01;11

Сингулярное интегральное уравнение для плотности тока на поверхности полоскового вибратора, расположенного в свободном пространстве

© *Д.С. Клюев, С.А. Коршунов, Д.В. Мишин, С.В. Ситникова, Ю.В. Соколова*

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия
E-mail: klyuevd@yandex.ru

Поступило в Редакцию 22 февраля 2018 г.

Задача о распределении плотности тока на поверхности полоскового вибратора, расположенного в свободном пространстве, сведена к сингулярному интегральному уравнению с особенностью Коши. Представлены графики распределения тока на поверхности такого вибратора при различных значениях его длины.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.12.46287.17264

На практике широко применяются вибраторные антенны. Их используют в качестве отдельных антенн и в составе многоэлементных антенн и антенных решеток. В настоящее время опубликовано огромное количество работ, посвященных анализу и синтезу таких антенн. Несмотря на то что такие антенны известны уже более ста лет, интерес исследователей к ним не ослабевает [1–5]. Однако в большинстве работ освещены вопросы, связанные с цилиндрическими вибраторами. Здесь следует отметить, что кроме цилиндрических вибраторов нашли широкое применение и полосковые, изготавливаемые из металлических полос. Характеристики направленности вибраторов обоих типов практически идентичны, но значения токов на их поверхностях, в частности в точке питания, различаются существенно. Этим фактом обусловлено различие их входных сопротивлений.

В настоящей работе описан метод расчета распределения тока на поверхности полоскового вибратора (ПВ), расположенного в свободном пространстве.

В качестве ПВ (рис. 1) рассмотрим проводящую полоску длиной $2l$ и шириной $2a$, возбуждаемую сторонней ЭДС, приложенной в области разрыва длиной $2b$. Поскольку полоска узкая ($2a << 2l$, λ, где λ — длина волны) и возбуждается только продольной составляющей напряженности электрического поля E_x^{ext}, поперечная составляющая поверхностной плотности тока η_y будет пренебрежимо мала по сравнению с продольной η_x. На поверхности ПВ должно выполняться граничное условие

$$E_x(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in [-l, l_0 - b] \cup [l_0 + b, l], y \in [-a, a], \\ -E_x^{ext}, & x \in [l_0 - b, l_0 + b], y \in [-a, a], \end{cases} \tag{1}$$

где E_x^{ext} — напряженность стороннего электрического поля в зазоре ПВ, l_0 — координата центра зазора (точки питания).

Учитывая граничное условие (1), для поверхности ПВ можно записать следующее выражение [6]

$$-i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x^{ext} = k^2 A_x + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где

$$A_x(x, y; x', y') = \int_{-a}^{a}\int_{-l}^{l} \eta_x(x', y') G(x, y, z = 0; x', y', x' = 0) dx' dy', \tag{3}$$

A_x — x-составляющая векторного электродинамического потенциала, создаваемая током с поверхностной плотностью η_x; ω — циклическая частота; ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей ПВ; ε_0 — электрическая постоянная; k — волновое число; G — функция Грина свободного пространства [1],

$$G(x, y, z; x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\big(-i\chi_1(x - x') - i\chi_2(y - y')\big)}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 - k^2}} d\chi_1 d\chi_2. \tag{4}$$

Поперечное распределение продольной составляющей поверхностной плотности тока η_x для узких полосок можно считать квазистатическим [7]

$$\eta_x(x, y) = \frac{f(x)}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \tag{5}$$

где $f(x)$ — функция, описывающая продольное распределение тока.

Подставим (4), (5) в (3) и положим $y = 0$, так как выражение (3) справедливо для любой точки на поверхности ПВ:

$$A_x(x, y = 0; x', y') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-a}^{a} \frac{\exp(i\chi_2 y')}{\sqrt{a^2 - y'^2}} \, dy' \right]$$

$$\times \int_{-l}^{l} f(x') \frac{\exp\bigl(-i\chi_1(x - x')\bigr)}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 - k^2}} \, dx' d\chi_1 d\chi_2, \qquad (6)$$

а затем, подставив полученное выражение (6) в (2), взяв аналитически интеграл по y' [8] и выполнив ряд математических преобразований, получим

$$i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x^{ext} = \frac{1}{8\pi} \int_{-l}^{l} f(x') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k^2 - \chi_1^2)$$

$$\times \frac{\exp\bigl(-i\chi_1(x - x')\bigr)}{\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 - k^2}} J_0(a\chi_2) d\chi_1 d\chi_2 dx'. \qquad (7)$$

Перейдем к производной $f(x')$. Для этого в (7) возьмем интеграл по x' по частям, учитывая при этом, что плотность тока на концах полоски равна нулю и то, что интеграл по χ_2 можно взять аналитически [9]:

$$-i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x^{ext} = \frac{1}{4\pi i} \int_{-l}^{l} f'(x') \int_{-\infty}^{\infty} f'(x') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1^2 - k^2}{\chi_1}$$

$$\times I_0\left(\frac{a\sqrt{\chi_1^2 - k^2}}{2}\right) K_0\left(\frac{a\sqrt{\chi_1^2 - k^2}}{2}\right) \exp\bigl(-i\chi_1(x - x')\bigr) d\chi_1 dx', \qquad (8)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя, K_0 — функция Макдональда.

В дальнейшем для удобства будем использовать безразмерные переменные $t = x/l$, $t' = x'/l$, $h = \chi_1 a$ и перепишем уравнение (8) в

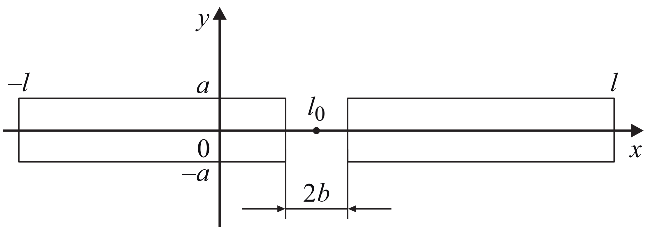

Рис. 1. Геометрия полоскового вибратора.

следующем виде:

$$-i\omega\varepsilon\varepsilon_0 E_x^{ext} = \int_{-1}^{1} f'(t')G(t,t')dt', \tag{9}$$

где

$$G(t,t') = \frac{1}{4\pi a^2 i}\int_{-\infty}^{\infty} g(h)e^{-ih\frac{l}{a}(t-t')}dh,$$

$$g(h) = \frac{h^2-(ka)^2}{h} I_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right)K_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right). \tag{10}$$

Интеграл по h в (10) является расходящимся, так как асимптотическое представление $g(h)$ при $h\to\infty$ имеет вид

$$g(h)\xrightarrow[|h|\to\infty]{} g_\infty(h) = \mathrm{sgn}(h). \tag{11}$$

Для аналитического выделения особенности в (10) в подынтегральном выражении прибавим и вычтем слагаемые с асимптотическим сомножителем $g_\infty(h)$:

$$G(t,t') = \frac{1}{4\pi a^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{h^2-(ka)^2}{h} I_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right)K_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right)\right.$$
$$\left. -\,\mathrm{sng}(h)\right]\exp\left(-ih\frac{l}{a}(t-t')\right)dh + \frac{1}{4\pi a^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sng}(h)e^{-ih\frac{l}{a}(t-t')}dh. \tag{12}$$

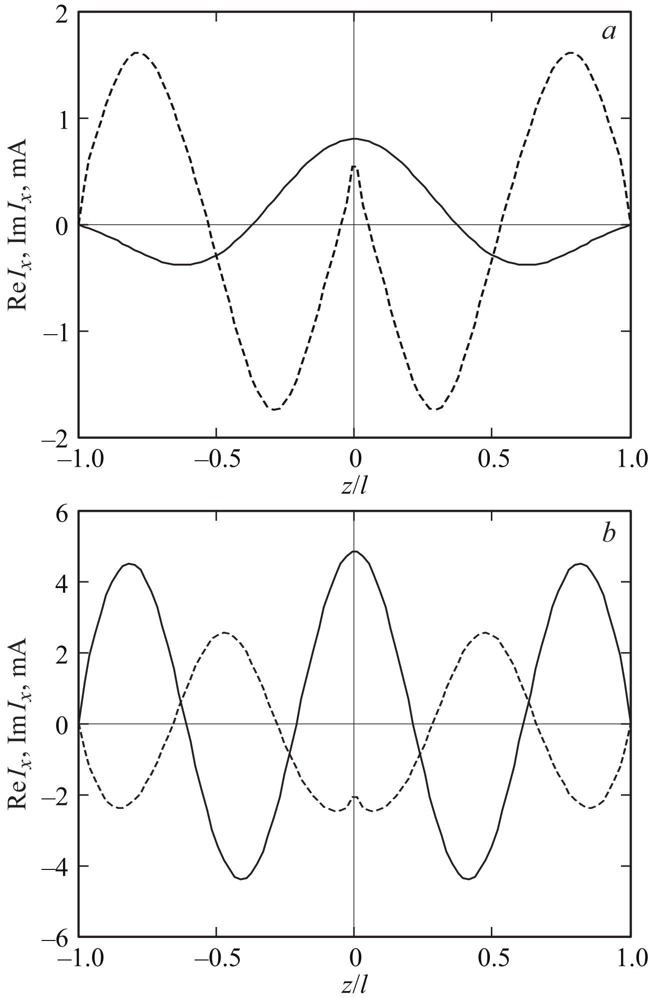

Рис. 2. Распределение тока на поверхности симметричного полоскового вибратора длиной $2l = 2\lambda$ (a) и 2.5λ (b). Сплошная линия — действительная часть, штриховая — мнимая. Ширина вибратора $2a = 0.02\lambda$, ширина зазора $2b = 0.02\lambda$.

Так как [10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(h) e^{-ih\frac{l}{a}(t-t')} dh = \frac{2i(a/l)}{t'-t},$$

можно (12) переписать в виде

$$G(t,t') = \frac{1}{4\pi a^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h^2-(ka)^2}{h} I_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right) - \operatorname{sgn}(h) \right] \exp\left(-ih\frac{l}{a}(t-t')\right) dh + \frac{1}{2\pi a^2} \frac{(a/l)}{t'-t}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (9) и выполняя ряд математических преобразований, получаем следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ) с особенностью Коши.

$$-i2al\omega\varepsilon_a E_x^{ext} = \int_{-1}^{1} f'(t')R(t,t')dt' + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f'(t')}{t'-t}\,dt', \quad (14)$$

где

$$R(t,t') = \frac{1}{2\pi i}\frac{l}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{h^2-(ka)^2}{h} I_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{h^2-(ka)^2}}{2}\right) - \operatorname{sgn}(h) \right] \exp\left(-ih\frac{l}{a}(t-t')\right) dh.$$

Методы решения уравнений, аналогичных (14), подробно описаны, например, в [11].

В качестве примера были рассчитаны распределения тока на поверхности ПВ длиной $2l = 2\lambda$ (рис. $2, a$) и $2l = 2.5\lambda$ (рис. $2, b$). Расчеты проведены при следующих геометрических размерах антенны: ширина ПВ $2a = 0.02\lambda$, ширина зазора $2b = 0.02\lambda$. Напряжение в зазоре $V = 1\,\mathrm{V}$. Диэлектрическая проницаемость окружающего пространства $\varepsilon = 1$. Ток определялся по формуле

$$I_x(x) = \int_{-a}^{a} \eta_x(x,y)dy = f(x)\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\,dx = \pi a f(x).$$

Для сравнения были рассчитаны входные сопротивления полоскового и цилиндрического вибраторов длиной $2l = 2\lambda$ и шириной (диаметром) $2a = 0.02\lambda$: у полоскового — $609.649 - i621.464\,\Omega$, у цилиндрического — $261.408 - i406.186\,\Omega$.

Таким образом, предложенный в работе метод позволил свести внутреннюю задачу анализа ПВ, а именно задачу определения функции распределения плотности тока на его поверхности, к одномерному СИУ с особенностью Коши. Численное решение СИУ относится к классу корректных математических задач по Адамару [12]. Алгоритмы решения СИУ обладают высокой устойчивостью и быстрой сходимостью. Теперь, решив внутреннюю задачу анализа, можно без особых проблем решить внешнюю задачу и найти все характеристики такой антенны. Предложенный метод можно обобщить на многоэлементные вибраторные антенны и антенные решетки.

Список литературы

[1] *Горобец Н.Н., Елисеева Н.П.* // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 8. С. 749–758.
[2] *Табаков Д.П., Морозов С.В., Неганов В.А.* // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20. № 2. С. 4–13.
[3] *Эминов С.И., Сочилин А.В.* // Вестн. Новгород. гос. ун-та им. Ярослава Мудрого. 2015. № 8 (91). С. 26–34.
[4] *Iigusa K., Sawada H., Kojima F.* // IEEE Transact. Antennas Propagation. 2018. V. 66. Iss. 2. P. 984–989.
[5] *Bakhtafrouz A., Borji A.* // IET Microwaves, Antennas & Propagation. 2015. V. 9. Iss. 14. P. 1567–1573.
[6] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.–Л.: Энергия, 1967. 376 с.
[7] *Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П.* Полосково-щелевые структуры сверх- и крайневысоких частот. М.: Наука, Физматлит, 1996. 304 с.
[8] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
[9] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
[10] *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 296 с.
[11] *Дементьев А.Н., Клюев Д.С., Неганов В.А., Соколова Ю.В.* Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.
[12] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.