01,13,19

Сила трения и радиационный теплообмен в системе двух параллельных пластин при их относительном движении: следствия теории Левина–Полевого–Рытова

© Г.В. Дедков, А.А. Кясов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
Нальчик, Россия

E-mail: gv_dedkov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 27 февраля 2018 г.
В окончательной редакции 23 мая 2018 г.)

Показано, что фундаментальные результаты, полученные в работах Левина, Полевого, Рытова (1980) и Полевого (1990), базирующиеся на теории электромагнитных флуктуаций Левина и Рытова, адекватно описывают скорость радиационного теплообмена и силу трения в системе двух толстых параллельных пластин, находящихся в относительном движении, в полном согласии с более поздними результатами других авторов. Численные оценки величины силы трения для хороших металлов в приближении Друде оказываются в 10^7 раз выше первоначальной оценки Полевого, причем сила трения возрастает с увеличением проводимости пластин (увеличением времени релаксации электронов при понижении температуры).

DOI: 10.21883/FTT.2018.12.46718.043

1. Введение

Флуктуационно-электромагнитная теория Левина и Рытова [1] является развитием теории Рытова [2]. В [1], спектр электромагнитных флуктуаций нагретого тела на произвольном расстоянии от него выражается через смешанные потери двух точечных дипольных источников, находящихся вблизи тела, которые находятся в результате решения регулярной электродинамической задачи. Это является сущностью обобщенного закона Кирхгофа, представляющего форму флуктуационно-диссипационной теоремы.

В рамках теории [1] были получены выражения для скорости радиационного теплообмена между двумя полубесконечными средами (толстыми пластинами), разделенными плоской вакуумной щелью конечной ширины [3,4], а также диссипативной силы трения, возникающей при латеральном относительном движении одной из пластин [5]. Первый расчет радиационного теплообмена между покоящимися пластинами (в рамках теории [2]) был выполнен Полдером и ван Ховом [6] в более простом случае двух одинаковых пластин и малой разности температур между ними. В отличие от этого, в [3,4] предполагалось, что материалы пластин 1 и 2 характеризуются однородными и изотропными свойствами с диэлектрическим проницаемостями и магнитными восприимчивостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2, являющимися комплексными функциями частоты ω. Кроме того, рассматривался также случай анизотропных сред. Позднее, задача радиационного теплообмена рассматривалась многими авторами, но формула для потока тепловой энергии воспроизводилась, как правило, либо без ссылок на [3,4] (см., например, [7, 8]), либо в другой эквивалентной форме [9,10].

Ситуация с работой [5] сложилась значительно более драматически: в конечных формулах для силы трения в линейном приближении по скорости появилась зависимость $F \propto V/c^3$ (c — скорость света в вакууме), тогда как позже несколько авторов получали линейные по скорости V и не зависящие от c выражения для этой силы (при конечной температуре пластин) [11,12], или зависимость $F \sim V^3$ в квантовом пределе нулевой температуры [13]. Эти противоречия „подлили масла в огонь“ длительной дискуссии относительно величины диссипативной силы, начавшейся еще ранее [14], и не завершенной до сих пор [10–13,15–20] (см. ссылки в [19,20]).

В этой работе мы покажем, что базисные результаты для силы трения и скорости радиационного теплообмена, полученные в [3–5], полностью согласуются со всеми результатами других авторов, полученными позже, тогда как зависимость $F \propto V/c^3$ и очень малая численная величина фрикционного напряжения $10^{-14} N/m^2$, полученная для металлических пластин при комнатной температуре, ширине щели 10 nm и относительной скорости 1 m/s, обусловлена использованным приближением для материальных свойств взаимодействующих тел. Мы провели независимые численные расчеты сил трения для пластин из золота, используя диэлектрическую проницаемость Друде, как в низкочастотном приближении $\varepsilon(\omega) = i4\pi\sigma/\omega$ (σ — фиксированная проводимость, аналогично [5]), так и в общем случае $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)}$ (ω_p и τ — плазменная частота и время релаксации электронов). В обоих случаях полученные значения сил трения выше в 10^7 раз, чем в [5] при тех же условиях. Кроме того, оказывается, что сила трения металлических пластин значительно возрастает при температурах

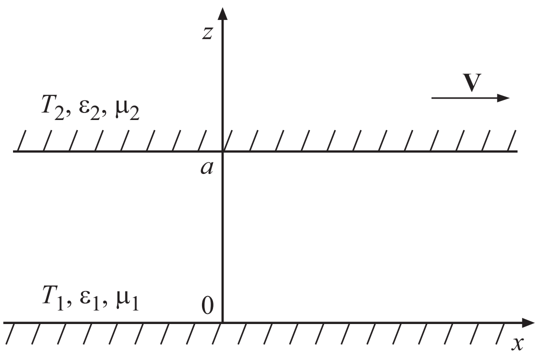

Рис. 1. Конфигурация системы.

$T < 50\,\mathrm{K}$, если зависимость времени релаксации электронов от T определяется законом Блоха-Грюнайзена.

2. Постановка задачи и общее выражение для тангенциальной силы, полученное Полевым

В конфигурации системы, использовавшейся в [5], декартова лабораторная система координат, связанная с пластиной 1 (рис. 1) выбрана так, что ось $z = x_3$ ортогональна границам пластин, ось $x = x_1$, без потери общности, параллельна скорости $\mathbf{V}$ пластины 2, а ось $y = x_2$ (не показанная на рис. 1) ортогональна осям x и z. Температуры пластин считаются постоянными и равными T_1 и T_2 соответственно.

Следуя [5], результирующие плотности сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действующих на единицу площади поверхности пластин 1 и 2, отличаются только знаком: $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = \mathbf{V}F/V$, где F — модуль диссипативной тангенциальной силы, действующей на единицу площади контакта движущейся пластины 2 в лабораторной системе отсчета, связанной с покоящейся пластиной 1. Сила F выражается в терминах потоков тепла P_1 и P_2 от пластин 1 и 2 (на единицу площади), где P_1 находится с помощью вектора Пойнтинга в системе отсчета пластины 1, а тепловой поток P_2 от пластины 2 находится в ее собственной системе покоя

$$F = \frac{1}{V}\,(P_1 + P_2/\gamma). \tag{1}$$

где $\gamma = 1/(1-u^2)^{1/2}$, $u = V/c$. Тепловые потоки P_1 и P_2 определяются выражениями

$$P_1 = \frac{\hbar}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2k\left(\frac{\omega}{|\omega|} - \frac{\tilde{\omega}}{|\tilde{\omega}|}\right)\omega M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u})$$
$$+ \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2k\left[\frac{\Pi(T_1,\omega)}{\omega} - \frac{\Pi(T_2,\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}}\right]\omega M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u}), \tag{2}$$

$$P_2 = -\frac{\hbar}{8\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2k\left(\frac{\omega}{|\omega|} - \frac{\tilde{\omega}}{|\tilde{\omega}|}\right)\tilde{\omega} M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u})$$
$$- \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2k\left[\frac{\Pi(T_1,\omega)}{\omega} - \frac{\Pi(T_2,\tilde{\omega})}{\tilde{\omega}}\right]\tilde{\omega} M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u}), \tag{3}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ — двумерный волновой вектор, параллельный границам щели, $\tilde{\omega} = \gamma(\omega - \mathbf{kV})$, $|\mathbf{V}| = V$, $|\mathbf{u}| = u$, $\Pi(T,\omega) = \hbar|\omega|/\big(\exp(|\omega|/\omega_T) - 1\big)$, $\omega_T = T/\hbar$, T — температура в энергетических единицах, а интегрирование выполняется по всей области изменения волновых векторов. Функция $M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u})$ имеет вид

$$M = \frac{4|q|^2}{|Q|^2}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\varepsilon}_2}\right)(1+\beta)|Q_\mu|^2\right.$$
$$\left. + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)(1+\beta)|Q_\varepsilon|^2\right]$$
$$+ \frac{4|q|^2}{|Q|^2}\left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)|\beta||Q_{\mu\varepsilon}|^2\right.$$
$$\left. + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\varepsilon}_2}\right)|\beta||Q_{\varepsilon\mu}|^2\right], \tag{4}$$

где $q_1 = \big(k^2 - (\omega/c)^2\varepsilon_1\mu_1\big)^{1/2}$, $q_2 = \big(k^2 - (\omega/c)^2\varepsilon_2\mu_2\big)^{1/2}$, $q = \big(k^2 - (\omega/c)^2\big)^{1/2}$. Комплексные значения квадратных корней выбираются из условия $\mathrm{Re}\,q_{1,2} > 0$, а параметр β определяется соотношением

$$\beta = \frac{\gamma^2 u^2 q^2 k_\perp^2}{k^2\tilde{k}^2}. \tag{5}$$

В (5), кроме того, $k_\perp^2 = \left[\mathbf{k} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{ku})}{u^2}\right]^2$ и $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} + (\gamma-1)\,\frac{\mathbf{u}(\mathbf{ku})}{u^2} - \gamma k\mathbf{u}$ ($\tilde{\mathbf{k}}$ — волновой вектор в системе покоя пластины 2), а значок „тильда“ означает, что соответствующие величины, зависящие от ω и k берутся при $\tilde{\omega}$ и $\tilde{k}$. Величины Q_ε, Q_μ, $Q_{\varepsilon\mu}$, $Q_{\mu\varepsilon}$, Q в (4) имеют вид (a — ширина щели)

$$Q_\varepsilon = (q + q_1/\varepsilon_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\varepsilon}_2)\exp(qa)$$
$$- (q - q_1/\varepsilon_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\varepsilon}_2)\exp(-qa), \tag{6}$$

$$Q_\mu = (q + q_1/\mu_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)\exp(qa)$$
$$- (q - q_1/\mu_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)\exp(-qa), \tag{7}$$

$$Q_{\varepsilon\mu} = (q + q_1/\varepsilon_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)\exp(qa)$$
$$- (q - q_1/\varepsilon_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\mu}_2)\exp(-qa), \tag{8}$$

$$Q_{\mu\varepsilon} = (q + q_1/\mu_1)(q + \tilde{q}_2/\tilde{\varepsilon}_2)\exp(qa)$$
$$- (q - q_1/\mu_1)(q - \tilde{q}_2/\tilde{\varepsilon}_2)\exp(-qa), \tag{9}$$

$$Q = Q_\varepsilon Q_\mu - 4\beta k^2\tilde{\mu}_2(1 - (\varepsilon_1\mu_1)^{-1})(1 - (\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\mu}_2)^{-1}). \tag{10}$$

Мы сохранили все обозначения, использовавшиеся в [5], с единственной заменой κ, $\kappa_1\kappa_2 \to \mathbf{k}$, k_1, k_2.

3. Преобразование общей формулы при $u = V/c \ll 1$

В случае $u = V/c \ll 1$ мы имеем $\beta = 0$, $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$, и с учетом (10) формула (4) сводится к

$$M = 4|q|^2\left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2}\right)|Q_\varepsilon|^{-2} + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\mu_2}\right)|Q_\mu|^{-2}\right]. \quad (11)$$

Используя (11) и тождество

$$4\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2}\right) \equiv -\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}-\frac{q_1^*}{\varepsilon_1^*}\right)\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2}-\frac{\tilde q_2^*}{\tilde\varepsilon_2^*}\right), \quad (12)$$

а также аналогичное тождество с перестановками $\varepsilon_1 \leftrightarrow \mu_1$, $\tilde\varepsilon_2 \leftrightarrow \tilde\mu_2$ формула (2) для P_1 сводится (при $V = 0$) к формуле (6) в [3] для спектральной плотности потока энергии теплового поля (поскольку $\tilde q_2 = q_2$, $\tilde\varepsilon_2 = \varepsilon_2$). В этом случае $P_1 = -P_2$, $|P_1| = |P_2|$, а разный знак у этих величин обусловлен разным направлением потока тепловой энергии относительно пластин.

При $V \neq 0$, используя (6), выражение для $|Q_\varepsilon|^{-2}$ приводится к виду

$$|Q_\varepsilon|^{-2} = |\varepsilon_1 q + q_1|^{-2}|q\tilde\varepsilon_2 + \tilde q_2|^{-2} \times |1 - \Delta_{1e}\tilde\Delta_{2e}\exp(-2qa)|^{-2}|\varepsilon_1|^2|\tilde\varepsilon_2|^2|\exp(-2qa)|, \quad (13)$$

где

$$\Delta_{1e} = \frac{\varepsilon_1 q - q_1}{\varepsilon_1 q + q_1}, \quad \tilde\Delta_{2e} = \frac{\tilde\varepsilon_2 q - \tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2 q - \tilde q_2}.$$

Для $|Q_\mu|^{-2}$ получается такое же выражение, как и для $|Q_\varepsilon|^{-2}$ с учетом очевидных замен $\varepsilon_1 \leftrightarrow \mu_1$, $\tilde\varepsilon_2 \leftrightarrow \tilde\mu_2$, $\Delta_{1e} \to \Delta_{1m}$, $\tilde\Delta_{2e} \to \tilde\Delta_{2m}$.

Интегралы в (2) и (3) содержат вклады от неоднородных волн $(k > \omega/c)$ и от бегущих волн $k \le \omega/c$. При $k > \omega/c$ имеем $q = |q|$, $|\exp(-2qa)| = \exp(-2qa)$, и (12) принимает вид

$$\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}-\frac{q_1^*}{\varepsilon_1^*}\right)\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2}-\frac{\tilde q_2^*}{\tilde\varepsilon_2^*}\right) = -\frac{\mathrm{Im}\Delta_{1e}\mathrm{Im}\tilde\Delta_{2e}}{|q|^2|\varepsilon_1|^2|\tilde\varepsilon_2|^2}|\varepsilon_1 q + q_1|^2|\tilde\varepsilon_2 q + \tilde q_2|^2. \quad (14)$$

При $k \le \omega/c$ соответственно $q = -i|q|$, $|\exp(-2qa)| = 1$ и

$$\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}-\frac{q_1^*}{\varepsilon_1^*}\right)\left(\frac{\tilde q_2}{\tilde\varepsilon_2}-\frac{\tilde q_2^*}{\tilde\varepsilon_2^*}\right) = -\frac{(1-|\Delta_{1e}|^2)(1-|\tilde\Delta_{2e}|^2)}{4|q|^2|\varepsilon_1|^2|\tilde\varepsilon_2|^2}|\varepsilon_1 q + q_1|^2|\tilde\varepsilon_2 q + \tilde q_2|^2. \quad (15)$$

Аналогичные (14), (15) тождества получаются путем замены $\varepsilon_1 \leftrightarrow \mu_1$, $\tilde\varepsilon_2 \leftrightarrow \tilde\mu_2$, $\Delta_{1e} \to \Delta_{1m}$, $\tilde\Delta_{2e} \to \tilde\Delta_{2m}$.

Подставляя (11)–(15) в (1)–(3), и принимая во внимание аналитические свойства функции $M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u})$ [5]

$$M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u}) > 0, \quad \omega\tilde\omega > 0,$$
$$M(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{u}) > 0, \quad \omega\tilde\omega < 0, \quad (16)$$

получим следующее выражение для тангенциальной силы, действующей на движущуюся пластину 2 в лабораторной системе отсчета (отрицательные значения F_x соответствуют диссипативной силе трения)

$$F_x = -\frac{\hbar}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{k>\omega/c} d^2k k_x \exp(-2qa) \times \mathrm{Im}\Delta_{1e}\mathrm{Im}\tilde\Delta_{2e}|D_e|^{-2}[\coth(\hbar\tilde\omega/2T_2) - \coth(\hbar\omega/2T_1)]$$
$$-\frac{\hbar}{16\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{k\le\omega/c} d^2k k_x(1-|\Delta_{1e}|^2)(1-|\tilde\Delta_{2e}|^2)|D_e|^{-2} \times [\coth(\hbar\tilde\omega/2T_2) - \coth(\hbar\omega/2T_1)] + (e \leftrightarrow m), \quad (17)$$

где $|D_e| = |1 - \Delta_{1e}\tilde\Delta_{2e}\exp(-2qa)|$, а слагаемые $(e \leftrightarrow m)$ определяются такими же интегралами с заменами $\varepsilon_1 \leftrightarrow \mu_1$, $\tilde\varepsilon_2 \leftrightarrow \tilde\mu_2$, $\Delta_{1e} \to \Delta_{1m}$, $\tilde\Delta_{2e} \to \tilde\Delta_{2m}$. Подчеркнем еще раз, что в рассматриваемом случае $\tilde\omega = \omega - k_x V$.

Формула (17) полностью включает все результаты других авторов [10–13,16–20] при $u = V/c \ll 1$, полученные в незапаздывающем и запаздывающем пределе. В частности, в пределе $T_1 \to 0$, $T_2 \to 0$ из (17) вытекает формула для силы квантового трения [13,17]

$$F_x = \frac{\hbar}{4\pi^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_y \int\limits_0^\infty dk_x k_x \int\limits_0^{k_x V} d\omega \exp(-2ka)\mathrm{Im}\Delta_{1e} \times \mathrm{Im}\tilde\Delta_{2e}|D_e|^{-2} + (e \leftrightarrow m). \quad (18)$$

В свою очередь, в случае покоящихся пластин $(V = 0)$, формула для результирующего потока энергии теплового поля P_1 от первой пластины (для определенности), принимая во внимание (11)–(16), сводится к [8–10]

$$P_1 = \frac{\hbar}{2\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\omega \int\limits_{k>\omega/c} d^2k \exp(-2qa) \times \mathrm{Im}\Delta_{1e}\mathrm{Im}\Delta_{2e}|D_e|^{-2}[n_1(\omega) - n_2(\omega)]$$
$$+\frac{\hbar}{8\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\omega \int\limits_{k\le\omega/c} d^2k(1-|\Delta_{1e}|^2)(1-|\Delta_{2e}|^2)|D_e|^{-2} \times [n_1(\omega) - n_2(\omega)] + (e \leftrightarrow m), \quad (19)$$

где $n_i(\omega) = 1/\big(\exp(\hbar\omega/T_i) - 1\big)$, $i = 1, 2$.

Другое, более компактное представление для силы трения, получается из (17) с учетом тождеств (13)–(15)

$$F_x = -\frac{\hbar}{4\pi^3}\int_0^\infty d\omega \int d^2k k_x \left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\varepsilon}_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\varepsilon|^2} + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\right]\left[\coth\left(\frac{\hbar\tilde{\omega}}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right]. \quad (20)$$

Заметим, что внутренний интеграл в (20) включает суммарный вклад неоднородных и однородных волн, а также магнитных и электрических составляющих. Формула (20) оказывается более удобной для численных расчетов силы трения металлических пластин. Таким же образом, общее выражение для P_1 (в случае $0 < V/c \ll 1$) можно записать в виде

$$P_1 = \frac{\hbar}{4\pi^3}\int_0^\infty d\omega\omega \int d^2k \left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\varepsilon}_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\varepsilon|^2} + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\tilde{q}_2}{\tilde{\mu}_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\right]\left[\coth\left(\frac{\hbar\tilde{\omega}}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right)\right]. \quad (21)$$

Вполне очевидно, что (21) сводится к (19) при $V = 0$. Таким образом, фундаментальные результаты теории [3–5] (формулы (1)–(10)) полностью включают все результаты других авторов для скорости теплообмена и силы трения в конфигурации двух произвольных полубесконечных сред (толстых пластин) при их относительном движении.

4. Некоторые следствия и частные случаи

В дополнение к формулам (17), (18) и (20), вытекающим из (1)–(3), целесообразно рассмотреть другие известные предельные случаи.

При малых скоростях скольжения и достаточно высокой температуре $T_1 = T_2 = T$, $k_xV/\omega_w \ll 1$ ($\omega_w = T/\hbar$ — частота Вина), тепловой фактор в (17) и (20) принимает вид

$$\coth\left(\frac{\hbar\tilde{\omega}}{2T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2T_1}\right) \approx -2k_xV\frac{dn}{d\omega},$$

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp(\omega/\omega_w) - 1}. \quad (22)$$

С другой стороны, в разложении первого порядка по скорости V, величины со значком „тильда“ в (17) и (20) будут содержать не зависящие от скорости члены, и пропорциональные скорости члены. Поэтому, учитывая вид (20) и (22), приближение первого порядка по скорости для силы трения принимает вид

$$F_x = \frac{\hbar V}{2\pi^2}\int_0^\infty d\omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}\int_0^\infty dk k^3 \left[\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\varepsilon_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\varepsilon|^2} + \mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}\right]. \quad (23)$$

Следует подчеркнуть, что все величины, входящие в $|Q_\varepsilon|^{-2}$ и $|Q_\mu|^{-2}$ (см. (13)) в этом случае не содержат значка „тильда“. В свою очередь, формула (17) запишется в виде

$$F_x = \frac{\hbar V}{2\pi^3}\int_0^\infty d\omega \frac{dn(\omega)}{d\omega}\int_{k>\omega/c} d^2k k_x^2 \exp(-2qa) \times \mathrm{Im}\Delta_{1e}\mathrm{Im}\Delta_{2e}|D_e|^{-2} + \frac{\hbar V}{8\pi^3}\int_0^\infty d\omega\frac{dn(\omega)}{d\omega} \times \int_{k\le\omega/c} d^2k k_x^2 (1-|\Delta_{1e}|^2)(1-|\Delta_{2e}|^2)|D_e|^{-2}(e \leftrightarrow m). \quad (24)$$

В предельном случае абсолютно черных тел, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$, величина подынтегрального выражения в квадратных скобках (23) равна (-2) при $k < \omega/c$ и нулю в противном случае. Последующее вычисление интеграла приводит к результату

$$F_x = -\frac{\pi^2}{60}\frac{\hbar V}{c^4}\left(\frac{T}{\hbar}\right)^4. \quad (25)$$

Такая же формула получается из (24), поскольку $\Delta_{1e} = \Delta_{2e} = \Delta_{1m} = \Delta_{2m} = 0$. При $T = 300\,\mathrm{K}$ и $V = 1\,\mathrm{m/s}$ из формулы (25) следует оценка $F \sim 5\cdot 10^{-15}\,\mathrm{N/m^2}$, не зависящая от ширины щели.

В частном случае $\omega_w a/c \ll 1$ (т.е. $a \ll 7.6\,\mu\mathrm{m}$ при $T = 300\,\mathrm{K}$), используя приближение $(k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2} \approx k$, получим $\Delta_{ie} \approx (\varepsilon_i - 1)/(\varepsilon_i + 1)$ и $\Delta_{im} \approx \frac{\omega^2(\varepsilon_i - 1)}{4k^2c^2}$ $(i = 1, 2)$. Тогда, для диэлектриков и плохих проводников, $\Delta_{im} \approx 0$, а (24) преобразуется к виду

$$F_x \approx \frac{\hbar V}{2\pi^3}\int_0^\infty \frac{dn(\omega)}{d\omega} d\omega \mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 1}\right) \times \int_0^\infty dk k^3 \exp(-2ka)|D_e|^{-2}, \quad (26)$$

где

$$D_e = 1 - \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1 + 1}\right)\left(\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2 + 1}\right)\exp(-2ka). \quad (27)$$

Для контакта проводников с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{1,2} = 1 + i4\sigma_{1,2}/\omega$, при условии $\omega_w/2\pi\sigma \ll 1$

будем иметь $|D_e| \approx 1$, и из (26) следует

$$F_x \approx -\frac{1}{64\pi^2}\frac{(T/\hbar)^2}{\sigma_1\sigma_2}\frac{\hbar V}{a^4}. \quad (28)$$

При $T = 300\,\mathrm{K}$, $V = 1\,\mathrm{m/s}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$ (графит) и $a = 10\,\mathrm{nm}$ формула (28) дает $F \sim 2.6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}$. Причем следует отметить, что величина F_x уменьшается с увеличением проводимости материалов.

Для хорошо проводящих металлов, однако, приведенные выше оценки некорректны, и требуется более точный расчет. В [5], в частности, использовалось импедансное приближение с фактором $(k^2 - \varepsilon_i\mu_i\omega^2)^{1/2} \approx i(\varepsilon_i\mu_i)^{1/2}\omega/c = i\varepsilon_i\xi_i$ (где ξ_i — импеданс). Это в итоге привело к функциональной зависимости $F \sim VT^{7/2}/\sigma^{1/2}a$ при малой ширине щели для немагнитных металлов с $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Соответствующая численная оценка, полученная в [5], составляла $\sim 3 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{N/m^2}$, при $\sigma = 5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}^{-1}$ и тех же других условиях, предполагавшихся выше. Однако, как мы покажем далее, численный расчет с использованием точного фактора $(k^2 - \varepsilon_i\mu_i\omega^2/c^2)^{1/2}$ приводит к значительно более высоким оценкам силы трения.

5. Случай хорошо проводящих немагнитных металлов

Преобразуем формулу (20) к форме, удобной для последующего численного расчета. Сначала рассмотрим случай идентичных металлов $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ с диэлектрической функцией $\varepsilon(\omega) = i4\pi\sigma/\omega$, аналогично [5]. Тогда будем иметь

$$(k^2 - \varepsilon\omega^2/c^2)^{1/2} = \left(k^4 + \frac{(4\pi\sigma\omega)^2}{c^4}\right)^{1/4}\exp(i\phi),$$

$$\phi = -0.5\arctan\left(\frac{4\pi\sigma\omega}{k^2c^2}\right). \quad (29)$$

Чтобы найти вклад от неоднородных мод $k > \omega/c$, введем новые переменные $\omega = \omega_w x$ и $k^2 = (y^2 + \lambda_a^2x^2)/a^2$ ($\lambda_a = \omega_w a/c$), $kdk = ydy/a^2$. Наиболее значительный вклад в интеграл (23) дает второй член в квадратных скобках. Соответствующий ему внутренний интеграл приводится к виду

$$\int\limits_{\omega/c}^{\infty} dkk^3\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2}$$

$$= \frac{1}{4a^4}\int\limits_0^{\infty} dyy^3(y^2 + \lambda_a^2x^2)U_1^2|Q_{\mu1}|^{-2}\sin^2(\phi_1) \equiv \frac{1}{a^4}I_{\mu1}, \quad (30)$$

$$U_1 = [(y^2 + \lambda_a^2x^2)^2 + \lambda^2x^2]^{1/4}, \quad \lambda = \frac{4\pi\sigma\omega_w a^2}{c^2}, \quad (31)$$

$$|Q_{\mu1}|^2 = \left|\left(y^2 + U_1^2\exp(2i\phi_1)\right)\sinh(y) + 2U_1\exp(i\phi_1)\cosh(y)\right|^2, \quad (32)$$

$$\phi_1 = -0.5\arctan\left(\frac{\lambda x}{y^2 + \lambda_a^2x^2}\right). \quad (33)$$

Вклад от однородных мод $k < \omega/c$ для этого слагаемого в (23) находится с помощью замены переменных $\omega = \omega_w x$ и $k^2 = \frac{\omega_w^2}{c^2}(x^2 - y^2)$, $kdk = -ydy\omega_w^2/c^2$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\infty} dkk^3\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\mu_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\mu_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\mu|^2} = \frac{\omega_w^4}{4c^4}$$

$$\times\int\limits_0^{x} dyy^3(x^2 - y^2)U_2^2|Q_{\mu2}|^{-2}\sin^2(\phi_2) \equiv \frac{\omega_w^4}{c^4}I_{\mu2}, \quad (34)$$

$$U_2 = \left((x^2 - y^2)^2 + \tilde{\lambda}^2x^2\right)^{1/4}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{4\pi\sigma}{\omega_w}, \quad (35)$$

$$|Q_{\mu2}|^2 = \left|\left(y^2 + U_2^2\exp(2i\phi_2)\right)\sin(\lambda_a y) - 2yU_2\exp(i\phi_2)\cos(\lambda_a y)\right|^2, \quad (36)$$

$$\phi_2 = -0.5\arctan\left(\frac{\tilde{\lambda}x}{y^2 - y^2}\right). \quad (37)$$

Выполняя такие же замены переменных ω, k в интегралах, соответствующих первому слагаемому в квадратных скобках (23), будем иметь:

а) вклад неоднородных мод

$$\int\limits_{\omega/c}^{\infty} dkk^3\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\varepsilon_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\varepsilon|^2} = \frac{1}{4a^4}\int\limits_0^{\infty} dyy^3$$

$$\times(y^2 + \lambda_a^2x^2)x^2\tilde{\lambda}^{-2}U_1^2|Q_{\varepsilon1}|^{-2}\cos^2(\phi_1) \equiv \frac{1}{a^4}I_{\varepsilon1}, \quad (38)$$

$$|Q_{\varepsilon1}|^2 = \left|\left(y^2 - x^2\tilde{\lambda}^{-2}U_1^2\exp(2i\phi_1)\right)\sinh(y) - i2x\tilde{\lambda}^{-1}yU_1\exp(i\phi_1)\cosh(y)\right|^2. \quad (39)$$

б) вклад однородных мод

$$\int\limits_0^{\omega/c} dkk^3\mathrm{Im}\left(\frac{q_1}{\varepsilon_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{q_2}{\varepsilon_2}\right)\frac{|q|^2}{|Q_\varepsilon|^2} = \frac{\omega_w^4}{4c^4}\int\limits_0^{x} dyy^3$$

$$\times x^2\tilde{\lambda}^{-2}(x^2 - y^2)U_2|Q_{\varepsilon2}|^{-2}\cos 2(\phi_2) \equiv \frac{\omega_w^4}{c^4}I_{\varepsilon2}, \quad (40)$$

$$|Q_{\varepsilon2}|^2 = \left|i\left(y^2 + x^2\tilde{\lambda}^{-2}U_2^2\exp(2i\phi_2)\right)\sin(\lambda_a y) - 2x\tilde{\lambda}^{-1}yU_2\exp(i\phi_2)\cos(\lambda_a y)\right|^2. \quad (41)$$

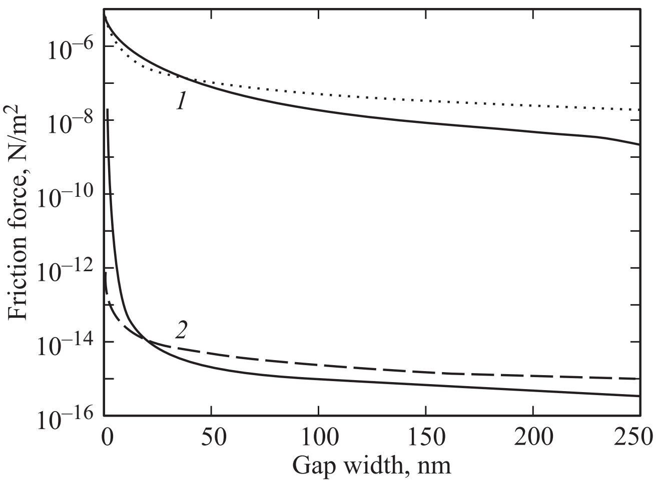

Рис. 2. Сила трения (42) (сплошная линия) и (43) (штриховая линия). Пунктирная кривая — аппроксимация $F \sim 1/a$, сплошные линии *1* и *2* соответствуют слагаемым $I_{\mu1}$ и $I_{\varepsilon1}$. Используемые параметры: $\sigma_1 = \sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}^{-1}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $V = 1\,\mathrm{m/s}$.

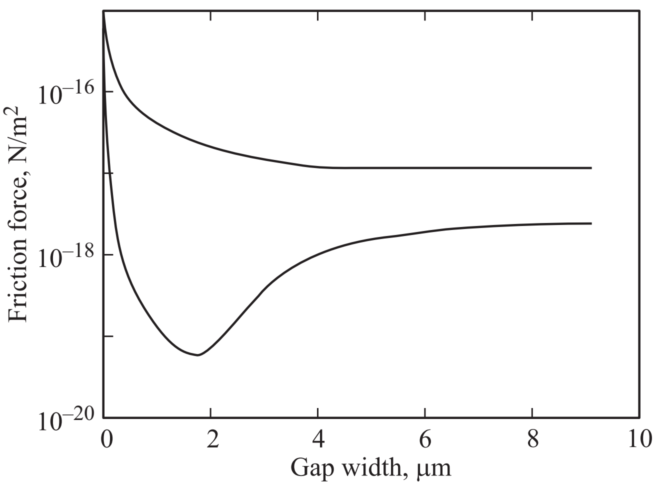

Рис. 3. Вклады в силу трения (42) от однородных мод, связанные со слагаемыми $I_{\varepsilon2}$ (верхняя кривая) и $I_{\mu2}$ (нижняя кривая), $\sigma_1 = \sigma_2 = 5 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s}^{-1}$, $T = 300\,\mathrm{K}$, $V = 1\,\mathrm{m/s}$.

Далее, подставляя (30), (34), (38), (40) в (23), получим

$$F_x = -\frac{\hbar V}{2\pi^2 a^4}\int_0^\infty dx\,\frac{\exp(x)}{(\exp(x)-1)^2} \times \left(I_{\mu1} + I_{\mu2}(\omega_w a/c)^4 + I_{\varepsilon1} + I_{\varepsilon2}(\omega_w a/c)^4\right). \quad (42)$$

Как вытекает из (34), (40) и (42), зависимость силы F_x от ширины щели a для однородных мод значительно слабее, чем для неоднородных, поэтому при малой величине a вкладом неоднородных мод можно пренебречь. В свою очередь, вклады от неоднородных мод будут незначительны при большой ширине щели.

Значения сил F_x на рис. 2, 3, рассчитанные в низкочастотном приближении Друде с фиксированной проводимостью σ, здесь и далее приведены с положительным знаком. Сплошные кривые *1* и *2* на рис. 2 соответствуют слагаемым $I_{\mu1}$ и $I_{\mu2}$ в (42) (т. е. вкладам неоднородных волн). Штриховая кривая показывает импедансное приближение [5], в данном случае

$$F_p = -\frac{105\xi(7/2)}{2^{17/2}\cdot\pi}\,\frac{T^{7/2}}{\sigma^{1/2}\hbar^{5/2}c^3}\,\frac{V}{a}, \quad (43)$$

где $\xi(7/2) = 1.127$ — дзета-функция Римана. Вклады от однородных мод в (42), не показанные на рис. 2, пренебрежимо малы и показаны отдельно на рис. 3. Как следует из рис. 2, сила трения металлических пластин в области нанометровых расстояний оказывается в 10^7 раз выше, чем первоначальная оценка в [5]. В области расстояний $1 \le a \le 30\,\mathrm{nm}$ сила трения убывает с расстоянием несколько медленнее чем $1/a$, но далее наклон зависимости становится ближе к $1/a^2$. Возрастание силы трения при малой ширине зазора физически обусловлено высокими значениями коэффициентов отражения металлических пластин, в результате чего электромагнитные волны, приобретающие допплеровский сдвиг из-за относительного движения пластин, многократно отражаются от них, что, в итоге, и приводит к увеличению силы трения. При этом величина силы трения на 7−8 порядков величины выше, чем в случае абсолютно черных пластин. Кроме того, доминирующий вклад в трение связан с магнитными слагаемыми (42), обусловленными вихревыми токами.

Весьма интересно рассмотреть температурную зависимость F_x, связанную с изменением времени релаксации и проводимости металла при понижении температуры, когда величина $1/\tau$ имеет порядок виновской частоты ω_w. Для этой цели мы провели расчеты с использованием функции Друде общего вида

$$\varepsilon_D(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i/\tau)} = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{\omega\tau(\omega\tau + i)} = 1 - \frac{\kappa_p^2(\kappa_w x - i)}{\kappa_w x(1+\kappa_w^2 x^2)}. \quad (44)$$

Здесь использована параметризация $\kappa_p = \omega_p\tau$, $\kappa_w = \omega_w\tau$, $x = \omega/\omega_w$. Зависимость $\tau(T)$ описывалась формулой Блоха–Грюнайзена [20]

$$\tau^{-1} = 0.0847(T/\theta)^5 \int_0^{T/\theta} \frac{x^5\exp(x)}{(\exp(x)-1)^2}\,dx\ (\mathrm{eV}), \quad (45)$$

где θ — температура Дебая. В расчетах принимались значения $\omega_p = 9.03\,\mathrm{eV}$ и $\theta = 175\,\mathrm{K}$, соответствующие золоту. При вычислении интегралов в (30), (34), (38) и (40) с использованием (44), общая структура формул (30)−(42) не изменяется. Необходимые модификации формул (31), (33), (35) и (37)−(40) приведены в Приложении.

Результаты расчетов силы F_x в зависимости от температуры и расстояния показаны на рис. 4, а на рис. 5 — в зависимости от расстояния и температуры. Кривые *1–3* на рис. 4 соответствуют расстояниям 10, 100, 1000 nm, а кривые *1–3* на рис. 5 — температурам 5, 100 и 300 K. Как видно из рис. 4, сила трения резко возрастает при $T < 50$ K. Вывод о том, что оценка, сделанная в [5] (при $T = 300$ K), занижена в 10^7 раз, остается в силе. Из рис. 4, 5 следует также ошибочность утверждения о том, что сила трения максимальна в случае плохих проводников типа графита [10,13]. Зависимости от ширины щели для различных вкладов в силу F_x при $T = 300$ K демонстрирует рис. 6. Магнитные вклады $I_{\mu 1}, I_{\mu 2}$, от неоднородных и однородных волн показаны толстыми кривыми *1, 2*, а электрические вклады $I_{\varepsilon 1}, I_{\varepsilon 2}$, от неоднородных и однородных волн — тонкими сплошной и пунктирной линиями. При других температурах соотношение различных вкладов качественно не изменяется. Поведение F_x при температурах $T < 1$ K необходимо исследовать более детально в связи с различными механизмами и альтернативными теоретическими моделями для коэффициентов отражения металлов при низких температурах [9,21–24] (см. далее).

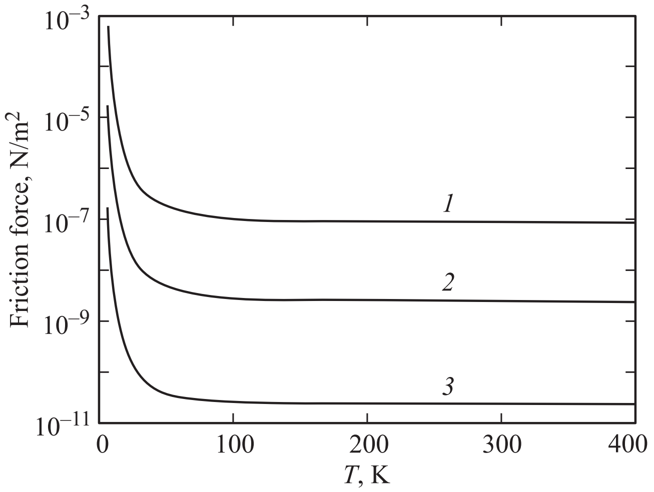

Рис. 4. Сила трения как функция температуры в приближении Друде (44) с учетом зависимости времени релаксации электронов τ от температуры T ($V = 1$ m/s). Кривые *1–3* соответствуют ширине щели $a = 10$, 100, 1000 nm.

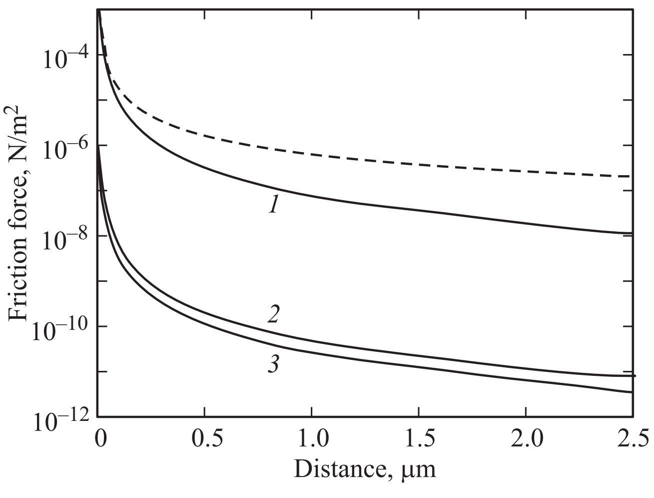

Рис. 5. Сила трения как функция расстояния в приближении Друде (44) с учетом зависимости времени релаксации электоронов τ от температуры T ($V = 1$ m/s). Кривые *1–3* соответствуют температурам 5, 100 и 300 K. Пунктирная кривая — аппроксимация $F_x \sim a^{-1.3}$.

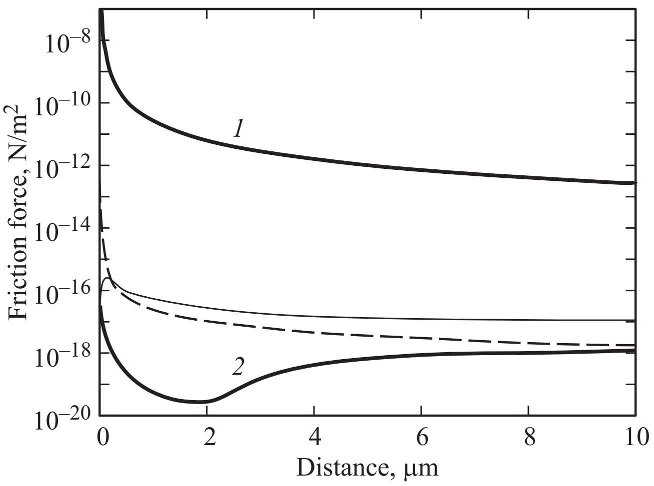

Рис. 6. Различные вклады в силу трения в приближении Друде (44). Сплошные линии *1* и *2* — вклады магнитных ближнепольных и однородных волн, тонкие сплошная и пунктирная линии — вклады электрических ближнепольных и однородных волн ($T = 300$ K, $V = 1$ m/s).

Представляет также интерес сравнить значения сил трения с экспериментальными измерениями диссипативных сил в эксперименте [25], соответствующем геометрии сферического зонда (Au) с радиусом кривизны 1 μm, движущегося над плоской поверхностью слюды, покрытой пленкой золота: $\sim 1.5 \cdot 10^{-13}$ N при $a = 10$ nm, $V = 1$ m/s. Используя локально-плоское приближение Дерягина [26], сила трения в вакуумном контакте сферического тела с пластиной оценивается как $F_{sp} \approx \pi R a F_x(a)$. Из наших расчетов следует $F_x(a) = 1.6$ N/m^2 и $F_{sp} \sim 0.5 \cdot 10^{-13}$ N при тех же условиях и $T = 1$ K, причем зависимость силы F_{sp} от расстояния (см. пунктирную кривую на рис. 5) близка к экспериментальной: $F_{sp} \sim a^{-\alpha}$ при $\alpha = 1.3 \pm 0.3$. Однако в [25] измерения проводились при комнатной температуре, а при понижении температуры до 77 K величина диссипативной силы уменьшалась в шесть раз, т. е. температурная зависимость не согласуется с нашими расчетами в рамках флуктуационно-электромагнитного механизма. В свою очередь, вклад электростатического (из-за наличия пятен заряда на поверхностях) и флуктуационно-электромагнитного трения в этом случае, по оценкам [10], оказывается на восемь порядков величины меньше экспериментальных значений при $T = 300$ K, и еще более уменьшается при понижении температуры из-за возрастания проводимости. Таким образом, вопрос о природе диссипативных сил, измерявшихся в [25], пока остается открытым.

6. Обсуждение и выводы

В п. 3 и 4 мы показали, что фундаментальные выражения для скорости радиационного теплообмена и силы трения двух толстых пластин, разделенных плоской щелью, полученные в работах Левина, Рытова и Полевого, полностью согласуются с результатами других авторов в случае нерелятивистского относительного движения пластин. При этом численный расчет силы трения для хороших металлов приводит к значениям в 10^7 раз выше по сравнению с первоначальной оценкой Полевого (при комнатных температурах). Случай релятивистского движения представляет, главным образом, академический интерес и требует специального анализа. Рассмотрение сил трения для шероховатых поверхностей или поверхностей с наличием пленок не входило в нашу задачу, и, в принципе, может быть выполнено аналогично тому, как это делается при вычислении сил Казимира [21] или в расчетах диссипативных сил [10].

В свою очередь, из результатов расчетов п. 5 следует, что проведение экспериментов по измерению тангенциальной силы ван-дер-ваальсового трения становится вполне реальной задачей при использовании пробных сферических тел с радиусом $50-100\,\mu$m, применявшихся при измерениях сил Казимира [22–24]. Причем сила трения возрастает на несколько порядков величины с увеличением проводимости металлов (при температурах ниже 50 K), если время релаксации электронов в формуле Друде определяется законом Блоха-Грюнайзена. Между тем правомерность использования формулы Друде для описания диэлектрических свойств металлов при низких температурах подвергается критике в связи с ее недостатками при вычислении силы Казимира (см. [22–24] и ссылки). В частности, констатируется, что корректное описание силы Казимира между металлическими пластинами достигается с использованием плазменной модели диэлектрической проницаемости, когда $\tau = \infty$ в формуле Друде (44). В этой связи заметим, что формальное применение плазменной модели при вычислении силы трения приводит к полному обнулению вклада ближнепольных мод в формулах (20), (23) или (42), т. е. наиболее значительного по величине вклада в трение. Тем не менее возрастание силы трения при низких температурах связано именно с увеличением величины τ. С другой стороны, следует иметь в виду, что область частот, вносящих наибольший вклад в силу Казимира, существенно отличается (в большую сторону) от области частот, определяющих силу трения, для которой важны частоты $\omega \ll \omega_w$. Это связано с ролью планковского фактора $1/x^2$ в (42) при $x \ll 1$. Благодаря этому, на наш взгляд, реальный ход силы трения при низких температурах является более сильным индикатором для проверки моделей диэлектрической проницаемости по сравнению с измерениями сил Казимира. В отличие от силы Казимира, для которой можно указать диапазон расстояний, на которых температурный вклад превалирует, сила трения при $T \neq 0$ целиком обусловлена виновскими частотами (т. е. имеет тепловой характер), а квантовая сила трения при $T = 0$ имеет совсем другую зависимость от скорости [13,18–20] и численно на много порядков меньше (при тех же остальных параметрах). В этой связи отсутствие тепловых поправок в экспериментах по измерению сил Казимира [22–24] не дает оснований для аналогии с поведением силы трения. Для последней, как следует из рис. 4, влияние температуры в достаточно широком интервале $50 < T < 400$ K мало и не зависит от расстояния a между пластинами.

Приложение

При вычислении интегралов в (30), (34), (38) и (40) с функцией Друде (44) целесообразно записать $\varepsilon_D(\omega)$ в виде

$$\varepsilon_D(\omega = |\varepsilon| \exp(i\tilde{\phi}), \tag{A1}$$

$$|\varepsilon| = \left[\left(\frac{1+\kappa_w^2 x^2 - \kappa_p^2}{1+\kappa_w^2 x^2}\right)^2 + \frac{\tilde{\lambda}^2}{x^2(1+\kappa_w^2 x^2)^2}\right]^{1/2}, \tag{A2}$$

$$\tilde{\phi} = \arctan\left(\frac{\kappa_p^2}{\kappa_w x(1+\kappa_w^2 x^2 - \kappa_p^2)}\right), \tag{A3}$$

где $\tilde{\lambda} = \kappa_p^2/\kappa_w$. Соответственно, формулы (31), (33), (35), (37)$-$(41) для величин $U_{1,2}$ и $\phi_{1,2}$ приводятся к виду

$$U_1 = \left[\left(y^2 + \frac{\lambda_a^2 \kappa_p^2 x^2}{1+\kappa_w^2 x^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2 x^2}{(1+\kappa_w^2 x^2)^2}\right]^{1/4}, \tag{31a}$$

$$\phi_1 = -0.5 \arctan\left[\frac{\lambda x}{y^2(1+\kappa_w^2 x^2) + \lambda_a^2 \kappa_p^2 x^2}\right], \tag{33a}$$

$$U_2 = \left[\left(-y^2 + \frac{\kappa_p^2 x^2}{1+\kappa_w^2 x^2}\right)^2 + \frac{\tilde{\lambda}^2 x^2}{(1+\kappa_w^2 x^2)^2}\right]^{1/4}, \tag{35a}$$

$$\phi_2 = -0.5 \arctan\left[\frac{\tilde{\lambda} x}{\kappa_p^2 x^2 - y^2(1+\kappa_w^2 x^2)}\right], \tag{37a}$$

$$I_{\varepsilon 1} = \int_0^\infty dy y^3 (y^2 + \lambda_a^2 x^2) U_1^2 |\varepsilon|^{-2} |Q_{\varepsilon 1}|^{-2} \sin^2(\phi_1 - \tilde{\phi}), \tag{38a}$$

$$|Q_{\varepsilon 1}|^2 = \Big| \Big(y^2 + U_1^2 |\varepsilon|^{-2} \exp\big(2i(\phi_1 - \tilde{\phi})\big)\Big) \sinh(y) + 2yU_1|\varepsilon|^{-1} \exp\big(i(\phi_1 - \tilde{\phi})\cosh(y)\big)\Big|^2, \tag{39a}$$

$$I_{\varepsilon 2} = \int_0^x dy y^3 (x^2 - y^2) U_2 |Q_{\varepsilon 2}|^{-2} |\varepsilon|^{-2} \sin^2(\phi_2 - \tilde{\phi}), \tag{40a}$$

$$|Q_{\varepsilon 2}|^2 = \Big| \Big(y^2 + U_1^2 |\varepsilon|^{-2} \exp\big(2i(\phi_1 - \tilde{\phi})\big)\Big) \sin(\lambda_a y) - 2yU_1|\varepsilon|^{-1} \exp\big(i(\phi_2 - \tilde{\phi})\cos(\lambda_a y)\big)\Big|^2, \tag{41a}$$

где $\lambda = \kappa_p^2 \lambda_a^2/\kappa_w$. Выражения (32), (34), (36) и (42) должны использоваться с учетом сделанных модификаций для $U_{1,2}$ и $\phi_{1,2}$.

Список литературы

[1] М.Л. Левин, С.М. Рытов. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. Наука, М. (1967).
[2] С.М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. АН СССР, М. (1953).
[3] М.Л. Левин, В.Г. Полевой, С.М. Рытов. ЖЭТФ **79**, 2087 (1980).
[4] В.Г. Полевой. Теплообмен флуктуационным электромагнитным полем. Наука, М. (1990).
[5] В.Г. Полевой. ЖЭТФ **98**, 1990 (1990).
[6] D. Polder, M. Van Hove. Phys. Rev. B **4**, 3303 (1971).
[7] J.J. Loomis, H.J. Maris. Phys. Rev. B **50**, 18517 (1994).
[8] K. Park, Z. Zhang. Frontiers Heat Mass Transfer **4**, 013001 (2013).
[9] V.B. Bezerra, G. Bimonte, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, C. Romero. Eur. Phys. J. C **52**, 701 (2007).
[10] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. Rev. Mod. Phys. **79**, 1291(2007).
[11] B.N.J. Persson, Zhang Zhenyu. Phys. Rev. B **57**, 7327 (1998).
[12] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. J. Phys. C **11**, 345 (1999).
[13] J.B. Pendry. J. Phys. C **9**, 10301 (1997).
[14] V.E. Teodorovich. Proc. Roy. Soc. London A **362**, 71 (1978).
[15] T.G. Philbin, U. Leonhardt. New J. Phys. **11**, 03035 (2009); arXiv: 094.2148.
[16] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. New J. Phys. **11**, 033035 (2009).
[17] J.B. Pendry. New J. Phys. **12**, 033028 (2010).
[18] J.S. Høye, I. Brevik. Entropy **15**, 3045 (2013).
[19] K.A. Milton, J.S. Hoye, I. Brevik. Symmetry **8**, 29 (2016).
[20] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. Phys. Usp. **187**, 559 (2017).
[21] K.A. Milton, R. Guerodt, G.L. Ingold, A. Lambrecht, S. Reynaud. J. Phys. Condens. Matter **27**, 214003 (2015).
[22] M. Bordag, G.L. Klimchitskaya, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko. Advances in the Casimir effect. Oxford Univ. Press, Oxford, UK (2009).
[23] C.-C. Chang, A.A. Banishev, R. Castillo-Garza, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, U. Mohideen. Phys. Rev. B **85**, 165443 (2012).
[24] A.A. Banishev, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, U. Mohideen. Phys. Rev. B **88**, 155410 (2013).
[25] B.C. Stipe, H.J. Mamin, T.D. Stowe, Y.W. Kenny, D. Rugar. Phys. Lett. **87**, *9*, 096801 (2001).
[26] B.V. Derjaguin. Kolloid Z. **69**, 155 (1934).

Редактор Т.Н. Василевская