01

Асимптотика ядер интеграла столкновений линейного уравнения Больцмана при больших значениях индекса для потенциала твердых шаров

© *Л.А. Бакалейников, Э.А. Тропп, Е.Ю. Флегонтова* ¶

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: fl.xiees@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 11 мая 2018 г.

Найдена асимптотика ядер интегральных операторов, являющихся коэффициентами разложения интеграла столкновений линейного уравнения Больцмана по полиномам Лежандра, при больших значениях индекса для потенциала твердых шаров. В случае не равных по модулю скоростей взаимодействующих частиц ядра убывают экспоненциально, причем в основании экспоненты стоит отношение меньшей из скоростей к большей. В случае равных по модулю скоростей ядра убывают степенным образом.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.16.46474.17379

Одним из методов решения линейного уравнения Больцмана является метод разложения по сферическим гармоникам. Использование такого метода сводит кинетическое уравнение к системе уравнений для коэффициентов разложения функции распределения (ФР), в которых интеграл столкновений заменяется значительно более простыми интегральными операторами, ядра которых зависят только от модулей скоростей. В существенно анизотропных задачах оказываются необходимыми учет большого числа коэффициентов разложения ФР и, следовательно, расчет ядер с большими значениями индексов. Такая ситуация возникает, например, в задаче о расчете ФР ионов. Эта задача весьма актуальна для анализа химических реакций в плазме, включающих ионы, определения подвижности ионов, нагрева нейтральной компоненты плазмы и т. д. Подходы к ее решению активно разрабатываются исследователями (см., например, обзор методов решения уравнения Больцмана для заряженных частиц [1], описание нового метода расчета

ФР электронов и ионов в слабо ионизованной плазме [2] и ссылки в [2], сравнение результатов расчета ФР ионов с экспериментальными данными [3]).

Настоящая работа посвящена получению асимптотики ядер линейного интеграла столкновений для потенциала твердых шаров при больших значениях индекса. Отметим, что вследствие связи между линейными и нелинейными ядрами для степенных потенциалов, найденной в нашей работе [4], асимптотика линейных ядер может быть использована и для отыскания асимптотики нелинейных ядер.

Рассмотрим релаксацию малой примеси ионов с функцией распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ на фоне основного газа с концентрацией n_0, имеющего максвелловское распределение по скоростям

$$M_T(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Кинетическое уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = -k(v) f(\mathbf{v}) + \int \tilde{L}^{+}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_1) d\mathbf{v}_1,$$

$$k(v) = n_0 \int |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \Sigma M_T(v_1) d\mathbf{v}_1,$$

где $\Sigma = 4\pi\sigma$ — полное сечение рассеяния, $\sigma = r^2$ — дифференциальное сечение (в модели твердых шаров), r — радиус молекулы. Выберем в качестве масштабов концентрации частиц и скорости среднюю концентрацию n_0 и тепловую скорость $v_T = \sqrt{2kT/m}$ соответственно, а в качестве масштаба времени — обратную частоту столкновений $\tau_T = 1/(n_0 \Sigma v_T)$. Введем безразмерные скорости $\mathbf{c} = \mathbf{v}/v_T$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1/v_T$, безразмерную ФР $f(\mathbf{v})(v_T)^3/n_0$ и безразмерное ядро интеграла столкновений $L^{+}(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) = (v_T)^3 \tau_T \tilde{L}^{+}(\mathbf{c} v_T, \mathbf{c}_1 v_T)$. Применяя подход, использованный в [5] для расчета ядра интеграла столкновений линеаризованного уравнения Больцмана, легко получить выражение для безразмерного линейного ядра в виде

$$L^{+}(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) = \frac{\exp(-c^2)}{2\pi^{3/2}} |\mathbf{c} - \mathbf{c}_1| \int\limits_0^{\pi} \frac{\exp\left(-|\mathbf{c} - \mathbf{c}_1|^2 \operatorname{ctg}^2(\chi/2)\right)}{\sin^4(\chi/2)}$$
$$\times I_0\left(2|\mathbf{c} \times \mathbf{c}_1| \operatorname{ctg}(\chi/2)\right) \sin\chi d\chi. \tag{1}$$

Как видно из (1), ядро $L^+(\mathbf{c}, \mathbf{c_1})$ ортогонально-инвариантно (зависит только от модулей скоростей и угла между ними), что позволяет представить его в виде разложения по полиномам Лежандра

$$L^+(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} L_l^+(c, c_1) P_l(\cos\theta), \quad \theta = \arccos\big((\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}_1)/(cc_1)\big),$$

$$L_l^+(c, c_1) = \int L^+(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) P_l(\cos\theta) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^{1} L^+(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} dx P_l(x) \sqrt{c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x}$$

$$\times \int_0^{\pi} \frac{\exp\big(-(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)\operatorname{ctg}^2(\chi/2)\big)}{\sin^4(\chi/2)}$$

$$\times I_0\big(2cc_1 \operatorname{ctg}(\chi/2)\sqrt{1-x^2}\big) \sin\chi d\chi. \tag{2}$$

Будем искать асимптотику ядер $L_l^+(c, c_1)$. После замены переменной $q = \big(\sin(\chi/2)\big)^{-2} - 1$ внутренний интеграл в (2) вычисляется аналитически [6]

$$2\int_0^{\infty} \exp\big(-(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)q\big) I_0\big(2cc_1\sqrt{1-x^2}\sqrt{q}\big) dq$$

$$= 2\exp\left(\frac{c^2 c_1^2(1-x^2)}{(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)}\right) \frac{1}{(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)},$$

и выражение для ядра принимает вид

$$L_l^+(c, c_1) = \frac{2e^{-c^2}}{\sqrt{\pi}} U_l(c, c_1),$$

$$U_l(c, c_1) = \int_{-1}^{1} P_l(x)(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)^{-1/2} \exp\left(\frac{c^2 c_1^2(1-x^2)}{(c^2 + c_1^2 - 2cc_1 x)}\right) dx.$$

Рассмотрим сначала случай $c \neq c_1$. Введем обозначение $a = 2cc_1/(c^2 + c_1^2) < 1$. Для получения асимптотики $U_l(c, c_1)$ применим прием, описанный в [7]. Представим множитель при полиноме Лежандра в виде интеграла Коши

$$F(z) = (c^2 + c_1^2)^{-1/2}(1 - az)^{-1/2}\exp\left(\frac{cc_1a(1-z^2)}{2(1-az)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(t)dt}{t-z}. \tag{3}$$

Интеграл здесь берется по окружности радиуса ρ, $1 < \rho < 1/a$. Используя формулу Родрига для полиномов Лежандра и интегрируя (3) l раз по частям, получим

$$U_l = \frac{1}{2\pi i}\oint F(t)\left(\frac{1}{2^l}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1-z^2)^l}{(t-z)^{l+1}}\,dz\right)dt = \frac{1}{2\pi i}\oint F(t)2Q_l(t)dt. \tag{4}$$

Здесь $Q_l(t)$ — функция Лежандра второго рода. Подставляя асимптотику $Q_l(t)$ при больших индексах в (4), найдем

$$U_l = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)}\oint F(t)\frac{(t^2-1)^{-1/4}}{(\sqrt{t^2-1}+t)^{l+1/2}}\big(1 + O(l^{-1})\big)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)}K_l\big(1 + O(l^{-1})\big).$$

Для оценки интеграла $K_l = \frac{1}{2\pi i}\oint F(t)\frac{(t^2-1)^{-1/4}}{(\sqrt{t^2-1}+t)^{l+1/2}}\,dt$ заметим прежде всего, что

$$(c^2 + c_1^2)^{1/2}F(t) = (1-at)^{-1/2}\exp\left(\frac{acc_1(1-t^2)}{2(1-at)}\right)$$

$$= (1-at)^{-1/2}\exp\left(\frac{cc_1}{2(1-at)}\,(a - 1/a)\right)\exp\left(\frac{cc_1}{2a}(1+at)\right)$$

и, следовательно, точка $t = 1/a$ является трансцендентной точкой ветвления. Согласно [7], для получения асимптотики интеграла в этом случае множитель $\exp\big(cc_1(a-1/a)/\big(2(1-at)\big)\big)$ следует присоединить к $(\sqrt{t^2-1}+t)^{-(l+1/2)}$ и воспользоваться методом перевала. Деформируем контур по окружности $|t| = 1/a + \eta$, $\eta > 0$ и по петле вокруг разреза вдоль $[1/a, \infty)$. Выполним замену переменной $u = -\ln at$, выделим особенность в $\exp\big(cc_1(a - 1/a)/\big(2(1 - at)\big)\big)$ и объединим ее с $(\sqrt{t^2 - 1} + t)^{-(l+1/2)}$:

$$K_l = \frac{(c^2 + c_1^2)^{-1/2}}{a} \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - e^{-u})^{-1/2} \exp\left(-G\left(\frac{1}{1 - e^{-u}} - \frac{1}{u}\right)\right)$$

$$\times \exp\left(-(l + 1/2) \ln\left(\frac{e^{-u}}{a} + \sqrt{\frac{e^{-2u}}{a^2} - 1}\right) - \frac{G}{u}\right)$$

$$\times \exp\left(\frac{cc_1}{2a}(1 + e^{-u})\right)\left(\frac{e^{-2u}}{a^2} - 1\right)^{-1/4} e^{-u} du. \tag{5}$$

Здесь $G = -cc_1(a - 1/a)/2 > 0$, интегрирование проводится по нижнему берегу разреза $[-\infty, 0)$ от $-\infty$ до 0 и по верхнему от 0 до $-\infty$. Представим показатель экспоненты, содержащей большой параметр, в виде

$$-(l + 1/2) \ln\left(\frac{e^{-u}}{a} + \sqrt{\frac{e^{-2u}}{a^2} - 1}\right) - \frac{G}{u}$$

$$= -(l + 1/2) \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) + \frac{(l + 1/2)}{\sqrt{1 - a^2}} f(u) - \frac{G}{f(u)} + \frac{G}{f(u)} - \frac{G}{u},$$

где

$$f(u) = -\ln\left(\left(\frac{e^{-u}}{a} + \sqrt{\frac{e^{-2u}}{a^2} - 1}\right) \Big/ \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)\right) \sqrt{1 - a^2}$$

$$= -\ln\left(\frac{e^{-u} + \sqrt{e^{-2u} - a^2}}{1 + \sqrt{1 - a^2}}\right) \sqrt{1 - a^2}.$$

При $u \to 0$, т. е. в окрестности особой точки, $f(u) = u + O(u^2)$. Сделаем в интеграле (5) замену переменной $y = f(u)$ и разложим все входящие в интеграл функции в окрестности нуля. Интеграл (5) приводится к виду

$$K_l = \frac{(c^2+c_1^2)^{-1/2}}{a} \exp\left(-\frac{G}{2} + \frac{cc_1}{a} - \frac{1}{2} G f''(0)\right)$$

$$\times \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)^{-1/4} \left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{-(l+1/2)}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \oint y^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} w_k y^k \exp\left(\frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}} y - \frac{G}{y}\right) dy, \qquad w_0 = 1. \quad (6)$$

Используя подстановку $\eta = y(l+1/2)^{1/2}/\big((1-a^2)^{1/4}G^{1/2}\big)$ и интегральное представление для функций Бесселя [8], найдем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint y^{-1/2+k} \exp\left(\frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}} y - \frac{G}{y}\right) dy = \left(\frac{(l+1/2)}{G\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1/4-k/2}$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \oint \exp\left(\sqrt{G \frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}}} \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)\right) \eta^{-1/2+k} d\eta$$

$$= \left(\frac{(l+1/2)}{G\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1/4-k/2} J_{-1/2-k}\left(2\sqrt{G\, \frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}}}\right).$$

Таким образом, разложение (6) является асимптотическим и K_l представляется в виде

$$K_l = \frac{(c^2+c_1^2)^{-1/2}}{\pi^{1/2} a} \exp\left(-\frac{G}{2}\big(1+f''(0)\big) + \frac{cc_1}{a}\right) \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)^{-1/4}$$

$$\times \left(\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{-(l+1/2)} \left(\frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1/2} \left(\cos\left(2\sqrt{G \frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}}}\right)\right.$$

$$\left. - w_1 \left(\frac{(l+1/2)}{G\sqrt{1-a^2}}\right)^{-1/2} \sin\left(2\sqrt{G \frac{(l+1/2)}{\sqrt{1-a^2}}}\right) + O(l^{-1})\right).$$

Здесь учтено, что $J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos z$, $J_{-3/2}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \times$ $\times (\sin z + \cos z/z)$. Учитывая, что $f''(0) = a^2/(1-a^2)$, окончательно получим

$$L_l^+(c,c_1)=\frac{2e^{-c^2}\Gamma(l+1)}{\pi^{1/2}\Gamma(l+3/2)}\exp\left(\frac{3(c^2+c_1^2)}{8}\right)(cc_1)^{-1/2}$$

$$\times\left(\frac{\min(c,c_1)}{\max(c,c_1)}\right)^{(l+1/2)}(l+1/2)^{-1/2}$$

$$\times\left(\cos\left(\sqrt{(l+1/2)|c^2-c_1^2|}\right)\right.$$

$$\left.-\,w_1\frac{(c^2-c_1^2)^2}{2(c^2+c_1^2)}\,\frac{\sin\left(\sqrt{(l+1/2)|c^2-c_1^2|}\right)}{\sqrt{(l+1/2)|c^2-c_1^2|}}+O(l^{-1})\right),$$

$$w_1=-\frac{c^2+c_1^2}{4}\left(\frac{13}{12}+\frac{c^2+c_1^2+c^2c_1^2}{(c^2-c_1^2)^2}\right).$$

При совпадающих аргументах $U_l(c,c)$ приобретает вид

$$U_l(c,c)=\frac{1}{\sqrt{2c}}\int\limits_{-1}^{1}P_l(x)(1-x)^{-1/2}\exp\left(\frac{c^2(1+x)}{2}\right)dx.$$

Раскладывая $\exp\big(c^2(1+x)\big)/2$ в ряд Тейлора в окрестности $x=1$ и пользуясь соотношением

$$\int\limits_{-1}^{1}P_l(x)(1-x)^{\alpha}dx=2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(l-\alpha)\big[\Gamma(-\alpha)\Gamma(l+\alpha+2\big]^{-1}$$

найдем

$$L_l^+(c,c)=\frac{2}{c\sqrt{\pi}}l^{-1}\big(1+O(l^{-1})\big).$$

Список литературы

[1] *White R., Robson R., Dujko S., Nicoletopoulos P., Li B.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. V. 42. N 19. P. 194001.
[2] *Konovalov D.A., Cocks D.G., White R.D.* // Eur. Phys. J. D. 2017. V. 71. N 10. P. 258.
[3] *Mustafaev A., Grabovskiy A., Murillo O., Soukhomlinov V.* // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 958. P. 012005.
[4] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. В. 6. С. 1–8.
[5] *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
[6] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1097 с.
[7] *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981. Т. 3. 372 с.
[8] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.–Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.