

## Нелинейная динамика параметрических осцилляций поляритонов в микрорезонаторе

© О.Ф. Васильева<sup>1</sup>, А.П. Зинган<sup>1</sup>, П.И. Хаджи<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,  
МД 3300 Тирасполь, Молдова

<sup>2</sup> Институт прикладной физики АН Молдовы,  
МД 2800 Кишинев, Молдова

e-mail: florina\_of@mail.ru

Поступила в редакцию 26.03.2018 г.

В окончательной редакции 16.04.2018 г.

Изучена динамика поляритонов в микрорезонаторе в режиме параметрического осциллятора, когда два поляритона накачки превращаются в поляритоны сигнальной и холостой мод и обратно. При этом накачка осуществляется двумя лазерами с близкими частотами. Получены аналитические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Найдены периодические и апериодические режимы превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод.

DOI: 10.21883/OS.2018.09.46562.87-18

### Введение

Смешанные экситон-фотонные состояния в плоских полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами в активном слое представляют собой новый класс квазидвумерных квазичастиц с уникальными свойствами [1–13]. Такие состояния называют микрорезонаторными экситон-поляритонами. Они возникают благодаря сильной связи экситонов с собственными модами электромагнитного излучения микрорезонатора. В условиях сильной связи экситонная и фотонная моды расталкиваются и возникают верхняя и нижняя микрорезонаторные поляритонные моды. Экситонная компонента поляритона отвечает за эффективное поляритон-поляритонное взаимодействие, благодаря чему они могут рассеиваться друг на друге, а фотонная компонента обуславливает его малую эффективную массу. Непараболичность нижней поляритонной ветви допускает возникновение параметрического процесса, в результате которого два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды с сохранением энергии и импульса. Поэтому огромный интерес вызывает поляритон-поляритонное рассеяние, благодаря которому экситон-поляритонная система демонстрирует сильно нелинейные свойства [6–13]. Такие нелинейности были обнаружены в спектрах люминесценции микрорезонаторов [14–18] при резонансном возбуждении нижней поляритонной ветви, которые объяснялись четырехволновым смешением или параметрическим рассеянием фотовозбужденных поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды. Экспериментально идентифицированы два механизма нелинейности — поляритонное параметрическое рассеяние [6,19,20] и голубой сдвиг поляритонной дисперсии [2,5]. С использованием pump-probe-метода в [8,9] впервые наблюдалось параметрическое усиление в микрорезонаторе при возбуждении нижней поляритонной

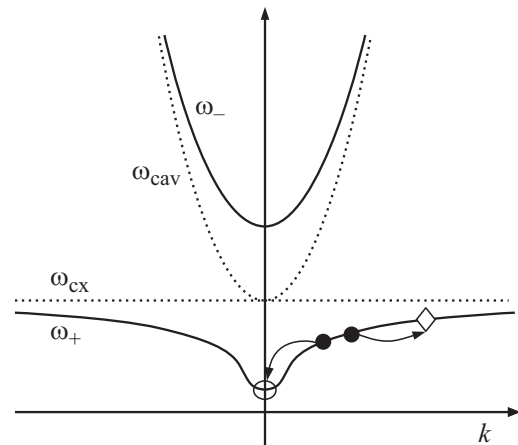
ветви пикосекундным импульсом накачки под углом падения  $16.5^\circ$ . После возбуждения (с небольшой задержкой) нижней поляритонной ветви дополнительно слабым пробным импульсом, падавшим нормально, обнаружилось, что этот импульс в отражении усиливался более чем в 70 раз. При этом появлялась также холостая мода под углом в  $35^\circ$ . Именно для этих углов выполнялись резонансные условия. Результаты экспериментов [8,9] были воспроизведены также в [21] и моделировались в [7] с использованием механизма поляритон-поляритонного рассеяния. Аналогичные процессы наблюдались в [22] при использовании двух пучков накачки под углами в  $\pm 45^\circ$  и пробного пучка под углом  $0^\circ$ . Режим параметрического осциллятора наблюдался в [9,14] при непрерывном возбуждении нижней поляритонной ветви излучением накачки под „магическим“ углом в  $16^\circ$  без пробного импульса. Выше пороговой интенсивности наблюдались сильные пучки сигнальной и холостой мод под углами  $0^\circ$  и  $35^\circ$  соответственно. В [20] обнаружена сильная и необычная зависимость поляризации света, излучаемого микрорезонатором, от поляризации накачки. Эта зависимость интерпретируется с использованием псевдоспиновой модели в рамках квазиклассического формализма, где параметрическое рассеяние описывается как резонансное четырехволновое смешение. В [23–25] наблюдалось бистабильное пропускание излучения в зависимости от интенсивности накачки при возбуждении экситон-поляритонов в микрорезонаторе. Отметим, что процесс параметрического рассеяния наблюдался как при импульсном [20,26], так и при непрерывном [14,16,27] возбуждениях.

Описание поляритонных параметрических осцилляторов и усилителей представлено в ряде работ [2,5,7,8,12–14,17,18,28–31]. В [5] выведены квантовые кинетические уравнения, описывающие систему взаимодействующую

ших поляритонов, которые затем применялись для изучения динамики поляритонных параметрических осцилляторов. В [7] в рамках трехуровневой модели изучались динамика волны накачки, а также сигнальной и холостой мод, которые считались когерентными и макрозаполненными. В [5] это рассмотрение было расширено на случай учета флуктуаций полей. Полуклассическое рассмотрение базировалось на тех же методах, которые были использованы при исследовании явления четырехволнового смешения. Поляритон-поляритонные взаимодействия при этом приводили к нелинейностям третьего порядка в уравнениях Максвелла–Блоха. Этот метод приводит к системе уравнений, подобной полученной в [7]. Для исследования свойств поляритонного осциллятора в [1,4,5] развит гиперспиновый формализм. Введение гиперспина позволило авторам получить квазиклассическое решение уравнений и показать, что вероятность распределения компонент гиперспина подчиняется уравнению Лиувилля. Показано также, что плотности поляритонов в сигнальной и холостой модах, осциллируя, затухают во времени. Отметим также, что в [32] теоретически анализируются явления типа джозефсон-эффекта для экситон-поляритонных конденсатов с учетом спиновых степеней свободы. Когерентные осцилляции населенности и фазы экситон-поляритонов в микрорезонаторе (бозонный эффект Джозефсона) наблюдались экспериментально в [33].

## Постановка задачи. Основные уравнения

Цель настоящей работы — изучить изменение во времени плотности поляритонов при накачке нижней ветви в двух близких по энергии точках закона дисперсии. В [34–38] при исследовании свойств оптического параметрического осциллятора использовались два одинаковых фотона накачки на нижней ветви поляритонного закона дисперсии. Однако в [39,40] было показано, что два различных пучка накачки можно конвертировать в два вырожденных пучка на частоте фотонов сигнальной и холостой мод. Наличие двух различных пучков накачки дает большие возможности для генерации сигнального и холостого пучков с наперед заданными свойствами. Поэтому далее будем считать, что оба пучка накачки различаются по амплитуде (интенсивности), однако энергии фотонов различаются слабо. В этом случае возможны дополнительные режимы, например режим заданной плотности фотонов одного из пучков. Рассматриваем ситуацию на временах порядка либо меньших времени релаксации возбуждений среды. Мы считаем, что с помощью ультракоротких импульсов резонансного лазерного излучения в микрорезонаторе создается система когерентных экситон-поляритонов. Микрорезонатор обеспечивает пространственное ограничение области существования поляритонов, которые взаимно превращаются друг в друга. Квантовая яма,



**Рис. 1.** Энергии поляритонов верхней и нижней ветвей ( $\omega_{\pm}$ ). Дисперсия собственных частот микрорезонатора  $\omega_{\text{cav}}$  и экситона  $\omega_{\text{ex}}$ . Два поляритона накачки рассеиваются в сигнальную и холостую моды.

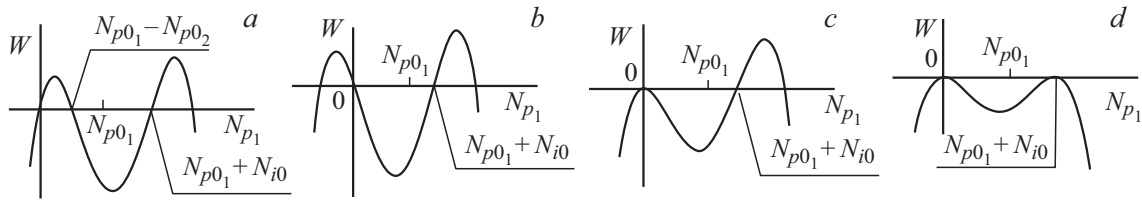
в которой возникают поляритоны, вставляется в брэгговскую структуру, которая характеризуется определенным пропусканием, отражением и потерями [8,9,12,15,27]. Особенности эволюции системы будут проявляться в генерации либо вторичных субимпульсов, либо периодического излучения на частотах экситон-поляритонов.

Ниже рассматриваем ситуацию, когда поляритоны возбуждаются на нижней ветви закона дисперсии под „магическим“ углом (рис. 1). В [4,5] показано, что процесс параметрического рассеяния двух поляритонов накачки в сигнальную и холостую моды описывается гамильтонианом вида

$$\frac{1}{\hbar} H = \omega_{p_1} \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_1} + \omega_{p_2} \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_2} + \omega_s \hat{a}_s^+ \hat{a}_s + \omega_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i + \mu (\hat{a}_s^+ \hat{a}_i^+ \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_s \hat{a}_i), \quad (1)$$

где  $\omega_{p_1}$ ,  $\omega_{p_2}$ ,  $\omega_s$  и  $\omega_i$  — собственные частоты поляритонов накачки, сигнальной и холостой мод соответственно,  $\hat{a}_{p_1}$ ,  $\hat{a}_{p_2}$ ,  $\hat{a}_s$ ,  $\hat{a}_i$  — операторы уничтожения поляритонов,  $\mu$  — константа параметрической поляритон-поляритонной конверсии. Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов  $\hat{a}_{p_1}$ ,  $\hat{a}_{p_2}$ ,  $\hat{a}_s$ ,  $\hat{a}_i$ . Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation), применимость которого обоснована в [41], в условиях точного резонанса ( $\omega_{p_1} + \omega_{p_2} - \omega_s - \omega_i = 0$ ) для комплексных амплитуд поляритонов  $a_{p_1} = \langle \hat{a}_{p_1} \rangle$ ,  $a_{p_2} = \langle \hat{a}_{p_2} \rangle$ ,  $a_s = \langle \hat{a}_s \rangle$  и  $a_i = \langle \hat{a}_i \rangle$  можно получить следующую систему нелинейных эволюционных уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{p_1} &= \mu a_{p_2}^* a_s a_i, & i\dot{a}_{p_2} &= \mu a_{p_1}^* a_s a_i, \\ i\dot{a}_s &= \mu a_{p_1} a_{p_2} a_i^*, & i\dot{a}_i &= \mu a_{p_1} a_{p_2} a_s^*. \end{aligned} \quad (2)$$



**Рис. 2.** Зависимость потенциальной энергии  $W$  от нормированной плотности поляритонов накачки  $N_{p1}$  при различных соотношениях между начальными плотностями поляритонов: (a)  $N_{p01} > N_{p02}$ , (b)  $N_{p01} < N_{p02}$ , (c)  $N_{p01} = N_{p02}$ , (d)  $N_{p01} = N_{p02}$  и  $N_{s0} = N_{i0}$ .

Решения уравнений (2) ищем в виде

$$a_{p1} = A_{p1} \exp(i\varphi_{p1}), \quad a_{p2} = A_{p2} \exp(i\varphi_{p2}),$$

$$a_s = A_s \exp(i\varphi_s), \quad a_i = A_i \exp(i\varphi_i),$$

где  $A_{p1}, A_{p2}, A_s, A_i$  и  $\varphi_{p1}, \varphi_{p2}, \varphi_s, \varphi_i$  — действительные амплитуды и фазы соответствующих поляритонных состояний. В результате для амплитуд и разности фаз  $\theta = \varphi_{p1} + \varphi_{p2} - \varphi_s - \varphi_i$  получаем систему нелинейных эволюционных уравнений:

$$\dot{A}_{p1} = -\mu A_{p2} A_s A_i \sin \theta, \quad \dot{A}_{p2} = -\mu A_{p1} A_s A_i \sin \theta,$$

$$\dot{A}_s = \mu A_{p1} A_{p2} A_i \sin \theta, \quad \dot{A}_i = \mu A_{p1} A_{p2} A_s \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = \mu \left( \frac{A_{p1} A_{p2} A_i}{A_s} + \frac{A_{p1} A_{p2} A_s}{A_i} - \frac{A_{p1} A_s A_i}{A_{p2}} - \frac{A_{p2} A_s A_i}{A_{p1}} \right) \cos \theta. \quad (3)$$

Систему уравнений (3) дополним начальными условиями  $A_{p1}|_{t=0} = A_{p01}, A_{p2}|_{t=0} = A_{p02}, A_s|_{t=0} = A_{s0}, A_i|_{t=0} = A_{i0}$  и  $\theta|_{t=0} = \theta_0$ .

Из (3) легко получить следующие интегралы движения:

$$A_{p1}^2 - A_{p2}^2 = A_{p01}^2 - A_{p02}^2, \quad A_s^2 - A_i^2 = A_{s0}^2 - A_{i0}^2,$$

$$A_{p1}^2 + A_s^2 = A_{p01}^2 + A_{s0}^2, \quad A_{p2}^2 + A_i^2 = A_{p02}^2 + A_{i0}^2,$$

$$\cos \theta = \frac{A_{p01} A_{p02} A_{s0} A_{i0}}{A_{p1} A_{p2} A_s A_i} \cos \theta_0. \quad (4)$$

Вводя далее плотности поляритонов  $N_{p1} = A_{p1}^2, N_{p2} = A_{p2}^2, N_s = A_s^2, N_i = A_i^2$  и используя полученные интегралы движения, систему уравнений (4) можно привести к одному нелинейному дифференциальному уравнению, описывающему временную эволюцию плотности поляритонов накачки  $N_{p1}$ :

$$\dot{N}_{p1}^2 + W(N_{p1}) = E_0, \quad (5)$$

где

$$W(N_{p1}) = -N_{p1}(N_{p02} - N_{p01} + N_{p1}) \times (N_{s0} + N_{p01} - N_{p1})(N_{i0} + N_{p01} - N_{p1}), \quad (6)$$

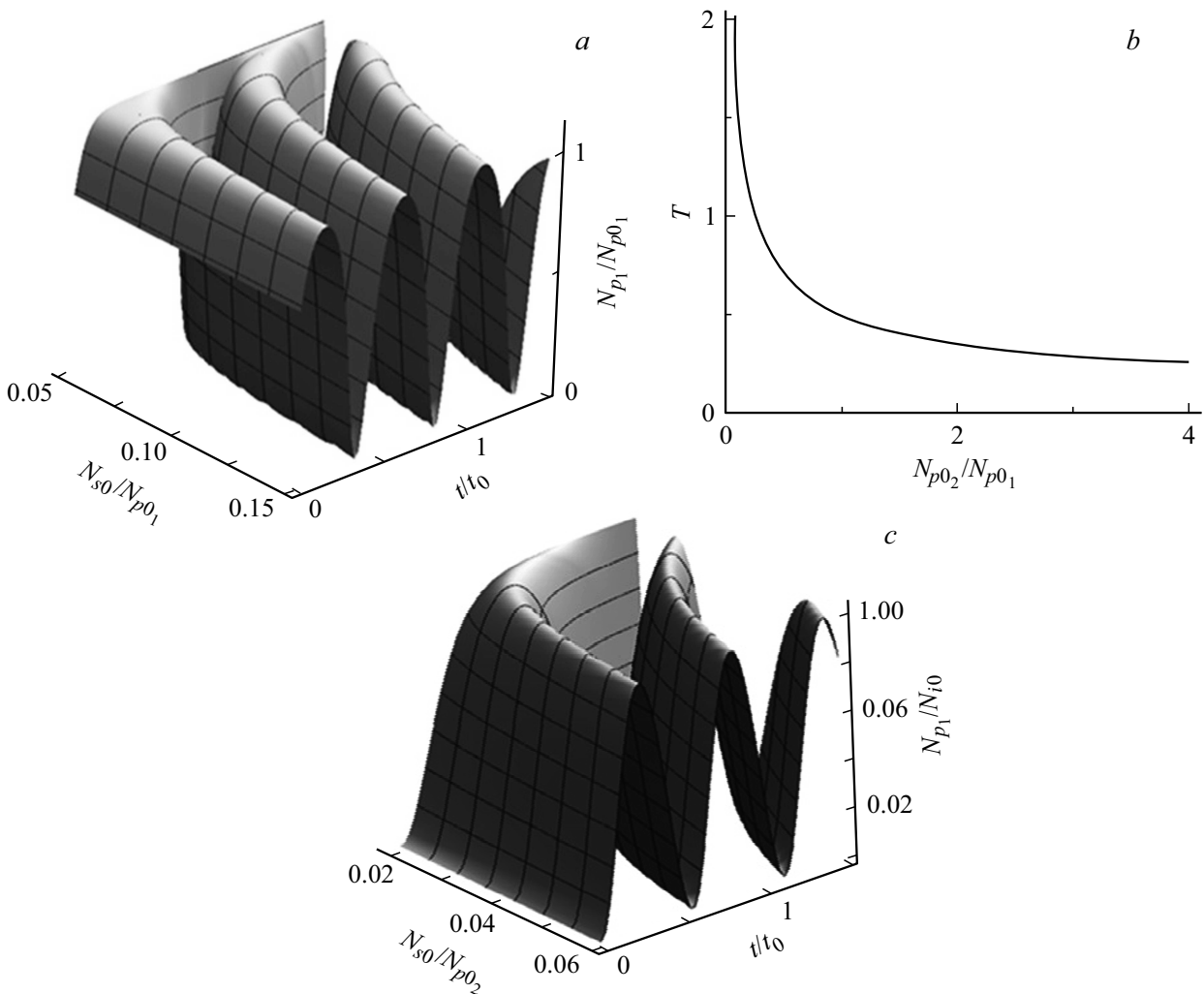
$$E_0 = N_{p01} N_{p02} N_{s0} N_{i0} \cos^2 \theta_0. \quad (7)$$

Здесь  $W(N_{p1})$  играет роль потенциальной энергии,  $\dot{N}_{p1}^2$  — кинетической энергии,  $E_0$  — полной энергии нелинейного осциллятора.

На рис. 2 представлен график зависимости потенциальной энергии нелинейного осциллятора от  $N_{p1}$  при различных соотношениях между начальными плотностями поляритонов. Видно, что при  $N_{p01} \neq N_{p02}$  (рис. 2, a, b) имеет место периодическая эволюция плотностей поляритонов, что и подтверждает исходное предположение о характере эволюции системы под действием двух различных пучков накачки. При  $N_{p01} = N_{p02}$  и  $E_0 = 0$  (рис. 2, c) эволюция системы является аperiodической. То же самое имеет место при дополнительном условии  $N_{s0} = N_{i0}$  (рис. 2, d).

Использование двух накачек открывает дополнительные возможности при исследовании особенностей динамики поляритонов путем существенного увеличения интенсивности одной из накачек по сравнению с другой. Видно, что при  $N_{p02} > N_{p01}$  и  $E_0 = 0$  (рис. 2, b) изображающая точка может перемещаться между двумя точками поворота классической траектории  $N_{p1} = 0$  и  $N_{p1} = N_{p01} + N_{i0}$ , которые являются корнями уравнения  $W(N_{p1}) = 0$ . Следовательно, временная эволюция плотности поляритонов  $N_{p1}(t)$  будет представлять собой нелинейные периодические колебания. При  $N_{p02} = N_{p01}$  (рис. 2, c) левый максимум потенциальной энергии смещается в точку  $N_{p1} = 0$  и уравнение  $W(N_{p1}) = 0$  имеет двукратно вырожденный корень  $N_{p1} = 0$ . В этом случае возможен только аperiodический режим эволюции. Наконец, при  $N_{p01} > N_{p02}$  (рис. 2, a) уравнение  $W(N_{p1}) = 0$  имеет четыре действительных корня. Эволюция системы является периодической. Функция  $N_{p1}(t)$  изменяется в пределах  $N_{p01} - N_{p02} \leq N_{p1}(t) \leq N_{p01} + N_{i0}$  (рис. 2, a). Если  $E_0 \neq 0$ , то при  $N_{p02} \leq N_{p01}$  уравнение  $W(N_{p1}) = E_0$  имеет четыре действительных корня, один из которых является отрицательным и, следовательно, функция  $N_{p1}(t)$  характеризуется нелинейными периодическими осцилляциями. Значения корней уравнения  $W(N_{p1}) = E_0$  определяются начальными условиями. Поэтому необходимо исследовать временную эволюцию системы при различных соотношениях между параметрами  $N_{p01}, N_{p02}, N_{s0}, N_{i0}$  и  $\theta_0$ .

Рассмотрим сначала простой (и наглядный) режим эволюции системы в приближении заданной плотности поляритонов одной из компонент накачки, например,



**Рис. 3.** Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки  $N_{p1}/N_{p01}$  в зависимости от отношения начальных концентраций  $N_{s0}/N_{p01}$ , где  $t_0 = \frac{\mu t}{N_{p01}}$ , при (a)  $N_{p01} \neq 0, N_{p02}/N_{p01} = 3.5$  и  $N_{i0}/N_{p01} = 0.05$ ; (c)  $N_{p01} = 0, N_{i0}/N_{p02} = 0.02$ . (b) Период колебаний  $T$  в зависимости от отношения начальных концентраций  $N_{p02}/N_{p01}$ .

$N_{p02} \gg N_{p01}$ . В этом приближении при  $N_{s0} > N_{i0}$  и  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  получаем следующее решение уравнения:

$$N_{p1} = (N_{p01} + N_{i0})sn^2(\pm\mu\sqrt{N_{p02}(N_{p01} + N_{s0})}t + F(\varphi_0, k)), \tag{8}$$

где модуль  $k$  и параметр  $\varphi_0$  эллиптической функции  $sn(x)$  и  $F(\varphi_0, k)$  [42,43] определяются выражениями

$$k^2 = \frac{N_{p01} + N_{i0}}{N_{p01} + N_{s0}}, \quad \varphi_0 = \arcsin \sqrt{\frac{N_{p01}}{N_{p01} + N_{i0}}}. \tag{9}$$

Отсюда видно, что плотность поляритонов накачки  $N_{p02}$  осциллирует во времени с амплитудой  $A$  и периодом  $T$ , равными

$$A = N_{p01} + N_{i0}, \tag{10}$$

$$T = 2K(k)/\left(\mu\sqrt{N_{p02}(N_{p01} + N_{s0})}\right).$$

С ростом начальной плотности поляритонов  $N_{p02}$  период монотонно убывает (пропорционально  $N_{p02}^{-1/2}$ ) (рис. 3, b). Что касается  $N_{p1}$ , т.е. меньшей из двух плотностей накачки, то с ростом  $N_{p01}$  амплитуда колебаний функции  $N_{p1}(t)$  линейно растет, период колебаний монотонно убывает, а при  $N_{p02} \rightarrow N_{p01}$  эволюция становится аperiодической. За период плотность поляритонов изменяется от нуля до  $N_{p01} + N_{i0}$ . Таким образом, меньшая из накачек полностью истощается, преобразуясь в поляритоны сигнальной и холостой мод (рис. 3, a). В пределе  $N_{p02} \gg N_{p01}$ , полагая (одна из накачек в начальный момент времени отсутствует), получаем

$$N_{p1} = N_{i0}sn^2\left(\mu\sqrt{N_{p02}N_{s0}t}\right), \tag{11}$$

$$k^2 = N_{i0}/N_{s0}.$$

Из (11) видно, что большая из плотностей накачки определяет период колебаний, а меньшая — амплитуду.

С ростом  $N_{p_1}(t)$  период колебаний функции  $N_{p_1}(t)$  убывает, а амплитуда колебаний  $N_{i0}$  сохраняется (рис. 3, *c*).

Если начальные плотности сигнальной и холостой мод одинаковы ( $N_{s0} = N_{i0}$ ), то решение (8) принимает вид

$$N_{p_1} = (N_{p0_1} + N_{i0}) \times \left( \frac{\sqrt{N_{p0_1}} \pm \sqrt{N_{p0_1} + N_{i0}} \operatorname{th} \left( \mu t \sqrt{N_{p0_2}(N_{p0_1} + N_{i0})} \right)}{\sqrt{N_{p0_1} + N_{i0}} \pm \sqrt{N_{p0_1}} \operatorname{th} \left( \mu t \sqrt{N_{p0_2}(N_{p0_1} + N_{i0})} \right)} \right)^2. \quad (12)$$

Из (12) и рис. 4 видно, что решение со знаком (+) монотонно растет со временем от значения  $N_{p_1} = N_{p0_2}$ , асимптотически стремясь к предельному значению  $N_{p_1} = N_{p0_1} + N_{i0}$ . Следовательно, поляритоны сигнальной и холостой мод за время эволюции полностью превращаются в поляритоны накачки, чем эволюция и завершается. Решение со знаком (-) сначала монотонно убывает со временем, обращается в нуль в момент времени

$$t = t_1 = \operatorname{arth} \sqrt{\frac{N_{p0_1}}{N_{p0_1} + N_{i0}}} / \left( \mu \sqrt{N_{p0_2}(N_{p0_1} + N_{i0})} \right),$$

после чего начинает расти и асимптотически стремится к тому же предельному значению  $N_{p0_1} + N_{i0}$ . Таким образом, на больших временах ( $t \gg 1/(\mu \sqrt{N_{p0_2}(N_{p0_1} + N_{i0})})$ ) решения со знаком (+) и со знаком (-) для плотности поляритонов  $N_{p_1}$  асимптотически стремятся к предельному значению  $N_{p0_1} + N_{i0}$  (рис. 4).

Если рассматривать случай  $N_{p0_2} > N_{p0_1}$  и  $N_{s0} > N_{i0}$ , то решение уравнения (5) запишется в виде

$$N_{p_1} = \frac{(N_{p0_1} - N_{p0_2})(N_{p0_1} + N_{i0})}{N_{p0_2} - N_{p0_1} - (N_{p0_2} + N_{i0}) \times s n^2 \left( \pm \sqrt{(N_{p0_1} + N_{s0})(N_{p0_2} + N_{i0})} \mu t + F(\varphi_0, k) \right)}, \quad (13)$$

где величины  $k$  и  $\varphi$  выражаются формулами

$$k^2 = \frac{(N_{p0_2} + N_{s0})(N_{p0_1} + N_{i0})}{(N_{p0_1} + N_{s0})(N_{p0_2} + N_{i0})},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(N_{p0_2} + N_{i0})N_{p0_1}}{(N_{p0_1} + N_{i0})N_{p0_2}}}. \quad (14)$$

Период  $T$  колебаний плотности поляритонов накачки выражается формулой

$$T = 2K(k) / (\mu \sqrt{(N_{p0_1} + N_{s0})(N_{p0_2} + N_{i0})}), \quad (15)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл [42,43]. Эволюция системы в этом случае является периодической и плотность поляритонов накачки изменяется в пределах  $0 < N_{p0_1} < N_{p0_1} + N_{i0}$ .

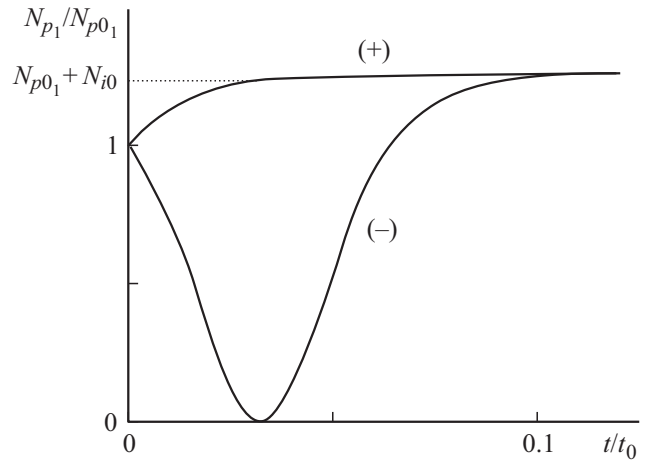


Рис. 4. Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки  $N_{p_1}/N_{p0_1}$  при  $N_{i0}/N_{p-1} = N_{s0}/N_{p0_1} = 0.025$ ,  $t_0 = \frac{\mu t}{N_{p0_2}}$ .

Теперь рассмотрим эволюцию системы в случае, когда в начальный момент времени  $N_{p0_1} > N_{p0_2}$  и определены ради  $N_{s0} < N_{i0}$ . Решение уравнения (5) получаем в виде

$$N_{p_1} = \frac{(N_{p0_1} - N_{p0_2})(N_{p0_1} + N_{i0})}{N_{p0_1} - N_{p0_2} - (N_{p0_2} + N_{i0}) \times s n^2 \left( \pm \sqrt{(N_{p0_2} + N_{s0})(N_{p0_1} + N_{i0})} \mu t + F(\varphi_0, k) \right)}, \quad (16)$$

где величины  $k$  и  $\varphi_0$  выражаются формулами

$$k^2 = \frac{(N_{p0_1} + N_{s0})(N_{p0_2} + N_{i0})}{(N_{p0_2} + N_{s0})(N_{p0_1} + N_{i0})},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{(N_{p0_1} + N_{i0})N_{p0_2}}{(N_{p0_2} + N_{i0})N_{p0_1}}}. \quad (17)$$

Из (16) легко получить период  $T$  колебаний плотности поляритонов накачки:

$$T = 2K(k) / (\mu \sqrt{(N_{p0_2} + N_{s0})(N_{p0_1} + N_{i0})}). \quad (18)$$

В данном случае эволюция системы представляет собой периодическое превращение поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод, и обратно (рис. 5).

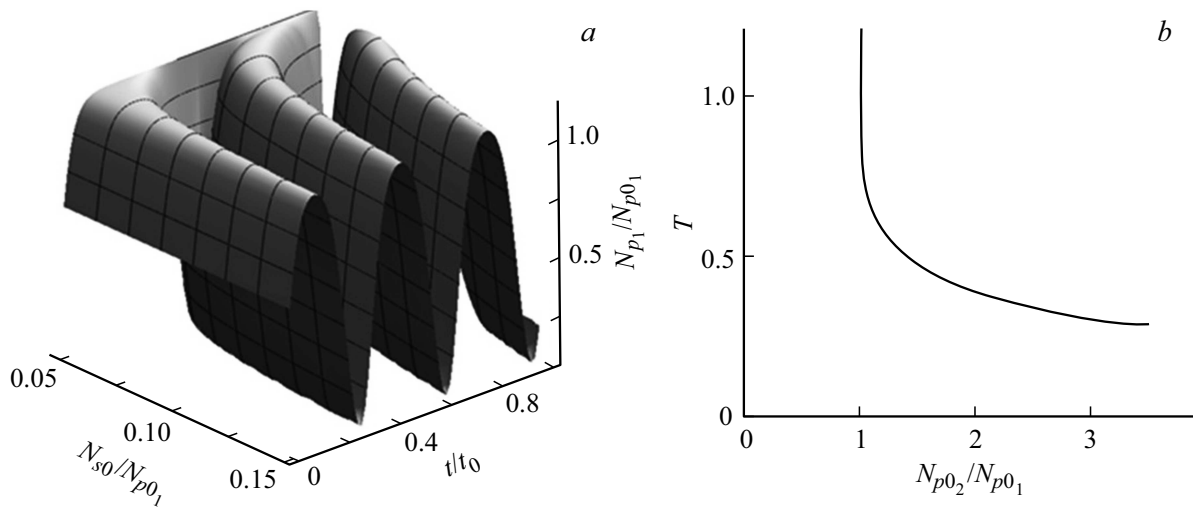
Наконец, если положить  $N_{p0_1} = N_{p0_2}$ , то решение уравнения (5) получается в виде

$$N_{p_1} = \frac{4ab}{C \exp(\pm 2\mu \sqrt{ab}t) + 2(a+b) + \frac{(a-b)^2}{C} \exp(\mp 2\mu \sqrt{ab}t)}, \quad (19)$$

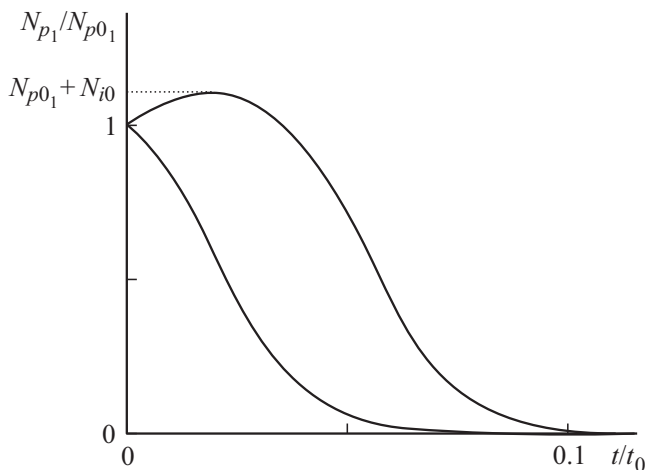
где

$$a = N_{p0_1} + N_{s0}, \quad b = N_{p0_1} + N_{i0},$$

$$C = \frac{(\sqrt{N_{i0}(N_{p0_1} + N_{s0})} + N_{s0}(N_{p0_1} + N_{i0}))}{N_{p0_1}},$$



**Рис. 5.** (а) Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки  $N_{p1}/N_{p01}$  в зависимости от отношения начальных концентраций  $N_{s0}/N_{p01}$  при  $N_{p02}/N_{p01} = 1.2$  и  $N_{i0}/N_{p01} = 0.05$ ,  $t_0 = \frac{\mu t}{N_{p02}}$ ; (б) период колебаний  $T$  в зависимости от отношения начальных концентраций  $N_{p02}/N_{p01}$ .



**Рис. 6.** Временная эволюция нормированной плотности поляритонов накачки  $N_{p1}/N_{p01}$  при  $N_{i0}/N_{p01} = 0.1$ ,  $N_{s0}/N_{p01} = 0.25$ ,  $t_0 = \frac{\mu t}{N_{p02}}$ .

и при  $N_{s0} = N_{i0}$  получаем

$$N_{p1} = \frac{N_{p01}(N_{p01} + N_{s0}) \exp(\pm 2\mu t(N_{p01} + N_{s0}))}{N_{s0} + N_{p01} \exp(\pm 2\mu(N_{p01} + N_{s0}))}. \quad (20)$$

На рис. 6 представлена временная эволюция поляритонов накачки в зависимости от нормированной начальной плотности поляритонов накачки. Видно, что в случае решения со знаком (+) все поляритоны накачки  $N_{p1}$  превращаются в поляритоны сигнальной и холостой мод, чем эволюция и завершается. Что касается решения со знаком (-), то вначале плотность поляритонов накачки  $N_{p1}$  увеличивается, достигая своего максимального значения  $N_{p01} + N_{i0}$ , а затем монотонно уменьшается.

Видно, что на больших временах оба решения ведут себя одинаково. Таким образом, в данном случае получаем аperiодический режим эволюции, сводящийся к тому, что все поляритоны накачки превращаются в поляритоны сигнальной и холостой мод. Скорость изменения плотности поляритонов определяется их начальной концентрацией.

### Заклучение

Таким образом, при накачке нижней поляритонной ветви в двух близких точках возможен преимущественно периодический процесс превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод. Амплитуда и период колебаний плотности поляритонов определяются начальными условиями. Большая из начальных плотностей поляритонов накачки определяет период колебаний, а меньшая — амплитуду. Таким образом, введение двух независимых накачек приводит к увеличению степеней свободы системы. В свою очередь, это приводит к возможности введения двух различных приближений заданной плотности поляритонов накачки и к введению, вообще говоря, процессов трехволнового, а не четырехволнового взаимодействия, а также к более гибкому управлению динамикой параметрических осцилляций с помощью двух накачек  $N_{p01}$  и  $N_{p02}$ . Необходимо отметить, что при накачке нижней поляритонной ветви в одной точке кривой дисперсии в условиях точного резонанса при начальной разности фаз, равной  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ , наблюдался только аperiодический режим эволюции превращения пары поляритонов накачки в поляритоны сигнальной и холостой мод [34–38].

## Список литературы

- [1] Kavokin A.V., Malpuech G. Thin Films and Nanostructures. Cavity polaritons. 2003. 2043 p.
- [2] Deng H., Haug H., Yamamoto Y. // Rev. Mod. Phys. 2010. V. 82. P. 1489.
- [3] Kavokin A. // Appl. Phys. A. 2007. V. 89. P. 241.
- [4] Glazov M.M., Kavokin K.V. // Phys. Rev. B. 2006. V. 73. P. 245317.
- [5] Shelykh I.A., Johne R., Solnyshkov D.D., Kavokin A.V., Gippius N.A., Malpuech G. // Phys. Rev. B. 2007. V. 76. P. 155308.
- [6] Whittaker D.M. // Phys. Rev. B. 2001. V. 63. P. 193305.
- [7] Ciuti C., Schwendimann P., Deveaud B., Quattropani A. // Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. R4825.
- [8] Savvidis P.G., Baumberg J.J., Stevenson R.M., Skolnick M.S., Whittaker D.M., Roberts J.S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1547.
- [9] Baumberg J.J., Savvidis P.G., Stevenson R.M., Tartakovskii A.I., Skolnick M.S., Whittaker D.M., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. R16247.
- [10] Ciuti C. // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. P. 245304.
- [11] Schwendimann P., Ciuti C., Quattropani A. // Phys. Rev. B. 2003. V. 68. P. 165324.
- [12] Savvidis P.G., Baumberg J.J., Porras D., Whittaker D.M., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2002. V. 65. P. 073309.
- [13] Shelykh I.A., Kavokin A.V., Malpuech G. // Phys. St. Sol. B. 2005. V. 242. P. 2271.
- [14] Stevenson R.M., Astratov V.N., Skolnick M.S., Whittaker D.M., Emam-Ismael M., Tartakovskii A.I., Savvidis P.G., Baumberg J.J., Roberts J.S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3680.
- [15] Tartakovskii A.I., Krzhizhanovskii D.N., Malpuech G., Emam-Ismael M., Chernenko A.V., Kavokin A.V., Kulakovskii V.D., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. P. 165302.
- [16] Tartakovskii A.I., Krzhizhanovskii D.N., Kulakovskii V.D. // Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. R13298.
- [17] Ciuti C., Schwendimann P., Deveaud B., Quattropani A. // Phys. Rev. B. 2001. V. 63. P. 041303.
- [18] Savvidis P.G., Ciuti C., Baumberg J.J., Whittaker D.M., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. P. 075311.
- [19] Savona V., Schwendimann P., Quattropani A. // Phys. Rev. B. 2005. V. 71. P. 125315.
- [20] Kavokin A., Lagoudakis P.G., Malpuech G., Baumberg J.J. // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. P. 195321.
- [21] Saba M., Ciuti C., Bloch J., Thierry-Mieg V., Adre R., Dang L.S., Kundermann S., Mura A., Bongiovanni C., Staehli J.E., Deveaud B. // Nature. 2001. V. 414. P. 731.
- [22] Huang R., Tassone F., Yamamoto Y. // Phys. Rev. B. 2000. V. 61. P. R7854.
- [23] Baas A., Karr J.-Ph., Romanelli M., Bramati A., Giacobino E. // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. P. R161307.
- [24] Baas A., Karr J.-Ph., Eleuch H., Giacobino E. // Phys. Rev. A. 2004. V. 69. P. 023819.
- [25] Krizhanovski D.N., Gavrilov S.S., Love A.P.D., Sanvitto D., Gippius N.A., Tikhodeev S.G., Kulakovskii V.D., Whittaker D.M., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2008. V. 77. P. 115336.
- [26] Lagoudakis P.G., Savvidis P.G., Baumberg J.J., Whittaker D.M., Eastham P.R., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2002. V. 65. P. R161310.
- [27] Tartakovskii A.I., Krzhizhanovskii D.N., Kurysh D.A., Kulakovskii V.D., Skolnick M.S., Roberts J.S. // Phys. Rev. B. 2002. V. 65. P. R081308.
- [28] Gippius N.A., Tikhodeev S.G. // J. Phys.: Cond. Matt. 2004. V. 16. P. S3653.
- [29] Agranovich V.M., Litinskaia M., Lidzey D.G. // Phys. St. Sol. B. 2002. V. 234. P. 130.
- [30] Ciuti C. // Phys. Rev. B. 2004. V. 69. P. 245304.
- [31] Oka H., Ishihara H. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 170505.
- [32] Shelykh I.A., Solnyshkov D.D., Pavlovic G., Malpuech G. // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 041302.
- [33] Lagoudakis K.G., Pietka B., Wouters M., Andre R., Deveaud-Pledran B. // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 120403.
- [34] Хаджу П.И., Васильева О.Ф. // Опт. и спектр. 2011. Т. 111. С. 831.
- [35] Хаджу П.И., Васильева О.Ф. // ФТТ. 2011. Т. 53. С. 1216.
- [36] Васильева О.Ф., Хаджу П.И. // Опт. и спектр. 2013. Т. 115. С. 922.
- [37] Khadzhi P.I., Vasilieva O.F. // J. Nanophoton. 2012. V. 6. P. 061805.
- [38] Khadzhi P.I., Vasilieva O.F. // J. Nanoelectron. Optoelectron. 2014. V. 9. P. 1.
- [39] Mc Konstric C.J., Radic S., Raymer M.G. // Opt. Express. 2004. V. 12. P. 5037.
- [40] Okawachi Y., Yu M., Luke K., Carvalho D.O., Ramelow S., Farsi A., Lipson M., Gaeta A.L. // Opt. Lett. 2015. V. 40. P. 5267.
- [41] Путаевский Л.П. // УФН. 1998. Т. 168. С. 641.
- [42] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1100 с.
- [43] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1971. 832 с.