Журнал технической физики, 2018, том 88, вып. 10

01

Эллипсоидальное включение с оболочкой в анизотропной среде с однородным приложенным электрическим полем

© И.В. Лавров, В.Б. Яковлев

Национальный исследовательский университет Московский институт электронной техники,
124498 Москва, Зеленоград, Россия
e-mail: iglavr@mail.ru

(Поступило в Редакцию 16 ноября 2017 г.)

Получено решение электростатической задачи для диэлектрического включения, состоящего из анизотропных ядра и оболочки, помещенного в однородную анизотропную диэлектрическую среду (матрицу) с приложенным однородным электрическим полем. Внешние границы ядра и оболочки считаются эллипсоидами, являющимися софокусными после линейного неортогонального преобразования, устраняющего анизотропию диэлектрических свойств оболочки. Найдены аналитические выражения для потенциала и напряженности электрического поля в матрице, оболочке и ядре, а также выражение для тензора поляризуемости включения. Рассмотрен специальный случай включения с изотропной оболочкой. Полученные выражения применены для случая анизотропного шара с изотропной оболочкой в анизотропной среде. Также показано, что в предельном случае однородного эллипсоидального включения в анизотропной среде полученный результат согласуется с известными решениями.

DOI: 10.21883/JTF.2018.10.46490.2565

Введение

Необходимость в вычислении распределения электрического поля внутри и снаружи включения, погруженного в анизотропную среду, возникает при прогнозировании макроскопических свойств неоднородных текстурированных материалов, т. е. материалов, обладающих анизотропией эффективных характеристик. В частности, при применении метода самосогласованного решения [1,2], называемого также методом эффективной среды, идея которого принадлежит Бруггеману [3], реальная неоднородная среда, окружающая включение, заменяется на однородную с эффективными материальными свойствами.

Вариант обобщения метода эффективной среды на материалы с неоднородными включениями предложен в [4]; для его применения в анизотропном случае требуется знание распределения электрического поля внутри так называемого „эффективного рассеивателя", погруженного в эффективную анизотропную среду. В работе [5] предложено обобщенное приближение эффективного поля для вычисления макроскопических характеристик неоднородных сред, содержащих неоднородные включения, состоящие из однородного ядра и однородной оболочки, внешние границы которых считаются эллипсоидальными. Для его применения требуется знание связи между средними значениями напряженности поля в ядре и оболочке изолированного включения, погруженного в однородную, возможно, анизотропную среду, и эффективным полем в данной среде.

Настоящая работа является продолжением [6], и ее результаты естественным образом обобщают результаты работы [6] на случай эллипсоидального включения с оболочкой, помещенного в бесконечную анизотропную среду (матрицу) с однородным приложенным электрическим полем. Внешние границы ядра и оболочки включения считаются эллипсоидальными, становящимися софокусными после линейного преобразования, устраняющего анизотропию материальных свойств оболочки. На первый взгляд, это условие является искусственным и не имеющим отношение к реальным ситуациям, однако в реальных неоднородных средах даже эллипсоидальная форма включений в точности практически никогда не встречается, а является модельным приближением для частиц неизометричной формы. По мнению авторов, введение дополнительной связи между формами ядра и оболочки и тензором материального свойства оболочки оправдано, поскольку позволяет получить компактное аналитическое выражение для решения задачи.

В настоящей работе исходная задача для включения в анизотропной среде решается путем сведения ее посредством линейного неортогонального преобразования к задаче для включения с оболочкой в вакууме, решение которой известно [6]. Затем с помощью обратного преобразования из решения задачи в вакууме получается решение исходной задачи в анизотропной среде. Получено также выражение для тензора поляризуемости включения. Рассмотрен частный случай включения с изотропной оболочкой, а также примеры применения полученных результатов для сферического включения с изотропной оболочкой в анизотропной, а затем в изотропной среде. Также рассмотрен предельный случай эллипсоидального однородного включения в анизотропной среде; показано, что результаты в этом случае совпадают с известными [7,8].

Сделаем замечание, касающееся используемых в работе терминов. В математике термин „эллипсоид" обозначает замкнутую поверхность 2-го порядка, а специального термина, обозначающего тело, ограниченное этой поверхностью, нет. Между тем в физической литературе как в классических трудах [9–11], так и в ряде относительно новых работ [8,12–14] термин „эллипсоид“ используется для обозначения объемного тела, ограниченного поверхностью 2-го порядка — эллипсоидом. В настоящей работе в согласии с терминологией, принятой в физической литературе, термин „эллипсоид“ будет использоваться для обозначения тела, ограниченного замкнутой поверхностью 2-го порядка, а для обозначения самой этой поверхности будет использоваться термин „поверхность-эллипсоид“.

Постановка задачи и сведение ее к задаче для включения с оболочкой в вакууме

Рассмотрим диэлектрическое включение, состоящее из ядра, занимающего область V_2, и оболочки, занимающей область V_1, помещенное в бесконечную диэлектрическую среду (матрицу) с внешним приложенным однородным электрическим полем напряженностью $\mathbf{E}_0$. Область, занимаемую всем неоднородным включением, обозначим как V. Материалы, составляющие матрицу, оболочку и ядро, предполагаются однородными и анизотропными с тензорами диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ соответственно. Граница S_2 ядра и внешняя граница S_1 оболочки считаются поверхностями-эллипсоидами, становящимися софокусными после линейного неортогонального преобразования, устраняющего анизотропию диэлектрических свойств оболочки [6]. Ставится задача найти распределение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r})$ электростатического поля в ядре и оболочке данного включения, а также в матрице; область, занимаемую матрицей, обозначим как V_m. Предполагается, что в данной системе свободные заряды отсутствуют.

Математическая формулировка соответствующей краевой задачи для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_m\boldsymbol{\nabla}\varphi_m(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r}\in V_m, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\nabla}\varphi_1(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r}\in V_1, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\nabla}\varphi_2(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r}\in V_2, \tag{3}$$

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}),\ (\boldsymbol{\varepsilon}_m\mathbf{E}_m)_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}_1)_n,\ \mathbf{r}\in S_1, \tag{4}$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \varphi_2(\mathbf{r}),\ (\boldsymbol{\varepsilon}_1\mathbf{E}_1)_n = (\boldsymbol{\varepsilon}_2\mathbf{E}_2)_n,\ \mathbf{r}\in S_2, \tag{5}$$

$$\varphi_m\big|_{\infty} = -(\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \tag{6}$$

где $\varphi_m(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_m$, $\varphi_1(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_1$ и $\varphi_2(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}_2$ — скалярные потенциалы и напряженности электрического поля в матрице, оболочке и ядре соответственно; $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к соответствующей поверхности; $\boldsymbol{\nabla}$ — векторный дифференциальный оператор Гамильтона, имеющий в исходных декартовых координатах x^1, x^2, x^3 вид $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x^1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x^2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x^3}$. Условия $(1)-(3)$ — это уравнения в частных производных, которым должен удовлетворять потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в матрице, оболочке и ядре соответственно. Условия (4) и (5) — это непрерывность $\varphi(\mathbf{r})$ и нормальной составляющей вектора электрической индукции $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ на границе оболочки и матрицы и на границе ядра и оболочки соответственно. Условие (6) означает, что на бесконечном удалении от включения потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ равен потенциалу приложенного поля $\varphi_0 = -(\mathbf{E}_0, \mathbf{r})$. Подразумевается также ограниченность потенциала внутри частицы, вытекающая из физического смысла задачи. Полуоси поверхностей-эллипсоидов S_i, $i = 1, 2$ считаются известными и равными $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}$.

Сведем задачу $(1)-(6)$ к аналогичной задаче для включения с оболочкой в вакууме; для этого сделаем линейное неортогональное преобразование координат $(\mathbf{r} = (x^1x^2x^3)^T,\ \mathbf{r}' = (x^{1'}x^{2'}x^{3'})^T)$

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_m\,\mathbf{r}', \tag{7}$$

подобранное таким образом, чтобы (1) преобразовалось к уравнению Лапласа:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_m\boldsymbol{\nabla}\varphi_m(\mathbf{r}) = 0,\ \mathbf{r}\in V_m \Leftrightarrow \boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi_m(\mathbf{T}_m\mathbf{r}') = 0,\ \mathbf{r}'\in V'_m,$$

где V'_m — область, занимаемая матрицей в системе координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$. Операторы Гамильтона в системах $x^1x^2x^3$ и $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ связаны друг с другом по формуле

$$\boldsymbol{\nabla} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T\boldsymbol{\nabla}', \tag{8}$$

а связь тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ с матрицей преобразования (8) имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{T}_m\mathbf{T}_m^T. \tag{9}$$

Условно говоря, преобразование (7) устраняет анизотропию диэлектрических свойств матрицы; его также можно рассматривать как преобразование пространства, при этом поверхности-эллипсоиды S_1, S_2, преобразуются соответственно в поверхности-эллипсоиды S'_1, S'_2, полуоси которых обозначим как $a_{1'}^{(i)},\ a_{2'}^{(i)},\ a_{3'}^{(i)},\ i = 1, 2$. С целью единственным образом определить преобразование (7) потребуем, наряду с (9), чтобы оси системы координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ были направлены вдоль осей поверхности S'_1 с таким соответствием, чтобы ее полуоси были упорядочены: $a_{1'}^{(1)} > a_{2'}^{(1)} > a_{3'}^{(1)}$. Аналогично [6] введем для краткости обозначения для произведений полуосей:

$$\bar{a}^{(i)} = a_1^{(i)}a_2^{(i)}a_3^{(i)}, \quad \bar{a}'^{(i)} = a_{1'}^{(i)}a_{2'}^{(i)}a_{3'}^{(i)},\ i = 1, 2. \tag{10}$$

После преобразования (7) условия $(1)-(3)$ примут вид:

$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{\nabla}'\varphi_m(\mathbf{T}_m\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}'\in V'_m, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'_1\boldsymbol{\nabla}'\varphi_1(\mathbf{T}_m\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}'\in V'_1, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{\varepsilon}'_2\boldsymbol{\nabla}'\varphi_2(\mathbf{T}_m\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}'\in V'_2, \tag{13}$$

где V'_1, V'_2 — образы областей V_1, V_2 при преобразовании (7);

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \mathbf{T}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{T}_m^{-1})^T,\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = \mathbf{T}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{T}_m^{-1})^T\ ([15]). \tag{14}$$

Образ области V, занимаемой всем включением, обозначим как V'.

Пусть $f_1(\mathbf{r}) = 0$ и $f_2(\mathbf{r}) = 0$ — уравнения поверхностей S_1, S_2, тогда

$$\mathbf{n}\big|_{S_i} = \boldsymbol{\nabla} f_i |\boldsymbol{\nabla} f_i|^{-1}\big|_{S_i}, \quad i = 1, 2,$$

и вторые из этих условий (4), (5) можно переписать в виде

$$(\boldsymbol{\nabla} f_1, \boldsymbol{\varepsilon}_m \mathbf{E}_m) = (\boldsymbol{\nabla} f_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{E}_1), \quad \mathbf{r} \in S_1,$$
$$(\boldsymbol{\nabla} f_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{E}_1) = (\boldsymbol{\nabla} f_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \mathbf{E}_2), \quad \mathbf{r} \in S_2. \tag{15}$$

Напряженность электрического поля, согласно (8), преобразуется по формулам

$$\mathbf{E} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{E}', \quad \mathbf{E}' = \mathbf{T}_m^T \mathbf{E}. \tag{16}$$

Запишем равенства (15) в системе координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$. Преобразуем левую часть первого из этих равенств с учетом (8), (9), (16)

$$(\boldsymbol{\nabla} f_1, \boldsymbol{\varepsilon}_m \mathbf{E}_m) = \big((\mathbf{T}_m^{-1})^T \boldsymbol{\nabla}' f_1, \boldsymbol{\varepsilon}_m (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{T}_m^T \mathbf{E}_m\big)$$
$$= \big(\boldsymbol{\nabla}' f_1, (\mathbf{T}_m^{-1}) \boldsymbol{\varepsilon}_m (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{E}'_m\big) = (\boldsymbol{\nabla}' f_1, \mathbf{E}'_m).$$

Аналогично для правой части первого равенства с учетом (14) имеем

$$(\boldsymbol{\nabla} f_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \mathbf{E}_1) = (\boldsymbol{\nabla}' f_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \mathbf{E}'_1),$$

поэтому первое из равенств (15) в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ принимает вид

$$(\boldsymbol{\nabla}' f_1, \mathbf{E}'_m) = (\boldsymbol{\nabla}' f_1, \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \mathbf{E}'_1), \quad \mathbf{r}' \in S'_1. \tag{17}$$

Для второго из равенств (15) аналогичным образом получим вид в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$:

$$(\boldsymbol{\nabla}' f_2, \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \mathbf{E}'_1) = (\boldsymbol{\nabla}' f_2, \boldsymbol{\varepsilon}'_2 \mathbf{E}'_2), \quad \mathbf{r}' \in S'_2. \tag{18}$$

Первые из условий (4), (5) в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ можно записать в следующей форме:

$$\varphi'_m(\mathbf{r}') = \varphi'_1(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S'_1, \tag{19}$$

$$\varphi'_1(\mathbf{r}') = \varphi'_2(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in S'_2, \tag{20}$$

где $\varphi'_m(\mathbf{r}') = \varphi_m(\mathbf{T}_m \mathbf{r}')$, $\varphi'_1(\mathbf{r}') = \varphi_1(\mathbf{T}_m \mathbf{r}')$, $\varphi'_2(\mathbf{r}') = \varphi_2(\mathbf{T}_m \mathbf{r}')$. Условие (6) в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ примет вид

$$\varphi'_m\big|_\infty = -(\mathbf{E}'_0, \mathbf{r}'). \tag{21}$$

Таким образом, задача (1)−(6) в системе координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ сводится к системе условий (11)−(13), (17)−(21). Получившаяся задача — это задача для эллипсоидального включения с оболочкой, помещенного в вакуум с однородным приложенным полем. Чтобы показать это, перепишем ее формулировку в координатном виде (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам):

$$\boldsymbol{\nabla}_{k'} \delta^{k'l'} \boldsymbol{\nabla}_{l'} \varphi'_m(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in V'_m, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{k'} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{k'l'} \boldsymbol{\nabla}_{l'} \varphi'_1(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in V'_1, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{k'} \boldsymbol{\varepsilon}_2^{k'l'} \boldsymbol{\nabla}_{l'} \varphi'_2(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in V'_2, \tag{24}$$

$$\varphi'_m(\mathbf{r}') = \varphi'_1(\mathbf{r}'), \;\; \boldsymbol{\nabla}_{k'} f_1 \delta^{k'l'} (E_m)_{l'} = \boldsymbol{\nabla}_{k'} f_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{k'l'} (E_1)_{l'},$$
$$\mathbf{r}' \in S'_1, \tag{25}$$

$$\varphi'_1(\mathbf{r}') = \varphi'_2(\mathbf{r}'), \;\; \boldsymbol{\nabla}_{k'} f_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1^{k'l'} (E_1)_{l'} = \boldsymbol{\nabla}_{k'} f_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2^{k'l'} (E_2)_{l'},$$
$$\mathbf{r}' \in S'_2, \tag{26}$$

$$\varphi'_m\big|_\infty = -(E_0)_{k'} x^{k'}. \tag{27}$$

Координатная форма (22)−(27) задачи в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ не зависит от метрики в этой системе, поэтому можно абстрагироваться от исходной метрики в системе $x^1x^2x^3$ и считать, что метрика в системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ — декартова. Тогда вторые из условий (25), (26) равносильны условиям непрерывности нормальной составляющей электрической индукции на поверхностях S'_1, S'_2, поэтому задача (22)−(27) — это задача для включения с оболочкой, помещенного в вакуум с однородным приложенным полем $\mathbf{E}'_0$. Диэлектрические проницаемости оболочки и ядра включения равны $\boldsymbol{\varepsilon}'_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}'_2$ соответственно.

Решение задачи для включения с оболочкой в вакууме

Решение задачи (22)−(27) известно и имеет вид [6]

$$\varphi'_m(\mathbf{r}') = \Big(\big(-\mathbf{I} + 3(\overline{a}'^{(1)})^{-1} \mathbf{N}'(\xi') \boldsymbol{\alpha}'\big) \mathbf{E}'_0, \mathbf{r}'\Big),$$
$$\mathbf{r}' \in V'_m, \quad \xi' \geq 0,$$
$$\varphi'_1(\mathbf{r}') = \Big(\big(\boldsymbol{\beta}'^{(1)} + \mathbf{N}''_0(\xi'') \boldsymbol{\alpha}'^{(1)}\big) \mathbf{E}'_0, \mathbf{r}'\Big),$$
$$\mathbf{r}' \in V'_1, \quad 0 \leq \xi'' \leq t'', \tag{28}$$
$$\varphi'_2(\mathbf{r}') = -(\mathbf{E}'^{(2)}, \mathbf{r}'),$$

где

$$\mathbf{E}'^{(2)} = \boldsymbol{\lambda}'_{20} \mathbf{E}'_0, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = 3^{-1} \overline{a}'^{(1)} \Big[(\boldsymbol{\varepsilon}'_1 - \mathbf{I})\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_0''^{(2)} - v' \mathbf{L}_0''^{(1)})(\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1)\big)$$
$$+ v'(\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1)\Big] \boldsymbol{\lambda}'_{20},$$

$$\boldsymbol{\alpha}'^{(1)} = (\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1) \boldsymbol{\lambda}'_{20}, \quad \boldsymbol{\beta}'^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0''^{(2)} (\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1)\big) \boldsymbol{\lambda}'_{20}, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\lambda}'_{20} = \Big[\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}'^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon}'_1 - \mathbf{I})\big)\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_0''^{(2)} - v' \mathbf{L}_0''^{(1)})(\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1)\big)$$
$$+ v' \mathbf{L}'^{(1)} (\boldsymbol{\varepsilon}'_2 - \boldsymbol{\varepsilon}'_1)\Big]^{-1}.$$

В первом из выражений (28) ξ' — первая из эллипсоидальных координат ξ', η', ζ', связанных с координатами $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ по формулам

$$(x^{i'})^2 = \frac{\left(\xi' + (a_{i'}^{(1)})^2\right)\left(\eta' + (a_{i'}^{(1)})^2\right)\left(\zeta' + (a_{i'}^{(1)})^2\right)}{\left((a_{j'}^{(1)})^2 - (a_{i'}^{(1)})^2\right)\left((a_{k'}^{(1)})^2 - (a_{i'}^{(1)})^2\right)},$$

$$i' = 1', 2', 3' \quad (i' \neq j' \neq k' \neq i'), \tag{31}$$

$$-(a_{1'}^{(1)})^2 < \zeta' < -(a_{2'}^{(1)})^2 < \eta' < -(a_{3'}^{(1)})^2 < \xi' < +\infty;$$

$\mathbf{N}'(\xi')$ — тензорная функция координаты ξ':

$$\mathbf{N}'(\xi') = \begin{Vmatrix} N'_{1'}(\xi') & 0 & 0 \\ 0 & N'_{2'}(\xi') & 0 \\ 0 & 0 & N'_{3'}(\xi') \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

$$N'_{i'}(\xi') = \frac{\bar{a}'^{(1)}}{2} \int\limits_{\xi'}^{+\infty} \frac{du}{[u + (a_{i'}^{(1)})^2] R_u'^{(1)}}, \quad i' = 1', 2', 3', \tag{33}$$

$$R_u'^{(1)} = \left[\left(u + (a_{1'}^{(1)})^2\right)\left(u + (a_{2'}^{(1)})^2\right)\left(u + (a_{3'}^{(1)})^2\right)\right]^{1/2}. \tag{34}$$

Во втором из выражений (28) ξ'' — первая из эллипсоидальных координат ξ'', η'', ζ'', связанных с координатами $x^{1''}, x^{2''}, x^{3''}$, которые вводятся с помощью преобразования $(\mathbf{r}'' = (x^{1''}x^{2''}x^{3''})^T)$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}'_1\,\mathbf{r}'', \tag{35}$$

устраняющего анизотропию оболочки после преобразования (7). Его связь с тензором $\boldsymbol{\varepsilon}'_1$ имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_1 = \mathbf{T}'_1\mathbf{T}'^{\mathbf{T}}_1.$$

Образами поверхностей-эллипсоидов S'_1, S'_2, при преобразовании (35) являются поверхности-эллипсоиды S''_1, S''_2, которые предполагаются софокусными; их полуоси, обозначенные как $a_{1''}^{(i)}, a_{2''}^{(i)}, a_{3''}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, связаны соотношениями

$$(a_{k''}^{(1)})^2 = (a_{k''}^{(2)})^2 + t'', \quad k'' = 1'', 2'', 3'',$$

где $t'' > 0$ — некоторое число. Координаты ξ'', η'', ζ'' вводятся формулами

$$(x^{i''})^2 = \frac{\left(\xi'' + (a_{i''}^{(2)})^2\right)\left(\eta'' + (a_{i''}^{(2)})^2\right)\left(\zeta'' + (a_{i''}^{(2)})^2\right)}{\left((a_{j''}^{(2)})^2 - (a_{i''}^{(2)})^2\right)\left((a_{k''}^{(2)})^2 - (a_{i''}^{(2)})^2\right)},$$

$$i'' = 1'', 2'', 3''; \quad (i'' \neq j'' \neq k'' \neq i''), \tag{36}$$

$$-(a_{1''}^{(2)})^2 < \zeta'' < -(a_{2''}^{(2)})^2 < \eta'' < -(a_{3''}^{(2)})^2 < \xi'' < +\infty.$$

$\mathbf{N}''_0(\xi'')$ — тензорная функция координаты ξ'', преобразованная к системе координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ по формуле

$$\mathbf{N}''_0(\xi'') = (\mathbf{T}'^{-1}_1)^T\,\mathbf{N}''(\xi'')\mathbf{T}'^{-1}_1,$$

где $\mathbf{N}''(\xi'')$ — эта же функция в системе $x^{1''}x^{2''}x^{3''}$:

$$\mathbf{N}''(\xi'') = \begin{Vmatrix} N''_{1''}(\xi'') & 0 & 0 \\ 0 & N''_{2''}(\xi'') & 0 \\ 0 & 0 & N''_{3''}(\xi'') \end{Vmatrix}, \tag{37}$$

$$N''_{i''}(\xi'') = \frac{\bar{a}''^{(2)}}{2} \int\limits_{\xi''}^{+\infty} \frac{du}{[u + (a_{i''}^{(2)})^2] R_u''^{(2)}}, \quad i'' = 1'', 2'', 3'', \tag{38}$$

$$R_u''^{(k)} = \left[\left(u + (a_{1''}^{(k)})^2\right)\left(u + (a_{2''}^{(k)})^2\right)\left(u + (a_{3''}^{(k)})^2\right)\right]^{1/2},$$

$$k = 1, 2, \tag{39}$$

$$\bar{a}''^{(k)} = a_{1''}^{(k)}a_{2''}^{(k)}a_{3''}^{(k)}, \quad k = 1, 2. \tag{40}$$

В выражениях (30) $\mathbf{L}'^{(1)}$ — тензор геометрических факторов эллипсоида V' с поверхностью S'_1:

$$\mathbf{L}'^{(1)} = \mathbf{N}'(0); \tag{41}$$

$\mathbf{L}''^{(i)}_0$, $i = 1, 2$ — преобразованные к системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ тензоры геометрических факторов эллипсоидов, ограниченных снаружи поверхностями S''_i, $i = 1, 2$ соответственно:

$$\mathbf{L}''^{(i)}_0 = (\mathbf{T}'^{-1}_1)^T\mathbf{L}''^{(i)}\mathbf{T}'^{-1}_1, \quad i = 1, 2,$$

где $\mathbf{L}''^{(i)}$, $i = 1, 2$ — эти же тензоры в системе $x^{1''}x^{2''}x^{3''}$; их главные компоненты

$$L''^{(k)}_{i''} = \frac{\bar{a}''^{(k)}}{2} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{du}{[u + (a_{i''}^{(k)})^2] R_u''^{(k)}},$$

$$i'' = 1'', 2'', 3''; \quad k = 1, 2;$$

v' — отношение объемов внутреннего V'_2 и внешнего эллипсоидов V', которое в силу линейности преобразования (7) равно отношению объема ядра к объему всего включения:

$$v' = \bar{a}'^{(2)}/\bar{a}'^{(1)} = \bar{a}^{(2)}/\bar{a}^{(1)}.$$

Выражения для напряженности электрического поля в матрице (вакууме) и в оболочке имеют вид [6]

$$\mathbf{E}'_m = \Big(\mathbf{I} + 3\big[-(\bar{a}'^{(1)})^{-1}\mathbf{N}'(\xi') + h'^{-2}_1(R'^{(1)}_{\xi'})^{-1} \times (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})\big]\boldsymbol{\alpha}'\Big)\mathbf{E}'_0,$$

$$\mathbf{E}'_1 = \Big(-\boldsymbol{\beta}'^{(1)} + \big[-\mathbf{N}''_0(\xi'') + \bar{a}''^{(2)}h''^{-2}_1(R''^{(2)}_{\xi''})^{-1} \times (\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})_0\big]\boldsymbol{\alpha}'^{(1)}\Big)\mathbf{E}'_0, \tag{42}$$

где

$$\mathbf{r}'_{\xi'} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi'} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1'}}{\xi' + (a_{1'}^{(1)})^2}\;\frac{x^{2'}}{\xi' + (a_{2'}^{(1)})^2}\;\frac{x^{3'}}{\xi' + (a_{3'}^{(1)})^2}\right)^T,$$

$$\mathbf{r}''_{\xi''} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}''}{\partial \xi''} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{1''}}{\xi'' + (a^{(2)}_{1''})^2}\ \frac{x^{2''}}{\xi'' + (a^{(2)}_{2''})^2}\ \frac{x^{3''}}{\xi'' + (a^{(2)}_{3''})^2}\right)^T,$$

$$(\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})_0 = (\mathbf{T}_1'^{-1})^T (\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''}) \mathbf{T}_1'^{-1}$$

— тензор, преобразованный к системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$, $(\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})$ — этот же тензор в системе $x^{1''}x^{2''}x^{3''}$;

$$h'_1 = (2R'^{(1)}_{\xi'})^{-1}\sqrt{(\xi' - \eta')(\xi' - \zeta')},$$

$$h''_1 = (2R''^{(2)}_{\xi''})^{-1}\sqrt{(\xi'' - \eta'')(\xi'' - \zeta'')}$$

— первые из коэффициентов Ламе соответствующих эллипсоидальных систем координат. Напряженность электрического поля в ядре включения имеет вид (29).

Получение решения исходной задачи с помощью преобразования решения задачи для включения с оболочкой в вакууме

Чтобы получить решение исходной задачи (1)–(6), нужно выражения (28)–(30), (42) преобразовать к исходной системе координат $x^1x^2x^3$. Тензорные величины, определяемые выражениями (30), преобразуются при переходе к системе $x^1x^2x^3$ по формулам (обозначаются без штрихов):

$$\boldsymbol{\lambda}_{20} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \boldsymbol{\lambda}'_{20} \mathbf{T}_m^T, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T}_m \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{T}_m^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \mathbf{T}_m \boldsymbol{\alpha}'^{(1)} \mathbf{T}_m^T, \quad \boldsymbol{\beta}^{(1)} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \boldsymbol{\beta}'^{(1)} \mathbf{T}_m^T,$$

так как $\boldsymbol{\lambda}_{20}$ и $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ — ковариантно-контравариантные, а $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ — дважды контравариантные. Элементарными преобразованиями получим для них выражения

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{20} &= \Big[\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_{00}''^{(2)} - v'\mathbf{L}_{00}''^{(1)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\big) \\
&\quad + v'\mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\Big]^{-1}, \\
\boldsymbol{\alpha} &= 3^{-1}\bar{a}'^{(1)}\big[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_{00}''^{(2)} - v'\mathbf{L}_{00}''^{(1)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\big) \\
&\quad + v'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\big]\boldsymbol{\lambda}_{20}, \\
\boldsymbol{\alpha}^{(1)} &= (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\lambda}_{20}, \quad \boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{00}''^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\big)\boldsymbol{\lambda}_{20},
\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$\mathbf{L}_0'^{(1)} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{L}'^{(1)} \mathbf{T}_m^{-1}$$

— тензор геометрических факторов эллипсоида с поверхностью S'_1 в системе координат $x^1x^2x^3$ (он дважды ковариантный);

$$\mathbf{L}_{00}''^{(i)} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{L}_0''^{(i)} \mathbf{T}_m^{-1}, \quad i = 1, 2$$

— тензоры геометрических факторов эллипсоидов с поверхностями S''_i, $i = 1, 2$ соответственно в системе $x^1x^2x^3$.

Преобразуя выражения (28), (29), (42) к системе координат $x^1x^2x^3$, в итоге получим для потенциала и напряженности электрического поля в матрице, оболочке и ядре включения следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\varphi_m(\mathbf{r}) &= \big(\big(-\mathbf{I} + 3(\bar{a}'^{(1)})^{-1}\mathbf{N}'_0(\xi')\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_m, \ \xi' \ge 0, \\
\varphi_1(\mathbf{r}) &= \big(\big(\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \mathbf{N}''_{00}(\xi'')\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_1, \ 0 \le \xi'' \le t'', \\
\varphi_2(\mathbf{r}) &= -(\boldsymbol{\lambda}_{20}\mathbf{E}_0, \mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_m &= \big(\mathbf{I} + 3\big[-(\bar{a}'^{(1)})^{-1}\mathbf{N}'_0(\xi') + h_1'^{-2}(R'^{(1)}_{\xi'})^{-1} \\
&\quad \times (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0\big]\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0, \\
\mathbf{E}_1 &= \big(-\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \big[-\mathbf{N}''_{00}(\xi'') + \bar{a}''^{(2)} h_1''^{-2}(R''^{(2)}_{\xi''})^{-1} \\
&\quad \times (\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})_{00}\big]\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0, \\
\mathbf{E}_2 &= \boldsymbol{\lambda}_{20}\mathbf{E}_0,
\end{aligned} \tag{45}$$

где

$$\mathbf{N}'_0(\xi') = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{N}'(\xi') \mathbf{T}_m^{-1}, \ \mathbf{N}''_{00}(\xi'') = (\mathbf{T}_m^{-1})^T \mathbf{N}''_0(\xi'') \mathbf{T}_m^{-1},$$

$$(\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0 = (\mathbf{T}_m^{-1})^T (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'}) \mathbf{T}_m^{-1},$$

$$(\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})_{00} = (\mathbf{T}_m^{-1})^T (\mathbf{r}''_{\xi''} \otimes \mathbf{r}''_{\xi''})_0 \mathbf{T}_m^{-1} \tag{46}$$

— соответствующие тензорные величины в системе $x^1x^2x^3$.

Дипольный момент и тензор поляризуемости включения с оболочкой в анизотропной среде

Потенциал точечного заряда q в анизотропной среде, расположенного в начале координат, имеет выражение [10]

$$\varphi_q = (\det \boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1/2} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1} \mathbf{r})^{-1/2} q, \tag{47}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ — тензор диэлектрической проницаемости среды. Потенциал такого же по абсолютной величине, но противоположного по знаку заряда $-q$, расположенного в близкой к началу координат точке $-d\mathbf{r}$, равен

$$\varphi'_{-q} = -(\det \boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1/2} \big((\mathbf{r} + d\mathbf{r})^T \boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1} (\mathbf{r} + d\mathbf{r})\big)^{-1/2} q. \tag{48}$$

Складывая (47) и (48) и линеаризуя по $d\mathbf{r}$, получим потенциал точечного диполя с моментом $\mathbf{p} = q d\mathbf{r}$ в анизотропной среде

$$\varphi_{\mathbf{p}} = (\det \boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1/2} (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1} \mathbf{r})^{-3/2} (\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{r}). \tag{49}$$

Для нахождения дипольного момента включения с оболочкой рассмотрим первое из выражений (44) для потенциала поля φ_m в матрице в асимптотике при $r \to \infty$. Так как $\xi' \approx r'^2 \equiv \mathbf{r}'^2$, $\xi' \to +\infty$, то

$$\mathbf{N}'(\xi') \approx 3^{-1}\bar{a}'^{(1)}\xi'^{-3/2}\mathbf{I} \approx 3^{-1}\bar{a}'^{(1)} r'^{-3}\mathbf{I}, \quad \xi' \to +\infty,$$

$$\mathbf{N}'_0(\xi') \approx 3^{-1}\overline{a}'^{(1)}r'^{-3}(\mathbf{T}_m^{-1})^T\mathbf{I}\mathbf{T}_m^{-1} = 3^{-1}\overline{a}'^{(1)}r'^{-3}\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1},$$
$$\xi' \to +\infty.$$

Поскольку $r'^2 = (\mathbf{r}^T\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\mathbf{r})$, то

$$\mathbf{N}'_0(\xi') \approx 3^{-1}\overline{a}'^{(1)}(\mathbf{r}^T\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\mathbf{r})^{-3/2}\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}, \quad \xi', r \to +\infty,$$

и для φ_m получим

$$\varphi_m \approx \big((-\mathbf{I} + (\mathbf{r}^T\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\mathbf{r})^{-3/2}\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\boldsymbol{\alpha})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \quad r \to +\infty,$$

причем потенциал возмущенного поля

$$\varphi_p = \varphi_m - \varphi_0 \approx \big((\mathbf{r}^T\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\mathbf{r})^{-3/2}\boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \quad r \to +\infty.$$

Сопоставляя это выражение с потенциалом точечного диполя (49), найдем дипольный момент включения с оболочкой

$$\mathbf{p} = (\det\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{1/2}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}_0,$$

откуда видно, что тензор поляризуемости включения

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\det\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{1/2}\boldsymbol{\alpha}, \tag{50}$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ определяется формулой (43). Поскольку

$$(\det\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{1/2}\overline{a}'^{(1)} = \overline{a}^{(1)},$$

перепишем выражение для тензора поляризуемости включения в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = 3^{-1}\overline{a}^{(1)}\Big[(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big(\mathbf{I} + (\mathbf{L}''^{(2)}_{00} - \upsilon'\mathbf{L}''^{(1)}_{00})(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\big)$$
$$+ \upsilon'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1)\Big]\boldsymbol{\lambda}_{20}. \tag{51}$$

Включение с изотропной оболочкой в анизотропной среде

Рассмотрим частный, но важный для приложений случай, когда оболочка включения имеет изотропные материальные характеристики, т. е. тензор диэлектрической проницаемости оболочки имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1\mathbf{I}. \tag{52}$$

В этом случае, очевидно, преобразование (35), устраняющее анизотропию оболочки после преобразования (7), т. е. сводящее $\boldsymbol{\varepsilon}'_1$ к единичному тензору $\mathbf{I}$, есть

$$\mathbf{T}'_1 = \mathbf{T}_m^{-1}\sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{I},$$

При этом координатные системы $x^{1''}x^{2''}x^{3''}$ и $x^1x^2x^3$ связаны между собой соотношениями

$$x^i = \sqrt{\varepsilon_1}\,x^{i''}, \quad i = 1, 2, 3; \;\; i'' = 1'', 2'', 3'', \tag{53}$$

или в векторном виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_1\mathbf{r}'', \quad \mathbf{T}_1 = \sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{I}.$$

Софокусность поверхностей-эллипсоидов при изотропном растяжении сохраняется, поэтому софокусными считаются исходные поверхности-эллипсоиды S_1, S_2, т. е.

$$(a_k^{(1)})^2 = (a_k^{(2)})^2 + t, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $t > 0$ — „шаг софокусности". Полуоси поверхностей-эллипсоидов S_i и S''_i, $i = 1, 2$ связаны между собой, согласно (53):

$$a_{k''}^{(i)} = (\varepsilon_1)^{-1/2}a_k^{(i)}, \;\; k = 1, 2, 3; \;\; k'' = 1'', 2'', 3''; \;\; i = 1, 2,$$

при этом для „шага софокусности" поверхностей S_1, S_2 имеем

$$t = \varepsilon_1 t''.$$

Введем эллипсоидальные координаты ξ, η, ζ, связанные с координатами x^1, x^2, x^3 по формулам:

$$(x^i)^2 = \frac{\big(\xi + (a_i^{(2)})^2\big)\big(\eta + (a_i^{(2)})^2\big)\big(\zeta + (a_i^{(2)})^2\big)}{\big((a_j^{(2)})^2 - (a_i^{(2)})^2\big)\big((a_k^{(2)})^2 - (a_i^{(2)})^2\big)},$$
$$i = 1, 2, 3; \quad (i \neq j \neq k \neq i), \tag{54}$$

где $-(a_1^{(2)})^2 < \zeta < -(a_2^{(2)})^2 < \eta < -(a_3^{(2)})^2 < \xi < +\infty$. Значению координаты $\xi = 0$ соответствует положение точек на внутренней поверхности S_2. Связь координат ξ, η, ζ с координатами ξ'', η'', ζ'', введенными формулами (36), имеет вид

$$\xi = \varepsilon_1\xi'', \quad \eta = \varepsilon_1\eta'', \quad \zeta = \varepsilon_1\zeta''. \tag{55}$$

Введем тензорную функцию $\mathbf{N}(\xi)$ переменной ξ, имеющую в системе $x^1x^2x^3$ вид

$$\mathbf{N}(\xi) = \begin{Vmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_3(\xi) \end{Vmatrix}, \tag{56}$$

$$N_i(\xi) = \frac{\overline{a}^{(2)}}{2}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_i^{(2)})^2]R_u^{(2)}}, \;\; i = 1, 2, 3; \;\; 0 \le \xi \le t, \tag{57}$$

где

$$R_u^{(k)} = \big[\big(u + (a_1^{(k)})^2\big)\big(u + (a_2^{(k)})^2\big)\big(u + (a_3^{(k)})^2\big)\big]^{1/2},$$
$$k = 1, 2.$$

С помощью элементарных преобразований нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{N}''(\xi'') = \mathbf{N}(\xi),$$

где $\mathbf{N}''(\xi'')$ — тензорная функция, определяемая выражениями (37)–(40). Тогда для этой же тензорной функции в системе $x^1x^2x^3$ получим

$$\mathbf{N}''_{00}(\xi'') = (\mathbf{T}_1^{-1})^T\mathbf{N}''(\xi'')\mathbf{T}_1^{-1} = \varepsilon_1^{-1}\mathbf{N}(\xi). \tag{58}$$

Далее, так как для тензоров геометрических факторов эллипсоидов с поверхностями S_1'', S_2'' имеют место соотношения $\mathbf{L}_{00}''^{(2)} = \mathbf{N}_{00}''(0)$, $\mathbf{L}_{00}''^{(1)} = v'^{-1}\mathbf{N}_{00}''(t'')$, то

$$\mathbf{L}_{00}''^{(k)} = \varepsilon_1^{-1}\mathbf{L}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \tag{59}$$

где $\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}$ — тензоры геометрических факторов эллипсоидов с поверхностями S_1, S_2 соответственно:

$$\mathbf{L}^{(1)} = v'^{-1}\mathbf{N}(t), \quad \mathbf{L}^{(2)} = \mathbf{N}(0),$$

их главные компоненты

$$L_i^{(k)} = \frac{\overline{a}^{(k)}}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_i^{(k)})^2]R_u^{(k)}}, \ i = 1, 2, 3; \ k = 1, 2. \tag{60}$$

Упростим выражение для тензора $(\mathbf{r}_{\xi''}'' \otimes \mathbf{r}_{\xi''}'')_{00}$ в случае изотропной оболочки. С учетом (53) и (55)

$$\mathbf{r}_{\xi''}'' = \sqrt{\varepsilon_1}\,\mathbf{r}_\xi,$$

где

$$\mathbf{r}_\xi \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^1}{\xi + (a_1^{(2)})^2}\ \frac{x^2}{\xi + (a_2^{(2)})^2}\ \frac{x^3}{\xi + (a_3^{(2)})^2},\right)^T, \tag{61}$$

тогда

$$\mathbf{r}_{\xi''}'' \otimes \mathbf{r}_{\xi''}'' = \varepsilon_1(\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi),$$

поэтому

$$(\mathbf{r}_{\xi''}'' \otimes \mathbf{r}_{\xi''}'')_{00} = \varepsilon_1^{-1}(\mathbf{r}_{\xi''}'' \otimes \mathbf{r}_{\xi''}'') = (\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi), \tag{62}$$

Для коэффициента Ламе h_1'' и выражения $R_{\xi''}''^{(2)}$ имеем

$$h_1'' = \sqrt{\varepsilon_1}\,h_1, \quad R_{\xi''}''^{(2)} = \varepsilon_1^{-3/2}R_\xi^{(2)},$$

где

$$h_1 = (2R_\xi^{(2)})^{-1}\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}. \tag{63}$$

С учетом соотношений (52), (59) выражения (43) для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ принимают вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{20} = \big[\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\varepsilon_1\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)\big(\mathbf{I} + \varepsilon_1^{-1}(\mathbf{L}^{(2)} - v'\mathbf{L}^{(1)}) \times (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + v'\mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]^{-1},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 3^{-1}\overline{a}'^{(1)}\big[(\varepsilon_1\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)\big(\mathbf{I} + \varepsilon_1^{-1}(\mathbf{L}^{(2)} - v'\mathbf{L}^{(1)}) \times (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + v'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]\boldsymbol{\lambda}_{20},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\boldsymbol{\lambda}_{20}, \ \boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + \varepsilon_1^{-1}\mathbf{L}^{(2)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big)\boldsymbol{\lambda}_{20}. \tag{64}$$

Выражения для потенциала и напряженности электрического поля в матрице и ядре остаются такими же, как и в (44), (45), а выражения для них в оболочке с учетом (58), (61), (62) немного упрощаются. Выпишем для удобства все указанные выражения

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \big(\big(-\mathbf{I} + 3(\overline{a}'^{(1)})^{-1}\mathbf{N}_0'(\xi')\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_m, \xi' \ge 0,$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \big(\big(\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \varepsilon_1^{-1}\mathbf{N}(\xi)\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_1, \ 0 \le \xi \le t,$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = -(\boldsymbol{\lambda}_{20}\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \tag{65}$$

$$\mathbf{E}_m = \big(\mathbf{I} + 3\big[-(\overline{a}'^{(1)})^{-1}\mathbf{N}_0'(\xi') + h_1'^{-2}(R_{\xi'}'^{(1)})^{-1} \times (\mathbf{r}_{\xi'}' \otimes \mathbf{r}_{\xi'}')_0\big]\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{E}_1 = \big(-\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \varepsilon_1^{-1}\big[-\mathbf{N}(\xi) + \overline{a}^{(2)}h_1^{-2}(R_\xi^{(2)})^{-1} \times (\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi)\big]\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0,$$

$$\mathbf{E}_2 = \boldsymbol{\lambda}_{20}\mathbf{E}_0, \tag{66}$$

где $\mathbf{N}(\xi)$, $R_\xi^{(2)}$, $(\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi)$, h_1 определяются выражениями (56)–(57), (60), (61), (63) соответственно.

Примеры

1. Рассмотрим случай анизотропного шара с изотропной сферической оболочкой в анизотропной матрице. Пусть $a^{(1)}, a^{(2)}$ — радиусы внешней и внутренней сфер S_1, S_2. Направим оси системы координат $x^1x^2x^3$ вдоль главных осей тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_m$, тогда матрица преобразования (7) будет иметь в системе $x^1x^2x^3$ вид

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1^{(m)})^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_2^{(m)})^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_3^{(m)})^{1/2} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_k^{(m)}$, $k = 1, 2, 3$ — главные компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_m$. Сферы S_1, S_2 при преобразовании (7) переходят в поверхности-эллипсоиды S_1', S_2' с полуосями

$$a_{k'}^{(i)} = (\varepsilon_k^{(m)})^{1/2}a^{(i)}, \ k = 1, 2, 3; \ k' = 1', 2', 3'; \ i = 1, 2. \tag{67}$$

Для главных компонент тензорной функции $\mathbf{N}'(\xi')$ в соответствии с (67) получаем

$$N_{k'}'(\xi') = \frac{(a^{(1)})^3}{2(\varepsilon_1^{(m)}\varepsilon_2^{(m)}\varepsilon_3^{(m)})^{1/2}}\int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{du}{[u + (\varepsilon_k^{(m)})^{-1}(a^{(1)})^2]R_u'^{(1)}}, \quad k' = 1', 2', 3', \tag{68}$$

где

$$R_u'^{(1)} = \left[\prod_{k=1}^{3}\big(u + (\varepsilon_k^{(m)})^{-1}(a^{(1)})^2\big)\right]^{1/2}, \tag{69}$$

для главных компонент $\mathbf{N}_0'(\xi')$ имеем

$$N_{0,k'}'(\xi') = (\varepsilon_k^{(m)})^{-1}N_{k'}'(\xi'), \ k = 1, 2, 3; \ k' = 1', 2', 3'. \tag{70}$$

В соответствии с (41) для главных компонент тензора $\mathbf{L}_0^{\prime(1)}$ имеем выражения

$$L_{0,k'}^{\prime(1)} = (\varepsilon_k^{(m)})^{-1} N'_{k'}(0),\ k = 1, 2, 3;\ k' = 1', 2', 3'. \quad (71)$$

Несложно проверить, что в случае вырождения поверхности-эллипсоида S_2 в сферу для координат ξ, η, ζ, определяемых формулами (54), получаются предельные выражения

$$\xi \to r^2 - (a^{(2)})^2, \quad \eta, \zeta \to -(a^{(2)})^2,$$

поэтому непосредственным вычислением по формулам (57), (63) для $\mathbf{N}(\xi)$, $R_\xi^{(2)}$, h_1 получаем

$$\mathbf{N}(\xi) = 3^{-1}(a^{(2)}/r)^3\mathbf{I}, \quad R_\xi^{(2)} = r^3, \quad h_1 = 1/(2r). \quad (72)$$

Имеем также в данном случае

$$\mathbf{r}_\xi \otimes \mathbf{r}_\xi = 4^{-1}r^{-4}\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}, \quad \mathbf{L}^{(1)} = \mathbf{L}^{(2)} = 3^{-1}\mathbf{I}.$$

Выражения (64) для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ принимают вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{20} = \big[\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0^{\prime(1)}\varepsilon_1\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m\big)\big(\mathbf{I} + 3^{-1}\varepsilon_1^{-1}(1 - v')$$
$$\times (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + v'\mathbf{L}_0^{\prime(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]^{-1},$$
$$\boldsymbol{\alpha} = 3^{-1}\big(\varepsilon_1^{(m)}\varepsilon_2^{(m)}\varepsilon_3^{(m)}\big)^{-1/2}(a^{(1)})^3\big[(\varepsilon_1\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big(\mathbf{I} + 3^{-1}\varepsilon_1^{-1}$$
$$\times (1 - v')(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big) + v'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]\boldsymbol{\lambda}_{20},$$
$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\boldsymbol{\lambda}_{20},\ \boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + 3^{-1}\varepsilon_1^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big)\boldsymbol{\lambda}_{20}. \quad (73)$$

Таким образом, потенциал и напряженность электрического поля в сферической оболочке задаются следующими выражениями:

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \big(\big(\boldsymbol{\beta}^{(1)} + 3^{-1}\varepsilon_1^{-1}(a^{(2)}/r)^3\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big),$$
$$\mathbf{r} \in V_1,\ a^{(2)} \le r \le a^{(1)}, \quad (74)$$
$$\mathbf{E}_1 = \big(-\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \varepsilon_1^{-1}\big[-3^{-1}\varepsilon_1^{-1} + (a^{(2)}/r)^3\mathbf{I} + (a^{(2)})^3$$
$$\times r^{-5}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\big]\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\big)\mathbf{E}_0, \quad (75)$$

потенциал и напряженность электрического поля в матрице и ядре включения — соответствующими выражениями из (65) и (66) с учетом того, что $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ определяются из (73).

2. Для случая анизотропного шара с изотропной сферической оболочкой в изотропной матрице преобразование (7) становится изотропным сжатием

$$\mathbf{T}_m = \sqrt{\varepsilon_m}\,\mathbf{I}.$$

где ε_m — скалярная диэлектрическая проницаемость матрицы, при этом существенно упростятся выражения (67)–(71):

$$a_{k'}^{(i)} = (\varepsilon_m)^{-1/2}a^{(i)}, \quad k' = 1', 2', 3';\ i = 1, 2.$$

В случае вырождения поверхности-эллипсоида S_1 в сферу для координат ξ', η', ζ' определяемой формулами (31) получается предельные выражения:

$$\xi' \to r'^2 - (a'^{(1)})^2 = \varepsilon_m^{-1}\big(r^2 - (a^{(1)})^2\big),$$
$$\eta', \zeta' \to -(a'^{(1)})^2 = -\varepsilon_m^{-1}(a^{(1)})^2,$$

поэтому для тензорной функции $\mathbf{N}'(\xi')$ имеем аналогично (72)

$$\mathbf{N}'(\xi') = 3^{-1}(a^{(1)}/r)^3\mathbf{I},$$

откуда

$$\mathbf{N}'_0(\xi') = 3^{-1}\varepsilon_m^{-1}(a^{(1)}/r)^3\mathbf{I}, \quad \mathbf{L}_0^{\prime(1)} = 3^{-1}\varepsilon_m^{-1}\mathbf{I}.$$

Также имеем

$$R_{\xi'}^{\prime(1)} = \varepsilon_m^{-3/2}r^3,\ h'_1 = 1/(2r),\ (\mathbf{r}'_{\xi'} \otimes \mathbf{r}'_{\xi'})_0 = 4^{-1}r^{-4}\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}.$$

Выражения для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$, $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$ принимают вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{20} = 9\varepsilon_m\varepsilon_1\big[(1 - v')(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})$$
$$+ 3\varepsilon_1\big(2\varepsilon_m + \varepsilon_1 + v'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big)\big]^{-1},$$
$$\boldsymbol{\alpha} = 9^{-1}\varepsilon_m^{-3/2}\varepsilon_1^{-1}(a^{(1)})^3\big[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2)$$
$$+ v'(2\varepsilon_1 + \varepsilon_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]\boldsymbol{\lambda}_{20},$$
$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\boldsymbol{\lambda}_{20}, \quad \boldsymbol{\beta}^{(1)} = -3^{-1}\varepsilon_1^{-1}(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\lambda}_{20}. \quad (76)$$

Потенциал и напряженность электрического поля в сферической оболочке задаются формулами (74) и (75) соответственно, потенциал и напряженность в ядре включения — соответствующими формулами из (65) и (66) с учетом того, что $\boldsymbol{\lambda}_{20}$ определяется из (76), а потенциал и напряженность в матрице — следующими выражениями:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \big((-\mathbf{I} + \varepsilon_m^{1/2}r^{-3}\boldsymbol{\alpha})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \quad \mathbf{r} \in V_m,$$
$$\mathbf{E}_m = \big(\mathbf{I} + 3\big[-3^{-1}\varepsilon_m^{1/2}r^{-3}\mathbf{I} + \varepsilon_m^{3/2}r^{-5}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\big]\boldsymbol{\alpha}\big)\mathbf{E}_0.$$

Для тензора поляризуемости в соответствии с (50) имеем формулу

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (a^{(1)})^3\varepsilon_m\big[(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + v'(2\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$$
$$\times (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big]\big[(1 - v')(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})$$
$$+ 3\varepsilon_1\big(2\varepsilon_m + \varepsilon_1 + v'(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\big)\big]^{-1},$$

являющуюся обобщением известного результата [8,9] на включение с анизотропным ядром.

3. Рассмотрим один из предельных случаев, когда задача (1)–(6) сводится к задаче для однородного эллипсоидального включения в анизотропной среде. Пусть $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_2$, т.е. оболочка и ядро сливаются. Тогда формулы (43) принимают вид

$$\boldsymbol{\lambda}_{20} = \big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0^{\prime(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 3^{-1}\overline{a}'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{\beta}^{(1)} = -\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1}. \qquad (77)$$

Для потенциала, согласно (44), с учетом (77) имеем

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \big(\big[-\mathbf{I} + \mathbf{N}_0'(\xi')(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m) \times \big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1}\big]\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big),$$

$$\mathbf{r} \in V_m, \quad \xi' \geq 0,$$

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \big(-\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1}\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_1,$$

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \big(-\big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1}\mathbf{E}_0, \mathbf{r}\big), \ \mathbf{r} \in V_2.$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}_m$ в матрице выражается первой из формул (45), а напряженности поля в оболочке и ядре постоянны и равны друг другу:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \big(\mathbf{I} + \mathbf{L}_0'^{(1)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_m)\big)^{-1}\mathbf{E}_0. \qquad (78)$$

Выражение (78) совпадает с формулой для напряженности поля внутри эллипсоида с поверхностью S_1, помещенного в анизотропную среду с приложенным постоянным полем, полученной в [15]. Покажем, что выражения (78) и (45) для напряженности поля внутри эллипсоида и в матрице равносильны следующим выражениям, полученным в [7]:

$$\mathbf{E}_1 = \big(\mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1)\big)^{-1}\mathbf{E_0}, \qquad (79)$$

$$\mathbf{E}_m = \Big(\mathbf{I} + \mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r})\big[(\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1)^{-1} - \mathbf{S}\big]^{-1}\Big)\mathbf{E}_0,$$

где $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r})$ — внутренний и внешний электрические тензоры Эшелби:

$$\mathbf{S} = \frac{\det(\mathbf{a})}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{[\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_m ds}{\sqrt{\det(\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m)}},$$

$$\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r}) = \frac{\det(\mathbf{a})}{2}\int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{[\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_m ds}{\sqrt{\det(\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m)}} - \frac{\det(\mathbf{a})}{\sqrt{\det(\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m)}} \times \frac{[(\mathbf{a}^2 + \xi'\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1}\mathbf{r}][\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{a}^2 + \xi'\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1}\mathbf{r}]^T}{[(\mathbf{a}^2 + \xi'\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1}\mathbf{r}]^T[\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{a}^2 + \xi'\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1}\mathbf{r}]}, \qquad (80)$$

где $\mathbf{a}$ — тензор, диагональный в системе главных осей эллипсоида с поверхностью S_1, главными компонентами которого являются полуоси поверхности S_1 $a_k^{(1)}$, $k = 1, 2, 3$; величина ξ' неявным образом определяется из уравнения

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{a}^2 + \xi'\boldsymbol{\varepsilon}_m)^{-1}\mathbf{r} = 1. \qquad (81)$$

Тензор $\mathbf{a}^2$ — обратный к тензору $\mathbf{S}_1$ квадратичной формы поверхности-эллипсоида S_1, поэтому он преобразуется как дважды контравариантный при замене системы координат, и после преобразования координат (7) он будет иметь диагональный вид

$$\mathbf{a}'^2 = \mathbf{T}_m^{-1}\mathbf{a}^2(\mathbf{T}_m^{-1})^T = \begin{pmatrix} (a_{1'}^{(1)})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a_{2'}^{(1)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a_{3'}^{(1)})^2 \end{pmatrix},$$

так как оси системы координат $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ направлены вдоль осей поверхности-эллипсоида S_1'. В системе $x^{1'}x^{2'}x^{3'}$ уравнение (81) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{r}'^T(\mathbf{a}'^2 + \xi'\mathbf{I})^{-1}\mathbf{r}' = 1,$$

откуда следует, что оно есть уравнение поверхности-эллипсоида, софокусной с S_1', а ξ' — это первая из эллипсоидальных координат ξ', η', ζ', вводимых формулами (31). Преобразуем первое слагаемое в выражении (80) для $\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r})$:

$$\frac{\det(\mathbf{a})}{2}\int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{[\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_m ds}{\sqrt{\det(\mathbf{a}^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m)}} = \frac{\sqrt{\det(\mathbf{T}_m\mathbf{a}'^2\mathbf{T}_m^T)}}{2} \times \int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{[\mathbf{T}_m(\mathbf{a}'^2 + s\mathbf{I})\mathbf{T}_m^T]^{-1}ds}{\sqrt{\det(\mathbf{T}_m(\mathbf{a}'^2 + s\mathbf{I})\mathbf{T}_m^T)}}\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\mathbf{T}_m^T)^{-1}\frac{\det(\mathbf{a}')}{2} \times \int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{[\mathbf{a}'^2 + s\mathbf{I}]^{-1}ds}{\sqrt{\det(\mathbf{a}'^2 + s\mathbf{I}])}}\mathbf{T}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_m = (\mathbf{T}_m^T)^{-1}\mathbf{N}'(\xi')\mathbf{T}_m^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{N}_0'(\xi')\boldsymbol{\varepsilon}_m, \qquad (82)$$

где $\mathbf{N}'(\xi')$ определяется формулами (32)−(34), $\mathbf{N}_0'(\xi')$ — формулой (46). С помощью аналогичных преобразований можно показать, что второе слагаемое в выражении для $\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r})$ приводится к следующей форме:

$$-\det(\mathbf{a}')h_1'^{-2}(R_{\xi'}'^{(1)})^{-1}(\mathbf{r}_{\xi'}' \otimes \mathbf{r}_{\xi'}')_0\boldsymbol{\varepsilon}_m,$$

поэтому для $\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r})$ в итоге имеем выражение

$$\mathbf{S}^{\infty}(\mathbf{r}) = \big[\mathbf{N}_0'(\xi') - \det(\mathbf{a}')h_1'^{-2}(R_{\xi'}'^{(1)})^{-1}(\mathbf{r}_{\xi'}' \otimes \mathbf{r}_{\xi'}')_0\big]\boldsymbol{\varepsilon}_m. \qquad (83)$$

Поскольку $\mathbf{L}_0'^{(1)} = \mathbf{N}_0'(0)$, из (80), (82) сразу вытекает, что

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}_0'^{(1)}\boldsymbol{\varepsilon}_m. \qquad (84)$$

Подставляя (83), (84) в (79), после элементарных преобразований получим выражения, в точности совпадающие с (78) и (45). В [8] приведено выражение для напряженности электрического поля внутри эллипсоида в анизотропной матрице, равносильное (79), (80), но немного отличающееся по форме.

Замечание. Из (82) следует, что тензоры $\mathbf{N}_0'(\xi')$ и $\mathbf{N}_{00}''(\xi'')$, входящие в выражения (44), (45), могут быть записаны в виде

$$\mathbf{N}_0'(\xi') = \frac{\det(\mathbf{a}^{(1)})}{2}\int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{[(\mathbf{a}^{(1)})^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m]^{-1}ds}{\sqrt{\det((\mathbf{a}^{(1)})^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_m)}},$$

$$\mathbf{N}''_{00}(\xi'') = \frac{\det(\mathbf{a}^{(2)})}{2} \int\limits_{\xi''}^{+\infty} \frac{[(\mathbf{a}^{(2)})^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_1]^{-1} ds}{\sqrt{\det((\mathbf{a}^{(2)})^2 + s\boldsymbol{\varepsilon}_1)}},$$

где $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}$ — тензоры с главными компонентами, равными полуосям поверхностей S_1, S_2, а главные оси совпадают с их осями соответственно.

Заключение

Основными результатами настоящей работы являются аналитические выражения для потенциала и напряженности электрического поля в анизотропных матрице, оболочке и ядре включения, представленные формулами (44) и (45) соответственно, выражение для тензора поляризуемости включения — формула (51). Также получены выражения для потенциала и напряженности поля в частном случае задачи, когда оболочка включения — изотропная (формулы (61), (62) и (58) соответственно).

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы при решении задач оценки эффективных характеристик неоднородных сред, например, поликристаллов с учетом межзеренного пространства и композитов с включениями вложенной структуры, а также для учета граничного слоя между включениями и матрицей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 16-08-00262-а и 17-08-01374-а).

Список литературы

[1] *Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1975. Vol. 12. N 8. P. 3368–3373.
[2] *Фокин А.Г.* // УФН. 1996. Т. 166 № 10. С. 1069–1093. [*Fokin A.G.* // Phys. Usp. 1996. Vol. 39. P. 1009–1032.]
[3] *Bruggeman D.A.G.* // Ann. Phys. 1935. Band 24. P. 636–664.
[4] *Апресян Л.А., Власов Д.В., Задорин Д.А., Красовский В.И.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 10–17. DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44011.1841 [*Apresyan L.A., Vlasov D.V., Zadorin D.A., Krasovskii V.I.* // Tech. Phys. 2017. Vol. 62. N 1. P. 6–13.]
[5] *Колесников В.И., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б.* // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 280–284. DOI: 10.7868/S0869565217270081 [*Kolesnikov V.I., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B.* // Dokl. Phys. 2017. Vol. 62. N 9. P. 415–419.] DOI: 10.1134/S1028335817090087]
[6] *Лавров И.В., Яковлев В.Б.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 7. С. 963–972. DOI: 10.21883/JTF.2017.07.44663.1964 [*Lavrov I.V., Yakovlev V.B.* // Tech. Phys. 2017. Vol. 62. N 7. P. 979–988.]
[7] *Giordano S., Palla P.L.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2008. Vol. 41. P. 415205. DOI:10.1088/1751-8113/41/41/415205
[8] *Sihvola A.* Electromagnetic Mixing Formulas and Applications. The Institution of Electrical Engineers, London, 1999.
[9] *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с. [*Bohren C., Huffman D.R.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Wiley, NY., 1983.]
[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с. [*Landau L.D., Lifshitz E.M.* Electrodynamics of Continuous Media. Butterworth–Heinemann, 1984.]
[11] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 539 с. [*Stratton J.A.* Electromagnetic Theory. McGraw–Hill, 1941.]
[12] *Апресян Л.А., Власов Д.В.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 12. С. 23–28. [*Apresyan L.A., Vlasov D.V.* // Tech. Phys. 2014. Vol. 59. N 12. P. 1760–1765.]
[13] *Лерман Л.Б.* // Химия, физика и технология поверхности. 2008. Вып. 14. С. 91–100.
[14] *Ораевский А.А., Ораевский А.Н.* // Квантовая электроника. 2002. Т. 32. № 1. С. 79–82. [*Oraevsky A.A., Oraevsky A.N.* // Quant. Electr. 2002. Vol. 32. N 1. P. 79–82.]
[15] *Лавров И.В.* // Фундам. пробл. радиоэлектрон. приборостроения. 2013. Т. 13. № 1. С. 44–47.