

01;05.1

Характер деформаций на границе раздела упругих сред при условии скольжения

© Н.В. Чертова, Ю.В. Гриняев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия
E-mail: chertova@ispms.tsc.ru

Поступило в Редакцию 5 сентября 2017 г.

Коэффициенты Френеля, получаемые при решении задачи распространения волн через границу раздела двух упругих сред, и выражения для компонент тензора упругой дисторсии позволяют исследовать характер динамических деформаций на границе. Определены деформационные моды, не равные нулю на границе раздела упругих сред при условии скользящего контакта. Построены и проанализированы зависимости амплитуд деформаций на границе раздела от угла падения волны и параметров граничащих сред для падающих продольных и поперечных волн.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.09.46070.17024

Напряженно-деформированное состояние, определяющее особенности эксплуатации и разрушения материалов и сред, зависит от способа и величины внешнего воздействия, свойств и внутренней структуры материала. По современным представлениям границы раздела являются важными элементами структуры реальных иерархически организованных материалов и сред, к числу которых относятся геологические среды, композиционные материалы, поликристаллы [1]. В механике сплошных сред на границе раздела наиболее часто рассматриваются два условия, одно из которых соответствует идеальному контакту, а другое описывает скольжение [2]. Условие идеального контакта предполагает непрерывность вектора смещений и напряжений на границе [2,3]. При скольжении на границе раздела непрерывны нормальные компоненты смещений и напряжений, сдвиговые напряжения равны нулю, а смещения, направленные по касательной, претерпевают разрыв или имеют скачок [2,4]. Чтобы определить деформации на границе раздела, рассмотрим задачу о прохождении упругой волны через границу. Обычно при решении этой задачи находятся коэффициенты Френеля

и определяются потоки энергии первичной и вторичных волн [3]. В настоящей работе эти коэффициенты используются для анализа деформаций, характеризующих формоизменение и поворот бесконечно малого элемента среды на границе раздела упругих тел при скольжении. При условии идеального контакта эта задача решена в [5,6].

Предположим, что на границу раздела двух однородных изотропных упругих сред, определяемую нормалью $n \parallel z$, в точке $z = 0$ падает плоская монохроматическая волна. Направление распространения волны образует некоторый угол с осью z в плоскости zy декартовой системы координат, связанной с границей раздела. Среда 1, расположенная при $z < 0$, характеризуется параметрами μ^- , λ^- , ρ^- , среда 2 при $z > 0$ задается величинами μ^+ , λ^+ , ρ^+ . Геометрия поставленной задачи позволяет рассмотреть две независимые подзадачи. В случае падения горизонтально поляризованной поперечной (SH) волны отличной от нуля является компонента смещений U_x , перпендикулярная плоскости падения волны zy . Вертикально поляризованные продольная (P) и поперечная (SV) волны определяются компонентами смещений U_z , U_y и соответствующими деформациями в плоскости zy . Граничные условия скольжения для падающих P - и SV -волн имеют вид

$$U_z^1 = U_z^2, \quad \sigma_{zz}^1 = \sigma_{zz}^2, \quad \sigma_{zy}^1 = \sigma_{zy}^2 = 0. \quad (1)$$

Смещения на границе в случае P -волны задаются компонентами

$$U_z^0 = A_l^0 \cos \theta_l^0 \exp(ik_l^0 r_l^0), \quad U_y^0 = A_l^0 \sin \theta_l^0 \exp(ik_l^0 r_l^0), \quad (2)$$

а в случае SV -волны — компонентами

$$U_z^0 = -A_t^0 \sin \theta_t^0 \exp(ik_t^0 r_t^0), \quad U_y^0 = A_t^0 \cos \theta_t^0 \exp(ik_t^0 r_t^0), \quad (3)$$

где $A_{l(t)}^0$ — амплитуды, $\theta_{l(t)}^0$ — углы падения, $k_{l(t)}^0$ — волновые числа, $r_{l(t)}^0 = z \cos \theta_{l(t)}^0 + y \sin \theta_{l(t)}^0$. Здесь и далее индексы l и t обозначают величины продольной и поперечной волн, множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен, t — время, ω — частота. Компоненты смещений вторичных волн не зависят от типа падающей волны [3,5,6] и могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} U_z^\pm &= \pm A_l^\pm \cos \theta_l^\pm \exp(ik_l^\pm r_l^\pm) - A_t^\pm \sin \theta_t^\pm \exp(ik_t^\pm r_t^\pm), \\ U_y^\pm &= A_l^\pm \sin \theta_l^\pm \exp(ik_l^\pm r_l^\pm) - A_t^\pm \cos \theta_t^\pm \exp(ik_t^\pm r_t^\pm), \end{aligned} \quad (4)$$

где $A_{l(t)}^{\pm}$ — амплитуды отраженных и преломленных волн, $\theta_{l(t)}^{\pm}$, $k_{l(t)}^{\pm}$, $r_{l(t)}^{\pm}$ — величины, подобные приведенным в (2), (3) для падающих волн. Смещения в граничных точках находятся по формулами (2), (4) и (3), (4) для падающих P - и SV -волн. Подставив определенные на их основе компоненты деформаций в граничные условия (1) для напряжений и приравняв к нулю компоненты смещений U_z , получим систему уравнений для коэффициентов Френеля

$$D_{im}X_m = b_i,$$

$$(D_{im}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_l^- & \sin \theta_l^- & \cos \theta_l^+ & -\sin \theta_l^+ \\ Z_l^- a^- \sin 2\theta_l^- & -Z_l^- \cos 2\theta_l^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_l^+ a^+ \sin 2\theta_l^+ & Z_l^+ \cos 2\theta_l^+ \\ Z_l^- \cos 2\theta_l^- & Z_l^- \sin 2\theta_l^- & -Z_l^+ \cos 2\theta_l^+ & Z_l^+ \sin 2\theta_l^+ \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$(X_m) = (R_{ll} \ R_{tl} \ T_{ll} \ T_{tl})^T, \quad (b_i) = (\cos \theta_l^0 \ Z_l^0 a^- \sin 2\theta_l^0 \ 0 \ -Z_l^0 \cos 2\theta_l^-)^T, \quad (6)$$

$$(X_m) = (R_{lt} \ R_{tt} \ T_{lt} \ T_{tt})^T, \quad (b_i) = (-\sin \theta_l^0 \ Z_l^0 \cos 2\theta_l^0 \ 0 \ Z_l^0 \sin 2\theta_l^0)^T. \quad (7)$$

Здесь $i, m = 1, 2, 3, 4$, $Z_{l(t)}^{\pm} = C_{l(t)}^{\pm} \rho^{\pm}$ — упругие импедансы, $C_{l(t)}^{\pm}$ — упругие скорости в граничных средах, $R_{ll(t)}$, $R_{tl(t)}$, $T_{ll(t)}$, $T_{tl(t)}$ — коэффициенты Френеля для первичной волны P (6) и SV (7), $a^{\pm} = (C_t^{\pm}/C_l^{\pm})^2$.

Аналитические решения (5) и формулы для деформаций, приведенные в [5,6], позволяют построить и исследовать зависимости амплитуд деформаций на границе от угла падения волны и параметров контактирующих упругих сред при скольжении. В качестве примера рассмотрим границы раздела алюминия и меди, титана и никеля, алюминия и серебра, характеризуемые отношениями скоростей V_l , V_t , V_{lt} и плотностей ρ (табл. 1). На рис. 1, *a* представлены результаты, полученные для P -волны, падающей на границы Al/Cu, Ti/Ni, Al/Ag, свойства которых удовлетворяют условию $V_l, V_t < 1$. Аналогичные зависимости на границах Cu/Al, Ni/Ti, Ag/Al, для которых $V_l, V_t > 1$, приведены на рис. 1, *b*. В обоих случаях деформации представлены с точностью до множителя $\varepsilon_{ij} = E_{ij}A$ ($A = ik_l^0 A_l^0$). Как показали расчеты, на границах раздела при падении P -волны недиагональные компоненты тензора дисторсии, определяющие сдвиг и поворот, равны нулю, удлинения $E_{zz} \neq 0$, $E_{yy} \neq 0$. На рис. 1, *a* амплитуды компонент $E_{zz}(\theta_l^0)$, $E_{yy}(\theta_l^0)$ изменяются непрерывно от значений при $\theta_l^0 = 0$ до нуля

Таблица 1. Параметры, определяющие границы контакта рассматриваемых сред

Граница раздела	$V_l = C_l^+/C_l^-$	$V_t = C_t^+/C_t^-$	$V_{tl} = C_t^-/C_l^-$	$\rho = \rho^+/\rho^-$
Al/Cu	0.743671	0.722045	0.495253	3.296296
Ti/Ni	0.903692	0.930818	0.510433	1.975752
Al/Ag	0.569620	0.5079871	0.495253	3.859259

Таблица 2. Значения критических углов падения P - и SV -волн на границы раздела рассматриваемых сред

Тип волны	Критический угол	Al/Cu	Ti/Ni	Al/Ag	Cu/Al	Ni/Ti	Ag/Al
P	$\theta_{l^*}^0, \text{rad}$	—	—	—	0.83854	1.1283	0.6060
SV	$\theta_{t^*1}^0, \text{rad}$	0.5181	0.5357	0.5181	0.36569	0.4951	0.2543
	$\theta_{t^*2}^0, \text{rad}$	0.7288	0.6002	1.0541	0.50163	0.5536	0.4575
	$\theta_{t^*3}^0, \text{rad}$	—	—	—	0.80675	1.1966	0.5329

при касательном падении волны. Максимальные значения деформаций наблюдаются в интервале углов $1.2 \leq \theta_l^0 \leq 1.4 \text{ rad}$. На границах Cu/Al, Ni/Ti, Ag/Al (рис. 1, *b*) имеет место полное внутреннее отражение продольной волны. При $\theta_l^0 > \theta_{l^*}^0 = \arcsin(1/V_l)$ (табл. 2) преломленная P -волна не распространяется во второй среде, а затухает вблизи границы раздела. Это объясняется тем, что при углах $\theta_l^0 > \theta_{l^*}^0$ коэффициенты уравнения (5), как и решения (6), имеют действительные и мнимые части. Зависимости $E_{zz}(\theta_l^0)$, $E_{yy}(\theta_l^0)$ на рис. 1, *b* качественно совпадают с кривыми, приведенными на рис. 1, *a*, за исключением областей особых точек.

Результаты для падающей SV -волны показывают, что на границах раздела изучаемых сред не равны нулю диагональные компоненты тензора деформации, приведенные на рис. 2, с точностью до множителя $B = ik_t^0 A_t^0$. Амплитуды деформаций на границах Al/Cu, Ti/Ni, Al/Ag имеют две особые точки (рис. 2, *a*). При углах $\theta_t^0 > \theta_{t^*1}^0 = \arcsin(C_t^-/C_l^-)$ отраженная P -волна становится неоднород-

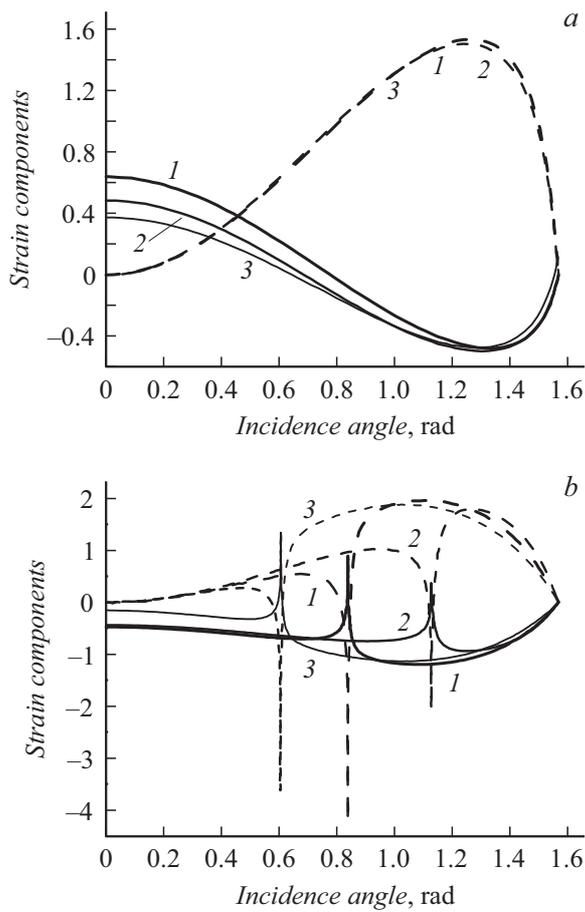


Рис. 1. Амплитуды деформаций на границах раздела Al/Cu (1), Ti/Ni (2), Al/Ag (3) (a) и Cu/Al (1), Ni/Ti (2), Ag/Al (3) (b) при условии скольжения для падающей P -волны. Сплошные линии соответствуют компонентам деформации E_{zz} , штриховые — компонентам E_{yy} .

ной и затухает вблизи границы раздела, при $\theta_t^0 > \theta_{t^*2}^0 = \arcsin(C_t^-/C_t^+)$ затухает преломленная P -волна вблизи границы. На границах раздела Cu/Al, Ni/Ti, Ag/Al зависимости $E_{zz}(\theta_t^0)$, $E_{yy}(\theta_t^0)$ имеют три особые

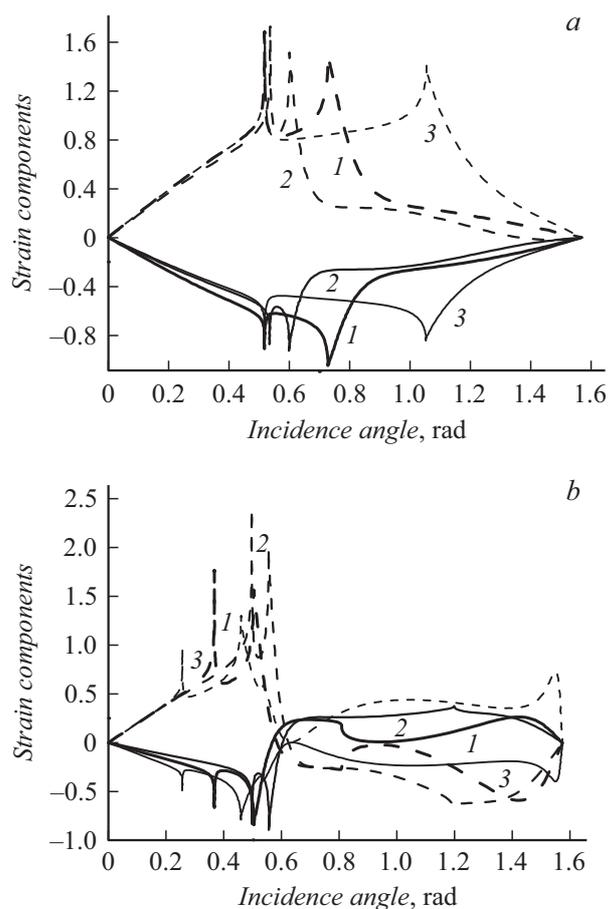


Рис. 2. Амплитуды деформаций на границах раздела Al/Cu (1), Ti/Ni (2), Al/Ag (3) (a) и Cu/Al (1), Ni/Ti (2), Ag/Al (3) (b) при условии скольжения для первичной SV-волны. Обозначение линий то же, что на рис. 1.

точки (рис. 2, b). Когда $\theta_i^0 > \theta_{i*1}^0 = \arcsin(C_i^-/C_i^+)$, происходит полное внутреннее отражение P-волны; аналогичная особенность наблюдается для преломленной SV-волны при $\theta_i^0 > \theta_{i*3}^0 = \arcsin(C_i^-/C_i^+)$. В случае $\theta_i^0 > \theta_{i*2}^0 = \arcsin(C_i^-/C_i^-)$ отраженная P-волна неоднородна и затухает

на расстоянии длины волны вблизи границы. Зависимости удлинений на рис. 2, *a*, *b* качественно подобны и различаются знаком.

Из граничного условия $\sigma_{zx}^1 = \sigma_{zx}^2 = 0$ в случае первичной *SH*-волны находится деформация $\varepsilon_{zx} = 0$. Коэффициенты Френеля, задающие смещение, и определение поворота показывают, что $W_{zx} = 0$.

В заключение отметим, что характер деформаций на границе раздела упругих сред при скольжении, установленный для трех пар контактирующих сред, справедлив для любых упругих сред. Из граничных условий $[\sigma_{zy}] = [\sigma_{zx}] = 0$ следует равенство нулю суммарных деформаций сдвига. Из непрерывности нормальных смещений на границе и равенства фазовых множителей, определяющего закон Снеллиуса, следует $\partial_y U_z = 0$, поэтому повороты на границе раздела упругих сред при скользящем контакте равны нулю, как и сдвиги. Не равные нулю удлинения, направленные по нормали и по касательной к границе раздела, обеспечивают непрерывность нормальных напряжений на границе. Упругие свойства контактирующих сред и поляризация падающей волны определяют особенности зависимостей деформаций на границе от угла падения волны.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг.

Список литературы

- [1] Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах / Под ред. В.Е. Панина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006. 520 с.
- [2] Rokhlin S.I., Wang Y.J. // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. N 2. P. 503–515.
- [3] Бреховский Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
- [4] Vinh P.C., Giang P.T.H. // Wave Motion. 2011. V. 48. P. 647–657.
- [5] Chertova N.V., Grinyaev Yu.V. // API Conf. Proc. 2016. V. 1783. P. 020025 (1–4); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4966318>
- [6] Chertova N.V., Grinyaev Yu.V. // API Conf. Proc. 2017. V. 1909. P. 020023 (1–4); <https://doi.org/10.1063/1.5013704>.