03

Неустойчивость течения в сферическом слое при вращательных колебаниях внутренней границы

© *Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова*

Институт механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 20 сентября 2017 г.

Численно исследована неустойчивость течений вязкой несжимаемой жидкости в тонком сферическом слое, вызванных вращательными колебаниями внутренней сферы относительно состояния покоя. Установлено, что при увеличении частоты вращательных колебаний происходит изменение вида неустойчивости с переходом от вторичных течений в виде вихрей Тейлора к ранее не наблюдавшимся структурам. Обнаруженная неустойчивость наблюдается в диапазоне частот от 0.61 до 2.45 Hz, или при длинах волн, отнесенных к толщине слоя, от 0.67 до 1.33.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.11.46191.17049

Течения, вызванные вращательными колебаниями, могут применяться для определения реологических свойств жидкостей [1] и интенсификации фильтрации [2]. Поскольку периодические возмущения скорости могут влиять на переход к турбулентности [3,4], необходима информация о пределе устойчивости и структуре вторичных течений [1,5]. Особый интерес представляет вопрос о возможной зависимости структур вторичных течений и вида неустойчивости от частоты колебаний. В цилиндрическом тонком слое $\beta = (r_2 - r_1)/r_1 = 0.087$, где $r_{1,2}$ —

внутренний и внешний радиусы, по измерениям полей скорости такая зависимость обнаружена [1,5]. В пределе низких частот наблюдались структуры, похожие на вихри Тейлора, в пределе высоких — похожие на вихри Гертлера, о структурах при промежуточных частотах информации нет. В сферическом слое с $\beta = 4.3$ [6] при вращательных колебаниях внутренней сферы структура вторичных течений в двумерных расчетах остается постоянной в широком диапазоне изменения частоты. При других величинах β зависимость вида неустойчивости от частоты в сферических слоях ранее не рассматривалась.

Целью настоящей работы является численное исследование зависимости вида структур вторичного течения и предела устойчивости от частоты при вращательных колебаниях внутренней сферы относительно состояния покоя. Для качественного сравнения с [1,5] выбран тонкий слой $\beta = 0.19$, в котором при постоянной скорости вращения внутренней сферы на пределе устойчивости формируются вихри Тейлора [7].

Течение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \operatorname{rot} \mathbf{U} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2}\right) - \nu \operatorname{rotrot} \mathbf{U}, \ \ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0.$$

Используется сферическая система координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями. Условия прилипания и непротекания на границах имеют вид

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t) r_k \sin\theta, \quad u_r(r = r_k) = 0, \quad u_\theta(r = r_k) = 0,$$

$k = 1, 2$ (1 — внутренняя сфера, 2 — внешняя). Здесь $\mathbf{U}, p, \rho$ — скорость, давление и плотность жидкости, u_φ, u_r, u_θ — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, Ω_k — угловая скорость вращения соответствующей сферы, ν — кинематическая вязкость жидкости в слое. Скорость вращения внутренней сферы периодически изменяется: $\Omega_1(t) = A \sin(2\pi f t)$, A, f — амплитуда и частота модуляции. Внешняя сфера неподвижна: $\Omega_2 = 0$. Использовались алгоритм и программа численного решения [8,9] с конечно-разностной схемой дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полунеявной схемой Рунге–Кутты для интегрирования по времени. Дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи границ (по r) и плоскости экватора (по θ). Отношение

Осредненные за период модуляции величины E_φ и E_ψ после потери устойчивости при $\mathrm{Re}_1 = 115.5$ и $L = 2$ в зависимости от количества узлов сетки N

$N \cdot 10^{-5}$	$E_\varphi \cdot 10^2,\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$	$E_\psi \cdot 10^4,\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$
2.26	1.2862	3.732
2.95	1.2869	3.713
3.73	1.2874	3.701
4.01	1.2875	3.697
4.61	1.2877	3.692

максимального размера ячейки к минимальному изменялось от 2 до 5 с общим количеством узлов до $4.6 \cdot 10^5$. Проведены методические расчеты для определения зависимости осредненных величин кинетической энергии течения от размеров сетки (см. таблицу). Расчеты проведены при следующих размерных параметрах: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$, $r_1 = 0.126\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0.15\,\mathrm{m}$, $f = 0.0682{-}4.363\,\mathrm{Hz}$, в этом случае толщина динамического пограничного слоя

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\pi f}} = (1.91{-}15.3) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m},$$

минимальный размер δ соответствует семи узлам расчетной сетки. Характер течения зависит от величин A, f, r_1, r_2, ν и определяется тремя параметрами подобия. В качестве одного из них используется относительная толщина слоя β. Поскольку в вязкой несжимаемой жидкости могут существовать волны, затухающие по мере удаления от создающей их колеблющейся поверхности [10], в качестве двух других параметров подобия выбраны безразмерная длина волны $L = \lambda/(r_2{-}r_1)$, где $\lambda = 2\pi\delta$, и число $\mathrm{Re} = \frac{Ar_1^2}{\nu}\frac{\delta}{r_1}$ [6]. Колебания внутренней сферы вызывают циркуляцию в меридиональной плоскости течения [6,11], подобную циркуляции при постоянной скорости вращения [7], но периодически изменяющуюся с удвоенной частотой модуляции, и эволюция такого течения во времени до потери им устойчивости уже достаточно хорошо изучена (например, в [6]). Структура течений определялась по виду азимутальной компоненты завихренности [10] в меридиональной плоскости ω_φ

$$\omega_\varphi = \frac{1}{rr'}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r\theta'}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

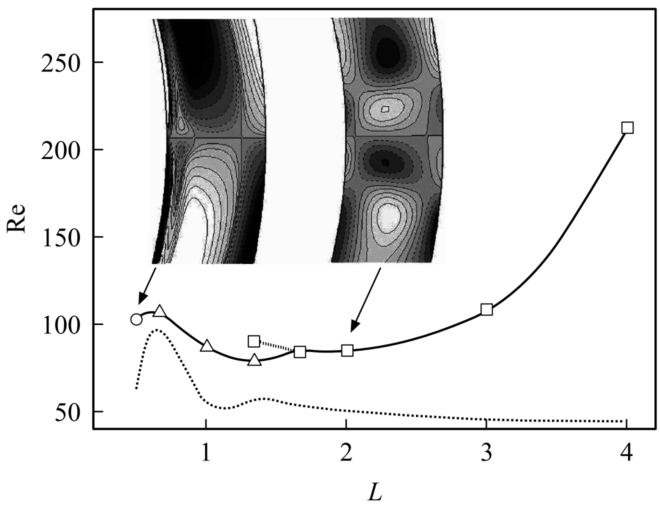

Рис. 1. Предел устойчивости (сплошная линия) и разность фаз колебаний E_φ и E_ψ (пунктирная линия). Показаны уровни ω_φ [s^{-1}] $(-10 < \omega_\varphi < 10)$: справа — вихри Тейлора при $L = 2$, $\mathrm{Re} = 84.7$, $\Delta\omega_\varphi = 2$ (квадраты); слева — вихри Гертлера при $L = 0.5$, $\mathrm{Re} = 105.9$, $\Delta\omega_\varphi = 0.5$ (кружок). Пунктирные линии для уровней ω_φ соответствуют направлению вращения против часовой стрелки. Треугольниками показана неустойчивость при промежуточных длинах волн.

До потери устойчивости с увеличением f декремент затухания азимутальной скорости в радиальном направлении увеличивается [11], что приводит к уменьшению M_{out} — амплитуды момента сил трения, передаваемого на внешнюю сферу. Вблизи предела устойчивости (и до, и после него) течение симметрично относительно оси вращения и плоскости экватора. Все параметры течения изменяются с частотами f или $2f$. Так же как и в [8], в качестве начальных условий использовались закритические значения Re. Предел устойчивости определялся путем уменьшения Re при $f = \mathrm{const}$ по виду структуры течения, величине M_{out} и отношению E_ψ/E_φ ($E_\varphi = \int u_\varphi^2$, $E_\psi = \int(u_r^2 + u_\theta^2)$ — азимутальная и меридиональная составляющие кинетической энергии течения, определяемые интегрированием по всему объему сферического слоя). Установлено, что после потери устойчивости в течении вблизи плос-

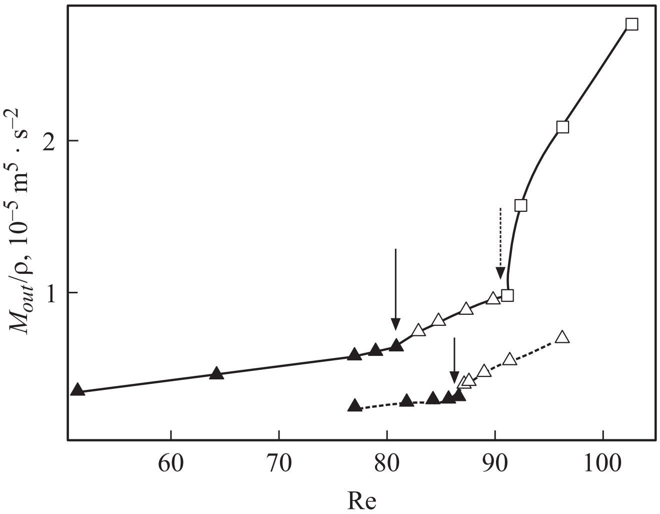

Рис. 2. Зависимость величины M_{out}, нормированной на плотность жидкости, от числа Re при $L = 1.33$ (сплошная линия) и $L = 1.0$ (пунктирная линия). Темные символы соответствуют устойчивому течению, светлые символы — неустойчивому. Первая бифуркация показана стрелками со сплошной линией, вторая — пунктирной стрелкой.

кости экватора формируются нестационарные тороидальные структуры, характерный размер которых уменьшается с уменьшением L, а меридиональная циркуляция (МЦ) оттесняется к полюсам. В случае длинных волн $(1.66 \leq L \leq 4)$ на пределе устойчивости формируются хорошо изученные к настоящему времени вихри Тейлора с направлением вращения, противоположным направлению МЦ (правая вставка на рис. 1), их формирование и распад происходит с гистерезисом. При $L \leq 2$ вихри существуют во время всего цикла колебаний. При $L = 4$ они наблюдаются практически в течение всего цикла, за исключением двух небольших интервалов при приближении $\Omega_1(t)$ к A $(0.075 < tf < 0.177$ и $0.581 < tf < 0.676$, где t — время от начала цикла колебаний, левые границы интервалов соответствуют распаду вихрей, правые — началу формирования), при $L = 3$ — в области максимума $\Omega_1(t)$ $(0.12 < tf < 0.3$ и $0.6 < tf < 0.8)$. Вихри Тейлора изменяют свою

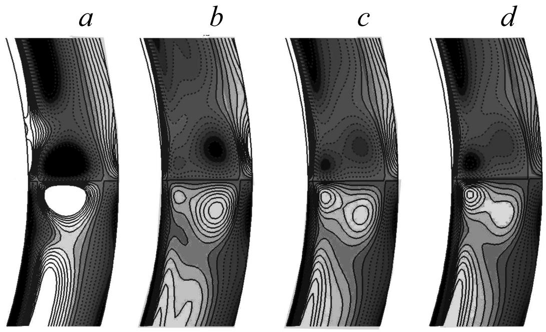

Рис. 3. Распределение уровней ω_φ [s^{-1}] в меридиональной плоскости течения при $L = 1.33$ и $\mathrm{Re} = 80.8$, $-8 < \omega_\varphi < 8$, $\Delta\omega_\varphi = 1$. $tf = 0, 0.5$ (a); 0.25, 0.75 (b); 0.28, 0.78 (c); 0.3, 0.8 (d). t — время от начала цикла колебаний.

конфигурацию в течение периода колебаний: при формировании они вытянуты в радиальном направлении, к моменту распада размеры по r и θ близки. Предел устойчивости для вихрей Тейлора (квадраты на рис. 1) имеет минимум при $1.66 \leq L \leq 2$. Вихри Тейлора наблюдаются и при $L = 1.33$, но в этом случае они формируются выше предела устойчивости: самый левый квадрат на рис. 1 ($\mathrm{Re} = 91.1$) и квадраты на рис. 2, но течение устойчиво при $\mathrm{Re} \leq 80.9$.

Таким образом, при $L = 1.33$ переходу к вихрям Тейлора предшествует другой вид неустойчивости. Такой вид неустойчивости наблюдается в интервале промежуточных длин волн $0.67 \leq L \leq 1.33$ (треугольники на рис. 1 и 2), структура вторичного течения в этом случае показана на рис. 3. Направление вращения вихрей вблизи плоскости экватора совпадает с направлением МЦ, а характерный масштаб не превышает половины толщины слоя. Рассмотрим эволюцию этих структур во времени. С увеличением $\Omega_1(t)$ от 0 (рис. 3, a) до A (рис. 3, b) одиночные вихри оттесняются от внутренней сферы и от плоскости экватора, формируются два вихря, вихрь с максимальной величиной ω_φ расположен ближе к внешней границе. Далее, при уменьшении $\Omega_1(t)$ (рис. 3, c), происходит быстрое перераспределение ω_φ: максимум смещается к внутренней сфере, затем этот максимум усиливается (рис. 3, d), и течение возвращается к первоначальному состоянию (рис. 3, a). Минимум предела устойчивости наблюдается вблизи $L = 1.33$. При $L < 1.33$ увеличение Re сопровождается не переходом к вихрям Тейлора, а переходом к течению без осевой и экваториальной симметрии, но с сохранением направления вращения вихрей во вторичном течении.

В случае коротких волн ($L = 0.5$) на пределе устойчивости после прохождения экстремумов ($0.28 < tf < 0.31$ и $0.78 < tf < 0.81$) вблизи внутренней сферы и плоскости экватора формируются вихри с характерным масштабом много меньше толщины слоя (левая вставка на рис. 1). Характерный размер, направление вращения (противоположное направлению МЦ) и резкое изменение величины ω_φ вблизи внутренней сферы позволяют предположить, что в этом случае наблюдаются вихри Гертлера, вызванные неустойчивостью динамического пограничного слоя. Вероятно, при $L = 0.67$ неустойчивость в виде вихрей Гертлера предшествует неустойчивости при промежуточных длинах волн (рис. 3), так же как неустойчивость при промежуточных длинах волн предшествует вихрям Тейлора при $L = 1.33$ (рис. 1).

Таким образом, при вращательных колебаниях внутренней сферы в тонком слое $\beta = 0.19$ наблюдается три вида неустойчивости, и каждому виду соответствует свой диапазон изменения L. Границы диапазонов можно определить по положению максимумов как предела устойчивости, так и разности фаз между E_φ и E_ψ в зависимости от L (рис. 1). Тороидальные структуры, формирующиеся на пределе устойчивости вблизи плоскости экватора, в случае коротких ($L \leq 0.5$) и длинных ($L \geq 1.67$) волн качественно соответствуют результатам экспериментов [1,5], и для них направление вращения противоположно направлению МЦ. При неустойчивости, обнаруженной в настоящей работе при промежуточных длинах волн ($0.67 \leq L \leq 1.33$, $2.45 \geq f \geq 0.61\,\mathrm{Hz}$), направления вращения вихрей и МЦ совпадают. Результаты расчетов показывают, что для дальнейшего экспериментального подтверждения обнаруженной неустойчивости необходимы измерения не только полей скорости (как это сделано, например, в [1,5]), но и величин моментов сил трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-05-00004 и 18-08-00074).

Список литературы

[1] *Fardin M., Perge C., Casanellas L., Hollis T., Taberlet N., Ortin J., Lerouge S., Manneville S.* // Rheol Acta. 2014. V. 53. N 12. P. 885–898.
[2] *Jaffrin M.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 2012. V. 44. N 1. P. 77–96.
[3] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 1. С. 12–19.
[4] *Бунтин Д.А., Маслов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. В. 13. С. 65–72.
[5] *Fardin M., Perge C., Taberlet N., Manneville S.* // Phys. Rev. E. 2014. V. 89. N 1. P. 011001.
[6] *Hollerbach R., Wiener R., Sullivan I., Donnelly R., Barenghi C.* // Phys. Fluids. 2002. V. 14. N 12. P. 4192–4205.
[7] *Беляев Ю.Н., Яворская И.М.* // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1980. Т. 15. С. 3–80.
[8] *Nikitin N.* // J. Comp. Phys. 2006. V. 217. N 2. P. 759–781.
[9] *Кривоносова О.Э.* Переход к стохастичности в широком сферическом слое при встречном вращении границ: прямой расчет и эксперимент. Автореф. канд. дис. М.: МГУ, 2007. 17 с.
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.
[11] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 104. В. 8. С. 552–559.