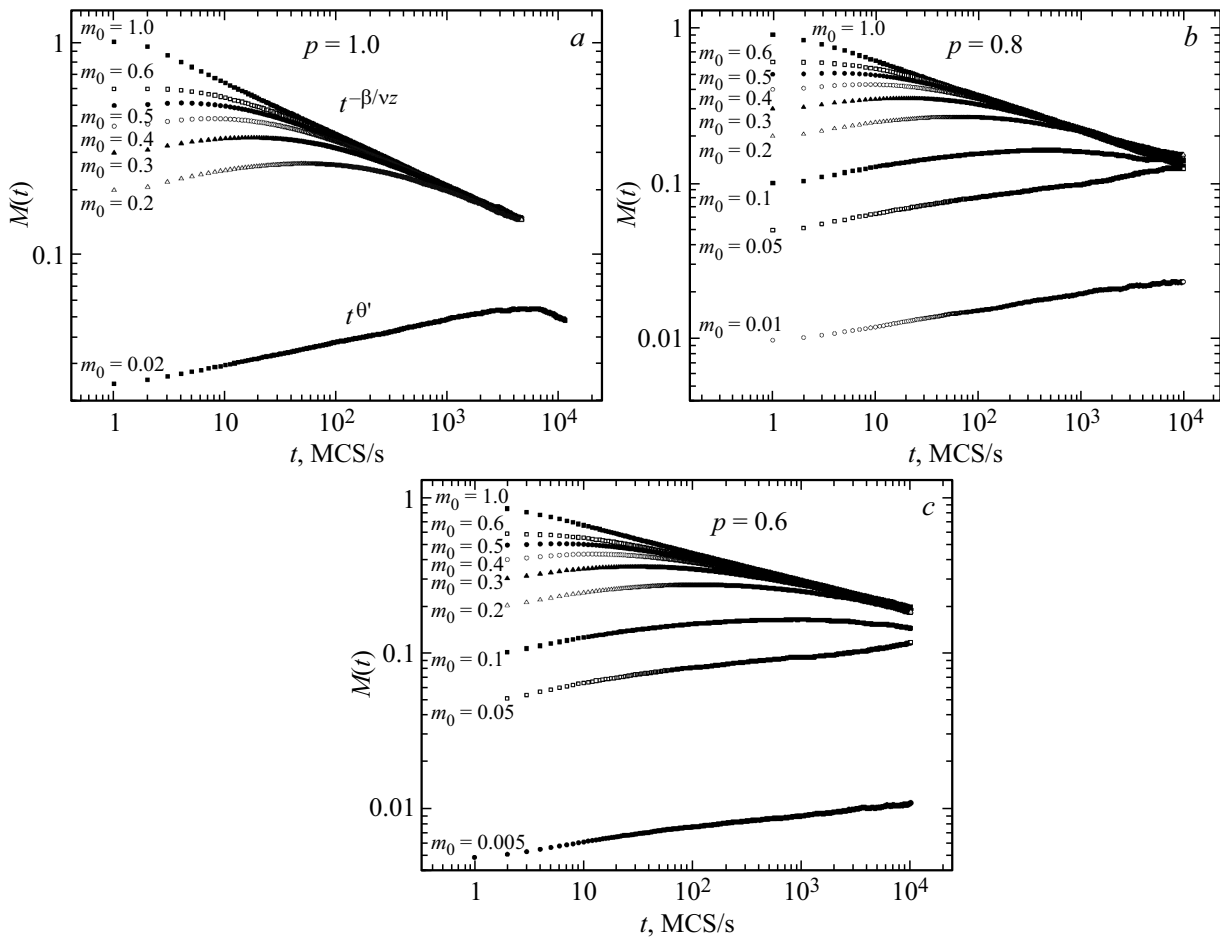


Рис. 1. Неравновесная критическая релаксация намагниченности $M(t)$ из различных начальных состояний с намагниченностями m_0 для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c).

полностью упорядоченного состояния с $m_0 = 1$ и промежуточных состояний с $0.1 \leq m_0 \leq 0.6$. Видно, что кривые релаксации для систем, стартовавших из начальных состояний $m_0 \neq 1$, асимптотически стремятся к кривой релаксации из низкотемпературного начального состояния с $m_0 = 1$. При этом для систем с $m_0 \ll 1$ на этапе неравновесной эволюции наблюдается характерный рост намагниченности, описываемый степенным законом $M(t) \sim t^{\theta'}$ с $\theta' = 0.111(4)$ для $p = 1.0$, $\theta' = 0.127(16)$ для $p = 0.8$ и $\theta' = 0.167(18)$ для $p = 0.6$. При временах $t > t_{cr} \equiv t_m \sim m_0^{-k}$ данный этап эволюции сменяется режимом, характеризуемым степенной временной зависимостью намагниченности $M(t) \sim t^{-\beta/vz}$. При эволюции системы из начального упорядоченного состояния с $m_0 = 1$ временная зависимость намагниченности в критической точке сразу определяется степенной зависимостью $M(t) \sim t^{-\beta/vz}$ со значениями показателя β/vz , зависящими от спиновой концентрации p . Было определено, что $\beta/vz = 0.243(6)$ для $p = 1.0$, $\beta/vz = 0.224(10)$ для $p = 0.8$ и $\beta/vz = 0.176(13)$ для $p = 0.6$. Промежуточные состояния с $0.1 \leq m_0 \leq 0.6$ характеризуются коротким этапом роста намагниченности по закону $M(t) \sim t^{\theta'}$ с последующим переходом к более длительному этапу релаксации по закону $M(t) \sim t^{-\beta/vz}$.

На сводном рис. 2 представлены графики критической релаксации намагниченности $M(t)$ для систем с различными значениями m_0 и спиновыми концентрациями

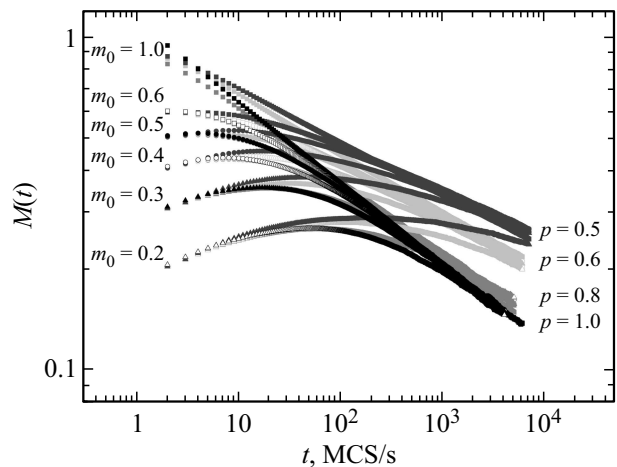


Рис. 2. Неравновесная критическая релаксация намагниченности $M(t)$ из различных начальных состояний для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0, 0.8, 0.6$ и 0.5 .

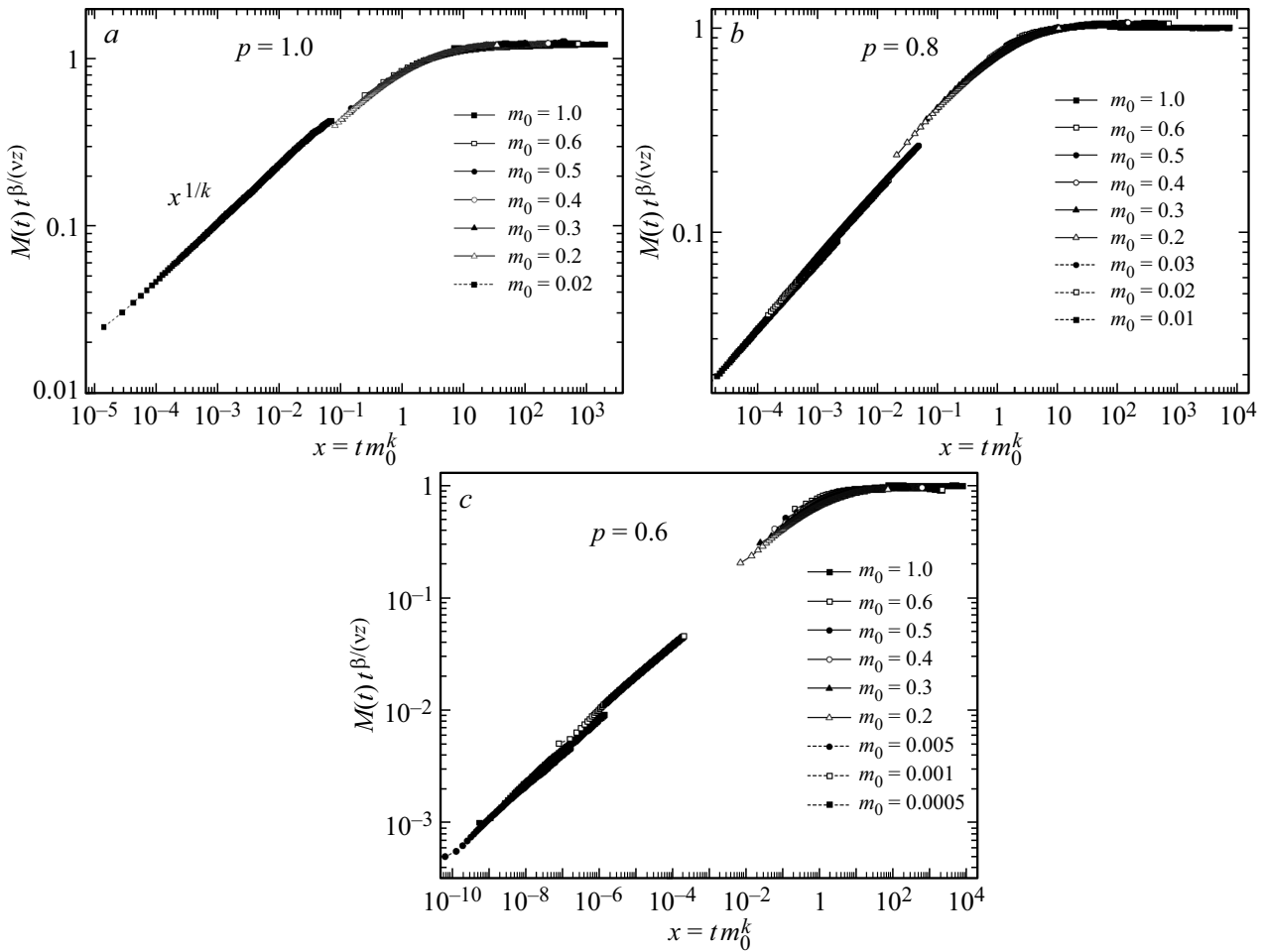


Рис. 3. Зависимость скейлинговой функции $F_M(tm_0^k) = t^{\beta/(z\nu)}M(t, t_m)$ от переменных $x = tm_0^k$ для систем со спиновыми концентрациями $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c).

$p = 1.0, 0.8, 0.6$ и 0.5 , обобщающие влияние дефектов структуры на релаксацию трехмерной модели Изинга. Видно, что наличие дефектов структуры замедляет релаксацию системы, приводя к увеличению времени релаксации с ростом концентрации дефектов.

На рис. 3 представлены результаты численной проверки предсказания временной скейлинговой зависимости (17) для намагниченности $M(t, t_m)$ как функции начальных значений намагниченности m_0 для чистой модели Изинга и систем с $p = 0.8$ и $p = 0.6$. Для графиков скейлинговой функции $F_M(x) = t^{\beta/(z\nu)}M(t, t_m)$ от переменной $x = tm_0^k$ наблюдается „коллапс“ данных, полученных для различных m_0 , на единой универсальной кривой, вид которой зависит от спиновой концентрации p системы. Универсальные кривые для скейлинговой функции $F_M(x)$, построенные в двойном логарифмическом масштабе, характеризуются линейным начальным участком, соответствующим степенной зависимости $F_M(x) \sim x^{1/k}$. По наклону данных линейных участков были рассчитаны следующие значения показателя k для трехмерной модели Изинга: $k = 2.77(2)$ для $p = 1.0$, $k = 2.83(3)$ для $p = 0.8$ и $k = 3.08(7)$ для $p = 0.6$.

4. Влияние начальных состояний на эффекты старения и нарушения флуктуационно-диссипативной теоремы

В настоящее время известно, что при эволюции из низкотемпературного начального состояния с $m_0 \neq 0$ неравновесное критическое поведение автокорреляционной функции и динамической восприимчивости характеризуется следующими скейлинговыми зависимостями [25,27,32]

$$C(t, t_w, t_m) = A_C(t - t_w)^{a+1-d/z} (t/t_w)^{\theta-1} F_C(t_w/t, t/t_m),$$

$$\chi(t, t_w, t_m) = A_\chi(t - t_w)^{a+1-d/z} (t/t_w)^{\theta-1} F_\chi(t_w/t, t/t_m), \tag{18}$$

где $t_m = B_m m_0^{-k}$ — введенный ранее временной масштаб, определяемый начальным значением намагниченности, t_w — время ожидания, $t - t_w$ — время измерения. Показатели k, θ, a связаны с критическими индексами рассматриваемой системы: $k = 1/(\theta + a + \beta/(z\nu)) > 0$, $a = (2 - \eta - z)/z$, $\theta = \theta' - (2 - z - \eta)/z$. Скейлинговые

функции $F_C(t_w/t, t/t_m)$ и $F_\chi(t_w/t, t/t_m)$ являются конечными при $t_w \rightarrow 0$ и $t/t_m \rightarrow 0$, A_C и A_χ — универсальные амплитуды, значения которых фиксируются условиями $F_C(0, 0) = 1$, $F_\chi(0, 0) = 1$.

Величины $C(t, t_w, t_m)$ и $\chi(t, t_w, t_m)$ являются обобщенно однородными функциями трех временных масштабов $t - t_w$, t_w и t_m . Когда выполняется следующее их соответствие $t_w < t \ll t_m$, реализуемое для случая эволюции из высокотемпературного начального состояния с $m_0 = 0$, зависимости (18) для $C(t, t_w, t_m)$ и $\chi(t, t_w, t_m)$ переходят в соотношения, соответствующие этому случаю [6,24]. Случай эволюции из высокотемпературного начального состояния с $m_0 = 0$ был детально исследован нами методами Монте-Карло для чистой и структурной неупорядоченной трехмерной модели Изинга в работах [23,24,32].

В противоположном случае с временами $t - t_w$ и t_w , большими по сравнению с t_m , т.е. для $t_m \ll t_w < t$, который реализуется для случая эволюции из низкотемпературного полностью упорядоченного начального состояния с $m_0 = 1$, скейлинговые зависимости (18) принимают вид

$$C(t, t_w) = \bar{A}_C(t - t_w)^{a+1-d/z} (t/t_w)^{\bar{\theta}-1} \bar{F}_C(t_w/t),$$

$$\chi(t, t_w) = \bar{A}_\chi(t - t_w)^{a+1-d/z} (t/t_w)^{\bar{\theta}-1} \bar{F}_\chi(t_w/t), \quad (19)$$

где введен новый показатель $\bar{\theta} = -\beta\delta/(vz) = -(1 + a + \beta/(vz))$, а $\bar{F}_{C,\chi}$ являются универсальными скейлинговыми функциями, получающимися из $F_{C,\chi}(t_w/t, t/t_m)$ в (18) при предельно больших значениях переменной t/t_m .

В режиме старения, реализующемся для времен $t - t_w \sim t_w \gg t_m$, корреляционная функция и функция отклика описываются соотношениями

$$C(t, t_w) \sim t_w^{-2\beta/zv} \tilde{F}_C(t/t_w),$$

$$\chi(t, t_w) \sim t_w^{-2\beta/zv} \tilde{F}_\chi(t/t_w), \quad (20)$$

со скейлинговыми функциями $\tilde{F}_{C,\chi}(t/t_w)$, которые убывают на долговременном этапе их изменения с $t - t_w \gg t_w \gg t_m$ в соответствии со степенным законом

$$\tilde{F}_{C,\chi}(t/t_w) \sim (t/t_w)^{-\phi}, \quad (21)$$

где показатель $\phi = d/z - a + \beta\delta/zv$ [25].

Отметим, что для чистой трехмерной модели Изинга при неравновесной критической эволюции из высокотемпературного начального состояния с $m_0 = 0$ скейлинговая функция $\tilde{F}_C(t/t_w)$ характеризуется значительно более медленным убыванием со временем по степенному закону $\tilde{F}_C(t/t_w) \sim (t/t_w)^{-c_a}$ с показателем $c_a = d/z - \theta' = 1.333(40)$ [24], чем при эволюции из низкотемпературного начального состояния с $m_0 = 1$ с показателем $\phi_c = 2.742(32)$ [27].

В работах [24,27] нами было показано, что присутствие дефектов структуры приводит к усилению эффектов старения, проявляющемуся в сильном замедлении

эффектов корреляции в структурно неупорядоченных системах по сравнению с чистой системой при увеличении времени ожидания t_w . При этом для высокотемпературного начального состояния значения показателя c_a , характеризующего временное спадание скейлинговой функции $\tilde{F}_C(t/t_w)$, уменьшаются с ростом концентрации дефектов, принимая значения $c_a = 1.230(28)$ для спиновой концентрации $p = 0.95$, $c_a = 1.237(22)$ для $p = 0.8$, $c_a = 0.982(30)$ для $p = 0.6$ и $c_a = 0.896(64)$ для $p = 0.5$ [24]. Для случая низкотемпературного начального состояния было выявлено [27], что в структурно неупорядоченных системах спадание скейлинговой функции $\tilde{F}_C(t/t_w)$ со временем в нарушение зависимости (2) осуществляется по степенному закону критической релаксации намагниченности с показателем $c_a(p) = \beta/zv$ со значениями $c_a = 0.232(7)$ для $p = 0.95$, $c_a = 0.229(10)$ для $p = 0.8$, $c_a = 0.175(6)$ для $p = 0.6$ и $c_a = 0.175(10)$ для $p = 0.5$. Эти сильные изменения в поведении автокорреляционной функции были связаны с пиннингом доменных стенок на дефектах структуры, происходящим при неравновесном изменении доменной структуры системы. Показано, что для структурно неупорядоченных систем должна реализовываться более сложная, чем в (19) и (20), форма скейлинговой зависимости автокорреляционной функции с $\tilde{F}_C(t/t_w)$, соответствующая эффектам „сверхстарения“ с показателем $\mu = 2.30(6)$ для слабо неупорядоченных систем с $p = 0.95$, 0.8 и $\mu = 2.80(7)$ для сильно неупорядоченных систем с $p = 0.6$, 0.5 [27,28].

Вычисленные в работах [23,24] для случая высокотемпературного начального состояния значения предельного ФДО $X^\infty = 0.380(13)$ для чистой системы с $p = 1.0$, $X^\infty = 0.413(7)$ и $X^\infty = 0.413(11)$ для слабо неупорядоченных систем с $p = 0.95$ и 0.8 , $X^\infty = 0.446(8)$ и $X^\infty = 0.441(13)$ для сильно неупорядоченных систем с $p = 0.6$ и 0.5 показали, что неравновесное критическое поведение чистых, слабо и сильно неупорядоченных систем, описываемых трехмерной моделью Изинга, принадлежит к различным универсальным классам критического поведения (см. детальное обсуждение в работах [23,32–34]).

Для случая эволюции из низкотемпературного начального состояния было определено значение предельного ФДО $X^\infty = 0.784(5)$ для чистой системы, в то время как для структурно неупорядоченных систем предельные значения ФДО, определяемые динамикой доменов в долговременном режиме, становятся равными нулю [27,28].

Представленные в [24,27] результаты для двух крайних начальных состояний системы с начальными намагниченностями $m_0 = 0$ и $m_0 = 1$ демонстрируют сильное влияние как начальных состояний, так и дефектов структуры на характеристики неравновесного критического поведения систем, описываемых трехмерной моделью Изинга. Это делает исключительно интересной задачу по проведению исследований влияния различных начальных состояний с промежуточными значениями начальной намагниченности $0 < m_0 < 1$ и дефектов структуры

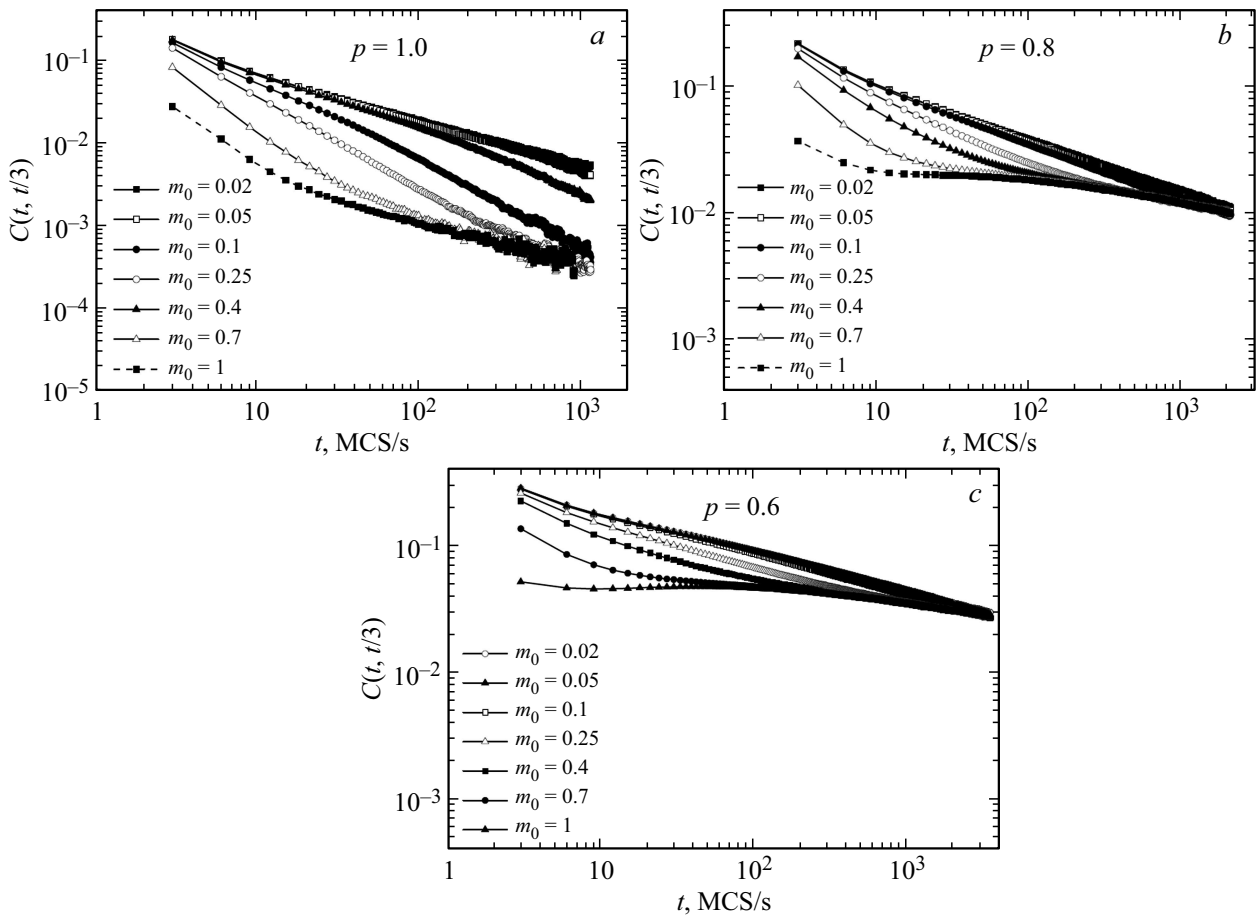


Рис. 4. Неравновесная зависимость автокорреляционной функции $C(t, t_w = t/3, t_m)$ для систем с концентрацией спинов $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c).

на универсальные характеристики неравновесного критического поведения трехмерной модели Изинга.

Учет влияния различных начальных состояний в режиме старения с $t - t_w \sim t_w$ приводит к модификации скейлинговых соотношений (20) для автокорреляционной функции и восприимчивости к следующему виду:

$$C(t, t_w, t_m) = t_w^{-\frac{2\beta}{\nu_c}} \tilde{F}_C(t/t_w, t/t_m),$$

$$\chi(t, t_w, t_m) = t_w^{-\frac{2\beta}{\nu_c}} \tilde{F}_\chi(t/t_w, t/t_m). \quad (22)$$

Для выявления предсказываемой соотношениями (22) зависимости $C(t, t_w, t_m)$ и $\chi(t, t_w, t_m)$ от начальных значений намагниченности m_0 удобно в качестве времени ожидания t_w выбрать величину, пропорциональную времени наблюдения, например $t_w = t/3$. Тогда с учетом, что $t_m \sim m_0^{-k}$, скейлинговые зависимости в (22) для данных функций примут вид

$$C(t, t_w = t/3, t_m) = t^{-\frac{2\beta}{\nu_c}} G_C(tm_0^k),$$

$$\chi(t, t_w = t/3, t_m) = t^{-\frac{2\beta}{\nu_c}} G_\chi(tm_0^k), \quad (23)$$

где $G_C(tm_0^k)$ и $G_\chi(tm_0^k)$ — скейлинговые функции.

При расчете временных зависимостей для автокорреляционной функции и динамической восприимчивости неравновесное поведение систем исследовалось на временах до 3000 шагов Монте-Карло на спин. При моделировании чистой модели Изинга с $p = 1.0$ вычисляемые величины усреднялись по 1500 прогонам. При моделировании структурно неупорядоченных систем усреднение проводилось по 500 примесным конфигурациям и 5 прогонам для каждой примесной конфигурации.

На рис. 4 и 5 представлены графики временных зависимостей автокорреляционной функции $C(t, t_w = t/3, t_m)$ и динамической восприимчивости $\chi(t, t_w = t/3, t_m)$ для систем с концентрацией спинов $p = 1.0, 0.8$ и 0.6 для различных начальных состояний. Эффекты старения в поведении данных функций наглядно проявляются через отклонение зависимостей $C(t, t_w = t/3, t_m)$ и $\chi(t, t_w = t/3, t_m)$ от степенной (при постоянном значении t_w), имеющей вид прямой в двойном логарифмическом масштабе, и характеризуются замедлением корреляции и релаксации системы с увеличением ее „возраста“ t_w . Из представленных на рисунках графиков видно, что в поведении автокорреляционной функции эффекты старения проявляются сильнее, чем

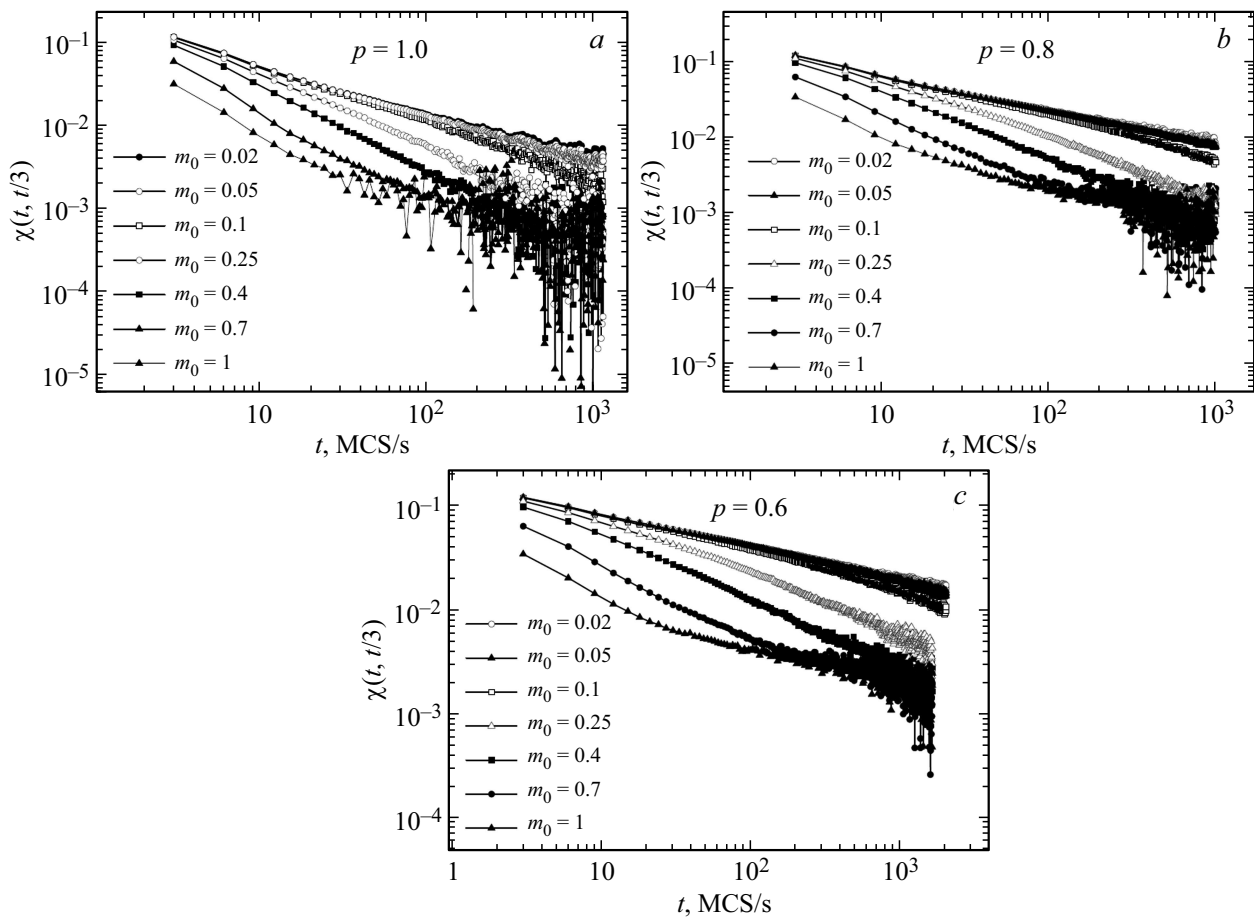


Рис. 5. Неравновесная зависимость динамической восприимчивости $\chi(t, t_w = t/3, t_m)$ для систем с концентрацией спинов $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c).

в поведении восприимчивости. Кроме того, из анализа данных графиков можно сделать вывод, что с ростом начального значения намагниченности m_0 эффекты старения усиливаются, причем в структурно неупорядоченных системах это явление более ярко выражено по сравнению с чистой моделью Изинга за счет пиннинга доменных стенок на дефектах структуры [27].

Для проверки реализации скейлинговых соотношений (23), на примере автокорреляционной функции, нами были построены зависимости $C(t, t/3, t_m)t^{2\beta/(vz)}$ от переменной $x = tm_0^k$ с использованием значений критических показателей β/vz и k , определенных выше на основе анализа временного поведения намагниченности для систем с соответствующими спиновыми концентрациями. Результаты, представленные на рис. 6, a для чистой модели Изинга, демонстрируют „коллапс“ данных, полученных для различных m_0 , на универсальной кривой, характеризуемой скейлинговой функцией $G_C(tm_0^k)$. Это указывает на выполнение скейлинговых соотношений (22) и (23) с реализацией так называемого канонического старения [10].

Однако временное поведение автокорреляционной функции для структурно неупорядоченных систем, пред-

ставленное на рис. 6, b и c, демонстрирует нарушение скейлингового соотношения (23), что связано с существенным влиянием дефектов структуры на корреляционные свойства системы на неравновесном этапе ее эволюции при старте из низкотемпературных начальных состояний с $m_0 \neq 0$. Представление зависимости $C(t, t_w = t^{1/\mu}, t_m)t^{2\beta/\mu v}$ от $x = t^\mu m_0^k$ позволяет при значении показателя $\mu = 2.30(6)$ для систем с $p = 0.95, 0.8$ и $\mu = 2.80(7)$ для систем с $p = 0.6, 0.5$ [27] получить совпадение данных для скейлинговой функции $G_C(t^\mu m_0^k)$ на соответствующих универсальных кривых при значениях начальной намагниченности $0.25 \leq m_0 \leq 1$ и распределение данных в виде параллельно расположенных графиков для $0.02 \leq m_0 \leq 0.1$ (рис. 7). Это указывает на то, что в структурно неупорядоченных системах для автокорреляционной функции реализуется более сложная скейлинговая зависимость вида

$$C(t, t_w = t^{1/\mu}, t_m) = t^{-\frac{2\beta}{\mu v}} \tilde{G}_C(t^\mu m_0^k). \quad (24)$$

Такой случай скейлинговой зависимости, характеризуемой показателем $\mu > 1$, классифицируется в теории неравновесных процессов как соответствующий явлению „сверхстарения“ [10].

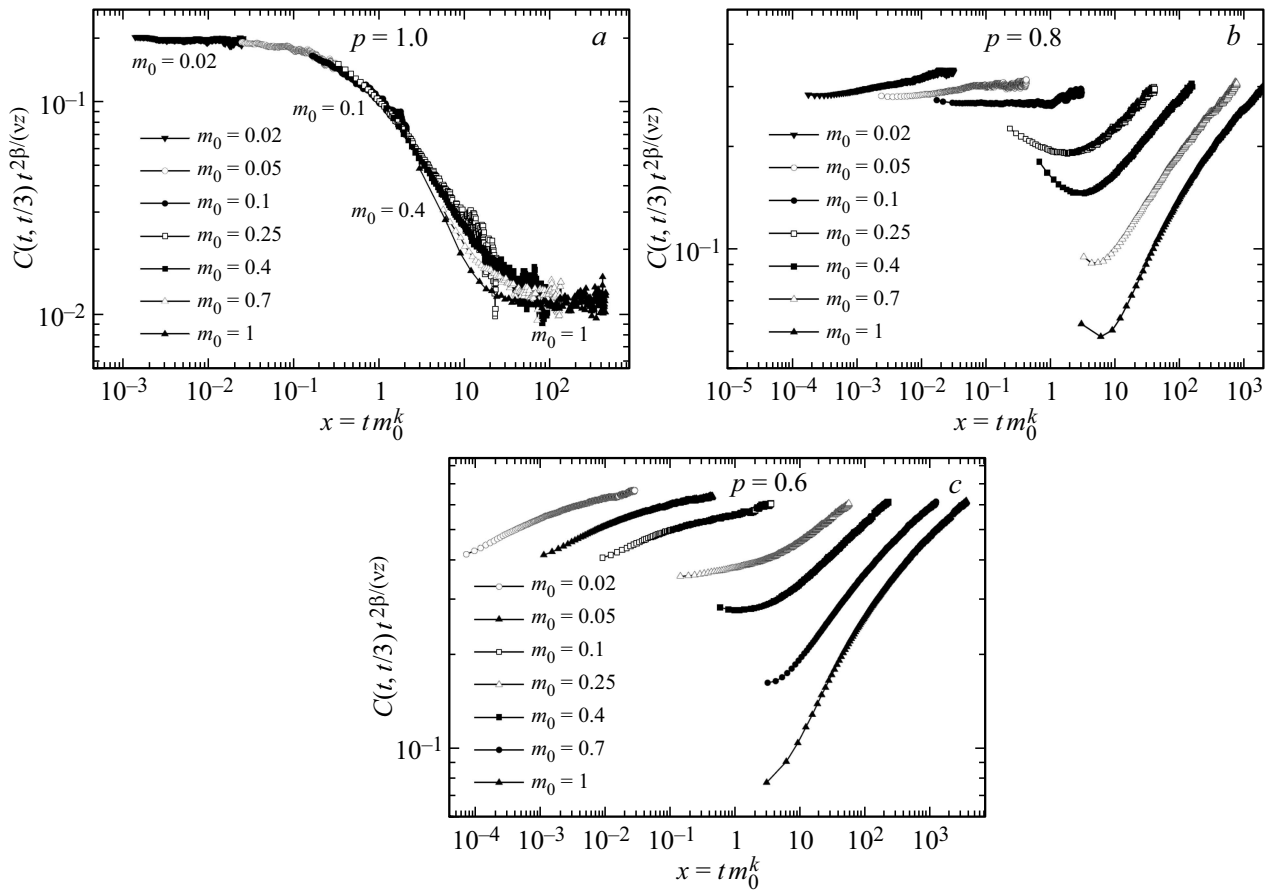


Рис. 6. Зависимости скейлинговой функции $G_C(tm_0^k) = C(t, t_w = t/3, t_m)t^{2\beta/(vz)}$ от переменной $x = tm_0^k$ для систем с $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c), демонстрирующие „коллапс“ полученных для различных m_0 данных для чистой системы с $p = 1.0$ и нарушение „коллапса“ для структурно неупорядоченных систем с $p = 0.8$ и 0.6 .

Наблюдаемое для начальных состояний с $0.25 \leq m_0 \leq 1$ изменение режима поведения автокорреляционной функции на долговременном этапе с $t \gg t_w$ связано с сильным замедлением эффектов корреляции вследствие пиннинга доменных стенок на дефектах структуры в процессе неравновесного изменения доменной структуры системы. Данная особенность в поведении автокорреляционной функции была выявлена нами ранее в структурно неупорядоченной трехмерной модели Изинга, эволюционирующей из низкотемпературного полностью упорядоченного начального состояния с $m_0 = 1$ с реализацией для $C(t, t_w)$ эффектов сверхстарения [27]. Для начальных состояний с $0.02 \leq m_0 < 0.1$ поведение автокорреляционной функции не меняется как на этапе старения с $t \sim t_w$, так и на долговременном этапе с $t \gg t_w$ и характеризуется одним режимом поведения.

Отсюда можно сделать вывод, что поведение автокорреляционной функции для систем, релаксирующих из начальных состояний с различными значениями начальной намагниченности m_0 , характеризуется принадлежностью к двум подклассам универсального неравновесного критического поведения. Один из них соответствует типу низкотемпературного начального состояния, включаю-

щего в себя состояния с $0.25 \leq m_0 \leq 1$. В этом случае скейлинговая временная зависимость автокорреляционной функции для чистой модели Изинга описывается соотношениями теории канонического старения, а для структурно неупорядоченной модели Изинга — теории сверхстарения. Другой подкласс универсального неравновесного критического поведения соответствует типу высокотемпературного начального состояния, включающего в себя состояния с $m_0 < 0.1$. В этом случае автокорреляционная функция описывается скейлинговыми формами, соответствующими каноническому старению, для систем со всеми значениями спиновых концентраций. Случай начальной намагниченности $m_0 = 0.1$ является переходным, когда поведение автокорреляционной функции на временах $t \geq t_w$ соответствует типу неравновесного критического поведения с высокотемпературным начальным состоянием, а на долговременном этапе с $t \gg t_w$ — низкотемпературному типу начальных состояний. С увеличением концентрации дефектов поведение автокорреляционной функции для системы с $m_0 = 0.1$ все более соответствует подклассу высокотемпературного начального состояния. Аналогичные свойства были выявлены и для динамической восприимчивости.

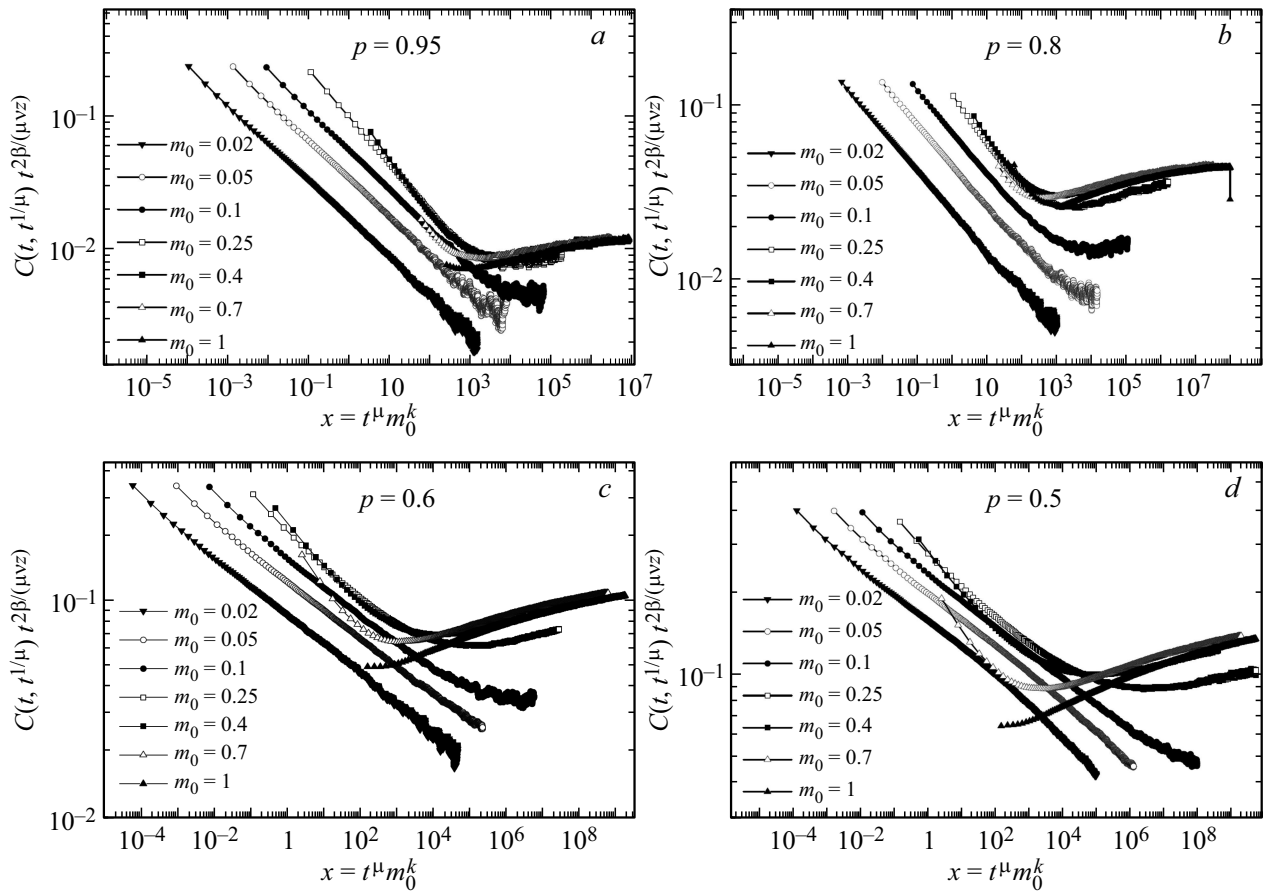


Рис. 7. Эффекты „сверхстарения“, наблюдаемые в зависимости скейлинговой функции $G_C(t^\mu m_0^k) = C(t, t_w = t^{1/\mu}, t_m) t^{2\beta/\mu\nu z}$ от переменной $x = t^\mu m_0^k$, с $\mu = 2.30$ для слабо неупорядоченных систем с $p = 0.95$ (a), $p = 0.8$ (b), и $\mu = 2.80$ для сильно неупорядоченных систем с $p = 0.6$ (c) и $p = 0.5$ (d).

Данные особенности в неравновесном критическом поведении автокорреляционной функции и динамической восприимчивости мы связываем с пиннингом доменных стенок на дефектах структуры в процессе неравновесного изменения доменной структуры системы.

На следующем этапе было осуществлено исследование влияния различных начальных состояний на значения предельного ФДО. Рассчитывалась временная зависимость динамической восприимчивости $\chi(t, t_w, t_m)$ и автокорреляционной функции $C(t, t_w, t_m)$ для различных значений начальных намагниченностей m_0 при времени ожидания, равном $t_w = t/9$, которое лучше соответствует условию $t - t_w \gg t_w$ для долговременного этапа эволюции системы — области универсальности неравновесной динамики. Представленная на рис. 8 параметрическая зависимость $T_c \chi$ от C позволяет получить предельное ФДО X^∞ при $C \rightarrow 0$ в соответствии с соотношением (11).

Из графиков на рис. 8 видно, что в случае начальных состояний с намагниченностью $0.02 \leq m_0 \leq 0.1$ системы со всеми спиновыми концентрациями характеризуются линейной зависимостью $T_c \chi$ от C и предельными значениями ФДО, представленными в таблице. Эти значе-

ния в пределах погрешности совпадают со значениями, вычисленными для высокотемпературного начального состояния $X^\infty = 0.390(12)$ ($p = 1.0$), $X^\infty = 0.415(18)$ ($p = 0.8$) и $X^\infty = 0.443(6)$ ($p = 0.6$) [23]. В случае начальных состояний с намагниченностью $0.25 \leq m_0 \leq 1$ предельное значение ФДО для чистой системы ($p = 1.0$) хорошо согласуется с найденным в работе [27] значени-

m_0	$X^\infty(p, m_0)$				
	$p = 1.0$	$p = 0.95$	$p = 0.8$	$p = 0.6$	$p = 0.5$
0.02	0.381(38)	0.410(17)	0.412(21)	0.423(19)	0.438(28)
0.05	0.392(32)	0.413(12)	0.414(18)	0.427(11)	0.440(18)
0.1	0.401(35)	0.423(16)	0.425(27)	0.434(17)	0.445(13)
0.25	0.762(39)	0	0	0	0
0.4	0.773(41)	0	0	0	0
0.7	0.775(45)	0	0	0	0
1.0	0.779(44)	0	0	0	0

ния в пределах погрешности совпадают со значениями, вычисленными для высокотемпературного начального состояния $X^\infty = 0.390(12)$ ($p = 1.0$), $X^\infty = 0.415(18)$ ($p = 0.8$) и $X^\infty = 0.443(6)$ ($p = 0.6$) [23]. В случае начальных состояний с намагниченностью $0.25 \leq m_0 \leq 1$ предельное значение ФДО для чистой системы ($p = 1.0$) хорошо согласуется с найденным в работе [27] значени-

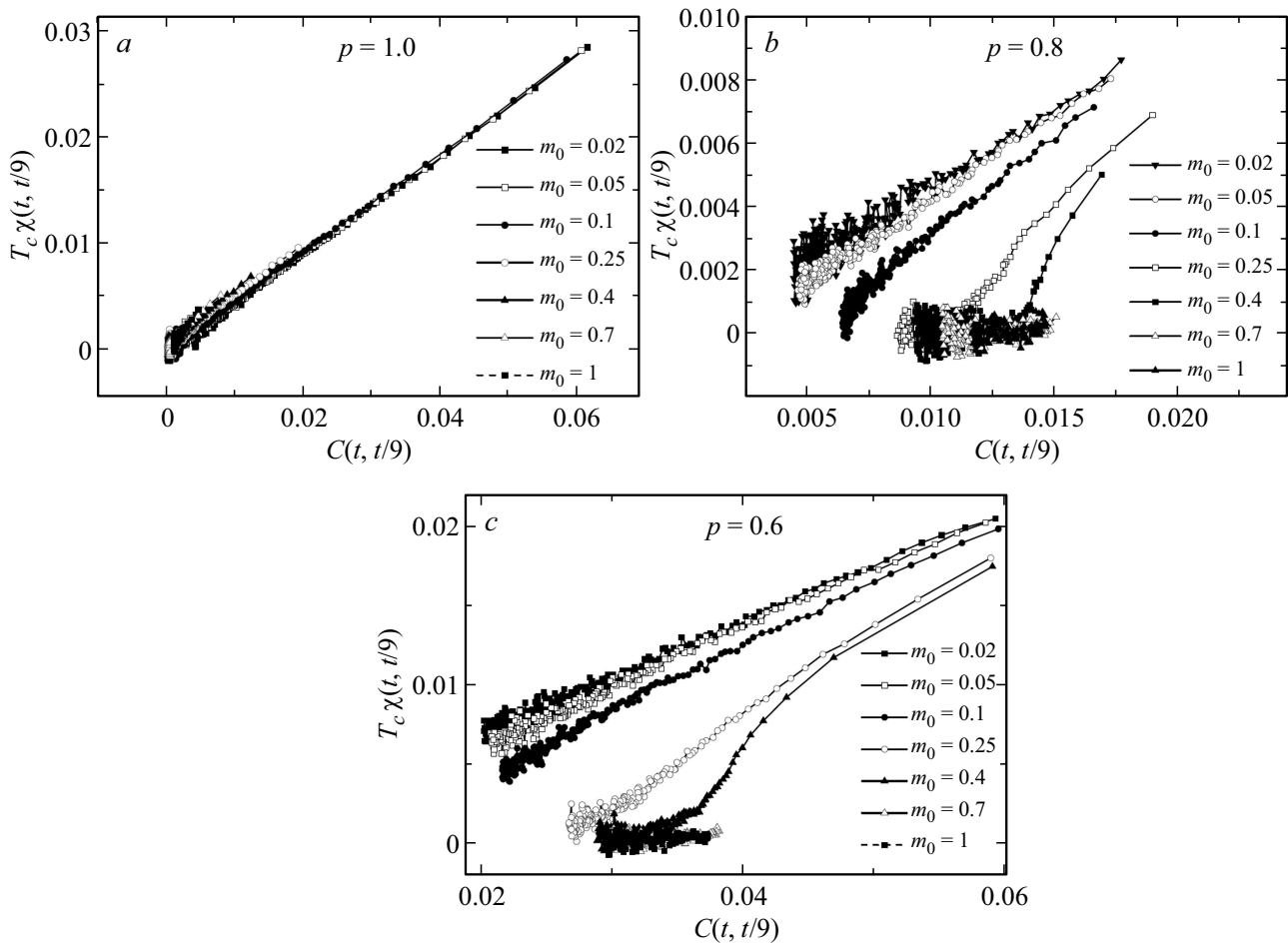


Рис. 8. Параметрическая зависимость $T_c \chi(t, t_w = t/9, t_m)$ от автокорреляционной функции $C(t, t_w = t/9, t_m)$ для систем с $p = 1.0$ (a), $p = 0.8$ (b) и $p = 0.6$ (c) при ряде значений начальной намагниченности m_0

ем $X^\infty = 0.784(5)$ для низкотемпературного полностью упорядоченного состояния с $m_0 = 1$. Для структурно неупорядоченных систем с начальными намагниченностями $0.25 \leq m_0 \leq 1$ предельное ФДО $X^\infty = 0$, что связано с сильным замедлением корреляционных эффектов на временах $t \gg t_w \gg 1$ вследствие пиннинга доменных стенок на дефектах структуры [27].

Таким образом, можно сделать следующий вывод: неравновесное критическое поведение трехмерной модели Изинга с произвольной начальной намагниченностью m_0 можно разделить на два подкласса универсальности, соответствующих высокотемпературному и низкотемпературному начальным состояниям с характерными для этих состояний значениями предельного ФДО X^∞ . При $0.25 \leq m_0 \leq 1$ система характеризуется предельными значениями ФДО, вычисленными для случая низкотемпературного начального состояния с $m_0 = 1$, которые равны $X^\infty = 0.784(5)$ для чистой системы и нулю для структурно неупорядоченных систем. При $0.02 \leq m_0 \leq 0.1$ значения ФДО совпадают с найденными для случая $m_0 \ll 1$ значениями $X^\infty = 0.390(12)$ для чистой модели Изинга, $X^\infty = 0.415(18)$ для слабо

неупорядоченных систем и $X^\infty = 0.443(6)$ для сильно неупорядоченных систем [22–24].

5. Заключение

В заключение отметим, что в результате численных исследований выявлено существенное влияние начальных состояний на неравновесную критическую динамику трехмерной модели Изинга.

Показано, что в критической релаксации намагниченности начальные состояния с намагниченностями $0 < m_0 < 1$ приводят к двум принципиально разным режимам релаксации, характеризующимся на временах $t \ll t_m \sim m_0^{-k}$ степенным ростом намагниченности $M(t) \sim t^{\theta'}$, а на временах $t \gg t_m$ степенным убыванием намагниченности $M(t) \sim t^{-\beta/z\nu}$.

Выявлено, что с ростом начального значения намагниченности происходит усиление эффектов старения, характеризующих увеличение времени релаксации и времени корреляции с ростом времени ожидания t_w — „возраста“ системы. В структурно неупорядоченных системах по сравнению с чистой моделью Изинга наблю-

даются существенные изменения в поведении автокорреляционной функции и динамической восприимчивости, характеризуемые сильным замедлением их временного спада. Данные особенности в поведении автокорреляционной функции и восприимчивости характеризуются эффектами сверхстарения и связаны с пиннингом доменных стенок на дефектах структуры в процессе неравновесного изменения доменной структуры системы.

Было показано, что для начальных состояний системы со значениями намагниченности в интервале $0.25 \leq m_0 \leq 1$ предельные значения ФДО, определяемые динамикой доменов в долговременном режиме и пиннингом доменных стенок на дефектах структуры, становятся равными нулю. Для начальных состояний с $0.02 \leq m_0 \leq 0.1$ динамика доменной структуры не проявляется в долговременном режиме неравновесного критического поведения системы. В результате предельные значения ФДО совпадают между собой для разных m_0 в этом интервале и с найденными ранее для высокотемпературного начального состояния значениями ФДО, соответствующими различным классам универсальности критического поведения чистой модели Изинга, слабо и сильно неупорядоченных систем [22–24].

Впервые выявлено, что в неравновесном критическом поведении трехмерной модели Изинга с произвольной начальной намагниченностью m_0 можно выделить два подкласса универсальности, соответствующих эволюции системы из высокотемпературного и низкотемпературного начальных состояний с характерными для этих состояний значениями предельного ФДО X^∞ .

Список литературы

- [1] К. Вильсон, Дж. Когут. Ренормализационная группа и ϵ -разложение. Мир, М. (1975). 256 с.; УФН **146**, 459 (1985).
- [2] А.Н. Васильев. Квантовополевая ренорм-группа в теории критического поведения и стохастической динамике. Изд-во ПИЯФ, СПб. (1998). 774 с.
- [3] В.В. Прудников, П.В. Прудников, А.Н. Вакилов. Теоретические методы описания неравновесного критического поведения структурно неупорядоченных систем. Физматлит, М. (2013). 316 с.
- [4] D.P. Landau, K. Binder. A Guide to Monte Carlo simulations in statistical physics. Cambridge University Press, Cambridge (2009). 471 p.
- [5] В.В. Прудников, А.Н. Вакилов, П.В. Прудников. Фазовые переходы и методы их компьютерного моделирования. Физматлит, М. (2009). 224 с.
- [6] P. Calabrese, A. Gambassi. J. Phys. A **38**, R133 (2005).
- [7] В.В. Прудников, П.В. Прудников, М.В. Мамонова. УФН **187**, 817 (2017).
- [8] L.C.E. Struik. Physical ageing in amorphous polymers and other materials. Elsevier, Amsterdam (1978). 229 p.
- [9] A.J. Bray. Adv. Phys. **43**, 357 (1994).
- [10] M. Henkel, M. Pleimling. Non-equilibrium phase transitions. Springer, Heidelberg (2010). 544 p.
- [11] E. Vincent, J. Hammann, M. Ocio, J.P. Bouchaud, L.F. Cugliandolo. Lect. Notes Phys. **492**, 184 (1997).
- [12] L. Berthier, G. Biroli. Rev. Mod. Phys. **83**, 587 (2011).
- [13] L. Berthier, J. Kurchan. Nature Phys. **9**, 310 (2013).
- [14] L.F. Cugliandolo, D.S. Dean, J. Kurchan. Phys. Rev. Lett. **79**, 2168 (1997).
- [15] П.В. Прудников, В.В. Прудников, И.А. Калашников, С.С. Циркин. ЖЭТФ **133**, 1251 (2008).
- [16] П.В. Прудников, В.В. Прудников, И.А. Калашников, М.В. Рычков. ЖЭТФ **137**, 287 (2010).
- [17] В.В. Прудников, П.В. Прудников, А.Н. Вакилов, А.С. Кришцын. ЖЭТФ **132**, 417 (2007).
- [18] P.V. Prudnikov, V.V. Prudnikov, A.S. Krinitsyn, A.N. Vakilov, E.A. Pospelov, M.V. Rychkov. Phys. Rev. E **81**, 011130 (2010).
- [19] P.V. Prudnikov, V.V. Prudnikov, B. Zheng, S.V. Dorofeev, V.Yu. Kolesnikov. Progr. Theor. Phys. **117**, 973 (2007).
- [20] P.V. Prudnikov, M.A. Medvedeva. Progr. Theor. Phys. **127**, 369 (2012).
- [21] N. Rosov, C. Hohenemser, M. Eibenschutz. Phys. Rev. B **46**, 3452 (1992).
- [22] В.В. Прудников, П.В. Прудников, Е.А. Поспелов. Письма в ЖЭТФ **98**, 693 (2013).
- [23] В.В. Прудников, П.В. Прудников, Е.А. Поспелов. ЖЭТФ **145**, 462 (2014).
- [24] V.V. Prudnikov, P.V. Prudnikov, E.A. Pospelov, A.N. Vakilov. Phys. Lett. A **379**, 774 (2015).
- [25] P. Calabrese, A. Gambassi, F. Krzakala. J. Stat. Mech. (2006) P06016.
- [26] P.C. Hohenberg, B.I. Halperin. Rev. Mod. Phys. **49**, 435 (1977).
- [27] В.В. Прудников, П.В. Прудников, Е.А. Поспелов, П.Н. Маляренко. Письма в ЖЭТФ **102**, 192 (2015).
- [28] V.V. Prudnikov, P.V. Prudnikov, E.A. Pospelov. J. Stat. Mech. (2016) 043303.
- [29] W. Janke. In: Computational Many Particle Physics / Eds H. Fehske, R. Schneider, A. Weibe. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin (2008). V. 739. P. 79–140.
- [30] A.M. Ferrenberg, D.P. Landau. Phys. Rev. B **44**, 5081 (1991).
- [31] H.K. Janssen, B. Schaub, B. Schmittmann. Z. Phys. B **73**, 539 (1989).
- [32] P.V. Prudnikov, V.V. Prudnikov, E.A. Pospelov, P.N. Malayarenko, A.N. Vakilov. Prog. Theor. Exp. Phys. **2015**, 053A01 (2015).
- [33] В.В. Прудников, А.Н. Вакилов. Письма в ЖЭТФ **55**, 709 (1992); ЖЭТФ **103**, 962 (1993).
- [34] А.К. Муртазаев, И.К. Камиллов, А.Б. Бабаев. ЖЭТФ **126**, 1377 (2004).