

01
Сравнение вейвлет-преобразования и преобразования Габора при анализе спектрального состава нестационарных сигналов

© С.В. Божокин, И.М. Соколов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
 195251 Санкт-Петербург, Россия
 e-mail:bsvjob@mail.ru

(Поступило в Редакцию 6 января 2018 г.)

Проведено сравнение двух основных подходов, используемых для анализа нестационарных случайных процессов, — оконного преобразования Фурье и непрерывного вейвлетного преобразования. Сравнение проведено на основе рассмотрения ряда модельных сигналов с известными частотно-временными характеристиками. Проанализировано также применение этих двух подходов при исследовании динамики спектрального состава флуоресценции холодных атомных облаков, возбуждаемых импульсным излучением. Показано, что оба подхода позволяют выявить все основные особенности изучаемых сигналов. Однако метод непрерывного вейвлетного преобразования обладает рядом преимуществ, поскольку для достижения оптимальных условий анализа при применении оконного преобразования Фурье необходимо проведение целого ряда дополнительных расчетов, направленных на определение оптимальной ширины используемого окна.

DOI: 10.21883/JTF.2018.12.46776.9-18

Введение

Основной задачей настоящей работы является сравнение некоторых наиболее часто применяемых методов спектрального анализа нестационарных процессов. При исследовании таких процессов традиционные методы фурье-анализа оказываются практически непригодными. Хотя вычисление фурье-спектра и позволяет определить спектральный состав процесса, но при этом остается совершенно неизвестно, на каких временных интервалах появлялись или исчезали те или иные спектральные компоненты. По спектру Фурье невозможно отличить стационарный процесс от нестационарного [1,2].

К настоящему времени предложено несколько способов анализа изменения спектрального состава нестационарных сигналов со временем. Все эти способы основаны на вычислении функции двух переменных — частоты ν и времени t , получаемой тем или иным интегральным преобразованием исследуемого сигнала $Z(t)$.

Первый большой класс преобразований получил название оконного преобразования Фурье. Преобразование этого класса имеет вид

$$g_w(\nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t')\chi_w^*(\nu, t' - t)dt', \quad (1)$$

где в качестве функции $\chi_w(t)$ может использоваться произведение простейшей прямоугольной ступенчатой функции окна, размер которой равен W , на функцию, осциллирующую с частотой ν . Можно использовать и специальные функции окна с плавными краями, что позволяет избежать искажений спектра, связанных с влиянием границ окон [3]. Наибольшее распространение

получило использование гауссовой функции окна

$$\chi_w(\nu, t) = \frac{1}{\sqrt{W}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{4W^2}\right) \exp(2\pi i\nu t). \quad (2)$$

В этом случае преобразование (1) получило название преобразования Габора (GT — Gabor transform). Ширина гауссовой функции W , входящая в $g_w(\nu, t)$ как параметр, определяет разрешающую способность по частоте и времени. Одной из основных проблем этого подхода является выбор оптимального значения W , с помощью которого $g_w(\nu, t)$ правильно описывала бы как амплитудные, так и частотные свойства сигнала $Z(t)$ [4–8].

Частично проблема оптимизации частотно-временного анализа решается при использовании окна переменной ширины в зависимости от области анализируемых частот. Такой подход реализуется в методе непрерывного вейвлетного преобразования (CWT — continuous wavelet transform), которое мы будем обозначать как $V(\nu, t)$ [9–12]:

$$V(\nu, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} Z(t')\psi^*[\nu(t' - t)]dt'. \quad (3)$$

Выбираемую в этом методе весовую функцию $\psi(x)$ принято называть материнским вейвлетом. К настоящему времени предложено большое число различных вариантов CWT [9–13]. Далее в этой работе основное внимание мы уделим случаю модифицированного преобразования Морле [14]

$$\psi(x) = D_m \exp\left(-\frac{x^2}{2m^2}\right) [\exp(2\pi i x) - \exp(-\Omega_m^2)]. \quad (4)$$

Здесь $\Omega_m = m\pi\sqrt{2}$, а D_m — нормировочный коэффициент. Второе слагаемое в квадратных скобках обеспечи-

вайт нулевое среднее значение функции $\psi(x)$ на всем временном интервале.

Наличие в показателе гауссовой функции, входящей в (3), (4), произведения частоты на интервал времени обеспечивает искомую адаптацию ширины временного окна в зависимости от частоты. Размер области интегрирования по времени, дающий основной вклад в (3), оказывается обратно пропорционален частоте. Таким образом, эта функция является широкой по времени для низких частот и узкой для высоких частот и обеспечивает хорошее разрешение в широком спектральном диапазоне.

Особенностью модифицированного вейвлета (4) является присутствие управляющего параметра m , позволяющего дополнительно изменять временное и частотное разрешение исследуемых сигналов. При $m = 1$ выражение переходит в обычный вейвлет Морле [2,8–13].

Сравнению методов GT и CWT для анализа поведения различных нестационарных сигналов посвящен целый ряд работ [15–26]. В работах [15–17,22] эти методы сравнивались при анализе сигналов электроэнцефалографии (ЭЭГ). При обработке сигналов электрической активности мышц это сравнение проведено в работах [18,19], ряд особенностей при регистрации судорожных явлений в мышцах проанализировано в [25]. Методы GT и CWT сравнивались в задачах исследования свойств сосудов [23], при изучении сигналов синусовой аритмии, связанной с изменением мгновенной частоты сердечных ударов во время вдоха и выдоха [24], при регистрации переходных процессов в электротехнических устройствах [20,21], а также в сейсмологических исследованиях [26].

В этих работах показано, что в ряде случаев определенными преимуществами обладает преобразование Габора, в ряде — непрерывное вейвлетное преобразование. Так, для сигналов, спектральные свойства которых быстро изменяются во времени, использование адаптивного окна, размер которого изменяется с исследуемой частотой, в случае применения метода CWT имеет существенные преимущества. В то же время GT имеет некоторые преимущества для обработки сигналов ЭЭГ в реальном времени из-за его быстродействия.

Заметим, что сравнение методов GT и CWT в упомянутых выше работах [15–26] выполнялось при использовании численных алгоритмов анализа нестационарных сигналов, динамика перестройки частоты которых была априори неизвестна. В качестве альтернативы такому подходу сравнение GT и CWT в настоящей работе будет проведено при использовании аналитических моделей с известными амплитудно-частотными характеристиками. Вначале мы рассмотрим случай элементарного нестационарного сигнала, имеющего постоянную частоту и изменяющуюся во времени амплитуду. Знание динамических характеристик этого модельного сигнала позволит нам определить оптимальные значения ширины окна для преобразования Габора W и найти наилучшее значение управляющего параметра модифицированного

вейвлета Морле m . Оптимальными мы будем считать такие значения W и m , которые приводят к максимальному значению произведения коэффициентов корреляции Пирсона по времени и частоте для сигнала и его образа.

Далее мы рассмотрим сигналы, частота которых монотонно изменяется со временем. Эти сигналы будут смоделированы как комбинация элементарных нестационарных сигналов с разными частотами. Наконец, мы рассмотрим один специфический класс реальных физических сигналов, представляющих определенный практический интерес. Мы вычислим преобразование GT и CWT для сигнала флуоресценции холодных облаков в атомных ловушках, возбуждаемых импульсным излучением. Мы проанализируем достоинства и недостатки двух обсуждаемых подходов для определения спектрального состава вторичного излучения этих облаков.

Частотно-временные характеристики элементарного гармонического сигнала с изменяющейся амплитудой

Для сравнения GT и CWT рассмотрим простейший элементарный нестационарный сигнал

$$z_L(t) = A(t) \cos(2\pi f_L t),$$

$$A(t) = \exp[-t^2/(4\tau_L^2)] \quad (5)$$

с частотой f_L , амплитуда $A(t)$ которого представляет собой гауссовскую кривую с масштабом локализации по времени Δ_t , равным τ_L .

Будем считать, что на масштабе τ_L укладывается много периодов колебаний $f_L \tau_L \gg 1$. При этом спектр мощности сигнала $P_L(\nu)$, определяемый квадратом модуля фурье-компоненты сигнала, имеет масштаб локализации рассматриваемого сигнала по частоте $\Delta_\nu = 1/(4\pi\tau_L)$.

Сигнал (5) допускает аналитическое вычисление как преобразования Габора, так и модифицированного вейвлетного преобразования Морле. Знание явного выражения для этих двух преобразований позволяет ответить на вопрос о том, насколько точно GT, зависящее от размера окна W , и CWT с управляющим параметром m воспроизводят характер самого сигнала, в частности, насколько хорошо они позволяют определить временную зависимость амплитуды $A(t)$ и спектр мощности $P_L(\nu)$.

В таблице приведены некоторые количественные параметры получающихся преобразований, а именно характерные протяженности получающихся функций $|g_W^{(L)}(\nu t)|^2$ и $|V_m^{(L)}(\nu t)|^2$ по оси времени и по оси частот, вычисленные для элементарного нестационарного сигнала (5).

Сравнение полученных в расчете параметров преобразования GT и CWT с известными значениями, соответствующими исходному сигналу (5) показывает, что преобразование GT хорошо описывает временное поведение сигнала в случае окна малой длительности ($\Delta_t^{(GT)} \approx \Delta_t$), когда $W \ll \tau_L$, но при этом частотное

Характерные протяженности по оси времени Δ_t и по оси частот Δ_ν для элементарного нестационарного сигнала (ENS), вычисленные с помощью преобразования Габора (GT) ($\Delta_t^{(GT)}$; $\Delta_\nu^{(GT)}$), а также непрерывного вейвлетного преобразования (CWT) ($\Delta_t^{(CWT)}$; $\Delta_\nu^{(CWT)}$)

	Δ_t	Δ_ν
ENS	$\Delta_t = \tau_L$	$\Delta_\nu = 1/(4\pi\tau_L)$
GT $g_w(\nu, t)$	$\Delta_t^{(GT)} = \sqrt{W^2 + \tau_L^2}$	$\Delta_\nu^{(GT)} = \sqrt{W^2 + \tau_L^2}/(4\pi W\tau_L)$
CWT $V(\nu, t)$	$\Delta_t^{(CWT)} = \tau_L \sqrt{1 + m^2/(2f_L^2\tau_L^2)}$	$\Delta_\nu^{(CWT)} = \sqrt{1 + 2f_L^2\tau_L^2/m^2}/(4\pi\tau_L)$

распределение GT W_{\min} оказывается очень широким. Заметим, что минимальный размер окна GT ограничен величиной $1/f_L \ll W_{\min}$, так как в окне размером W_{\min} должно помещаться хотя бы несколько периодов колебаний сигнала, равных $1/f_L$. В противоположном случае, при $W \gg \tau_L$, частотная локализация сигнала воспроизводится хорошо, а временная оказывается практически неопределенной. Такое поведение оконного преобразования Фурье являются вполне ожидаемым. Для CWT ситуация похожая. Малые значение m обеспечивают хорошее временное разрешение, а большие $m \gg f_L\tau_L$ — хорошее частотное разрешение.

Заметим, однако, что CWT в отличие от GT воспроизводит не просто область локализации по времени или частоте, но и позволяет восстановить явный вид сигнала. Так, в работах [13,14] показано, что при $m = 1$ временное поведение $|V_m^{(L)}(f_L, t)|^2$ в точности совпадает с поведением квадрата амплитуды сигнала (5). При $m \gg f_L\tau_L$ функция $|V_m^{(L)}(\nu, t = 0)|^2$ в точности повторяет поведение спектра мощности $P_L(\nu)$.

Для нахождения оптимальных значений W и m , позволяющих в одном расчете определять и временную и частотную локализацию, воспользуемся методом, предложенным и подробно проанализированным в работах [27–29]. Этот метод основан на вычислении коэффициентов корреляции Пирсона между сигналом и его преобразованием.

Коэффициенты корреляции Пирсона определяются для двух величин X и Y как следующая нормированная разность средних значений:

$$r = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\sqrt{[\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2][\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2]}}. \quad (6)$$

В нашем случае X — функция, соответствующая известному сигналу, Y — преобразованию.

Для каждого из двух преобразований GT и CWT мы рассмотрим два коэффициента, один из которых показывает, насколько преобразование воспроизводит временную зависимость, а второй — частотную. Оптимальными мы будем считать такие значения W и m , которые обеспечивают максимальную величину произведения соответствующих коэффициентов.

При вычислении коэффициента корреляций по частоте r_ν в качестве функции X естественно взять спектр

мощности $P_L(\nu)$, а в качестве Y — квадрат модуля либо преобразования Габора $|g_w(\nu, t)|^2$, либо непрерывного вейвлетного преобразования $|V_m(\nu, t)|^2$. При этом усреднение в правой части выражения (6) проводится по всем частотам. Второй, временной аргумент функции Y зафиксируем равным нулю, учитывая явный вид сигнала (5), который в этот момент имеет наибольшее значение. Если коэффициент корреляции r_ν равен единице, то в соответствии с [27–29] мы имеем точное совпадение спектра мощности $P_L(\nu)$ либо с функцией $|g_w(\nu, t = 0)|^2$, либо с функцией $|V_m(\nu, t = 0)|^2$.

При нахождении коэффициента временных корреляций r_t функция $X = A^2(t)$. Частоту в функциях $Y = |g_w(\nu, t)|^2$ или $Y = |V_m(\nu, t)|^2$ выберем равной частоте сигнала $\nu = f_L$. Наилучшее совпадение между амплитудой $A(t)$ и выражениями $g_w(\nu, t)$ и $V_m(\nu, t)$ достигается при $r_t = 1$.

Используя аналитические выражения $g_w(\nu, t)$ и $V_m(\nu, t)$, вычисленные для сигнала (5), коэффициенты r_ν и r_t для двух сравниваемых преобразований в рассматриваемом случае $f_L\tau_L \gg 1$ могут быть записаны одинаковым образом, если ввести безразмерный параметр u

$$r_\nu = \sqrt{\frac{2u\sqrt{1+u^2}}{1+2u^2}}, \quad (7)$$

$$r_t = \sqrt{\frac{2\sqrt{1+u^2}}{2+u^2}}. \quad (8)$$

Для GT переменная $u = W/\tau_L$, для CWT — $u = m/(\sqrt{2}f_L\tau_L)$.

Максимум произведения коэффициентов корреляции $r_\nu r_t = \sqrt{8/9}$ наблюдается при значении безразмерного параметра $u = 1$. Это соответствует ширине окна для GT, равной длительности сигнала $W = \tau_L$. Для вейвлетного преобразования оптимальное значение управляющего параметра определяется произведением частоты элементарного сигнала (5) на его длительность $m \approx \sqrt{2}f_L\tau_L$. Таким образом, для простейших нестационарных сигналов оптимальные значения параметров преобразования приводят к одинаковым значениям частотно-временного разрешения как для метода GT, так и CWT.

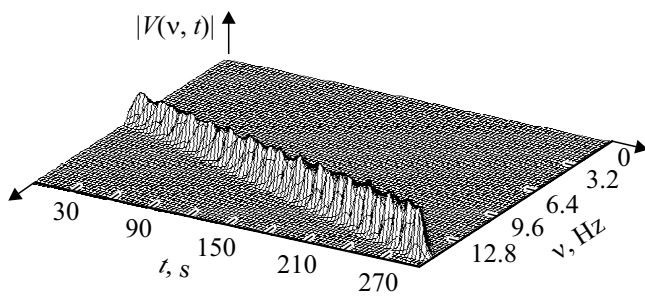


Рис. 1. Зависимости CWT $|V(v, t)|$ от частоты v , Hz и времени t , s, построенные для сигнала $Z(t)$ с линейной зависимостью частоты от времени ($m = 50$).

Математическая модель сигналов с изменяющейся частотой

Сравним теперь эффективность двух рассматриваемых подходов для более сложного сигнала, являющегося суперпозицией нескольких элементарных сигналов (5) с разной частотой. Рассмотрим совокупность $N_L = 29$ гауссовских пиков единичной амплитуды с одинаковой длительностью $\tau_L = 1$ s. Будем считать, что центры гауссовских пиков t_L составляют равномерную сетку, причем $t_L = t_0 + L\Delta t$. Частота колебаний f_L каждого гауссовского пика больше частоты предыдущего $f_L = f_0 + L\Delta f$. Таким образом, частота нестационарного сигнала линейно нарастает со временем.

Конкретные расчеты проведем для $t_0 = 10$ s, $\Delta t = 10$ s, $f_0 = 8$ Hz и $\Delta f = 0.25$ Hz. На рис. 1 изображен вейвлет-образ сигнала $|V(v, t)|$, построенный для значения параметра $m = 50$, который хорошо воспроизводит линейное возрастание частоты сигнала со временем. Для сравнения возможностей воспроизведения амплитудно-частотных свойств рассматриваемого сигнала разными методами мы, как и ранее, рассчитываем для них произведение коэффициентов корреляций Пирсона по частоте и времени.

Расчеты показали наличие оптимальных параметров для каждого из преобразований. Для GT произведение $r_t^{(GT)}(f_L)r_v^{(GT)}(t_L)$ достигает максимального значения, равного 0.906 при $W \approx 1.2$. Для вейвлетного преобразования зависимость произведения коэффициентов корреляции m от показывает наличие максимума при $m = 15$. Его величина $r_t^{(CWT)}(v_L)r_v^{(CWV)}(t_L) \approx 0.94$ близка к своему максимальному значению, вычисленному для элементарного нестационарного сигнала (5).

Значение оптимального частотно-временного разрешения методом CWT оказалось несколько больше, чем методом GT. У метода вейвлетного преобразования обнаружилось еще одно преимущество перед преобразованием Габора. В области, где оба метода дают хорошее временное разрешение и хорошо воспроизводят временную зависимость анализируемого сигнала (коэффициент $r_t(f_L)$ близок к единице), значение коэффициента кор-

реляций по частоте $r_v^{(CWV)}(t_L) = 0.322$ ($m = 1$) больше, чем $r_v^{(GT)}(t_L) = 0.243$ ($W = 0.05$).

В заключение этого раздела отметим еще один недостаток преобразования Габора. При использовании этого преобразования для правильной аппроксимации $A(t)$ требуется выполнение неравенства $1/f_L \ll W \ll \tau_L$. Для сложного сигнала $Z(t)$, представляющего собой суперпозицию элементарных нестационарных сигналов (5) с большим разбросом частот f_L и характерных значений величин τ_L , выбор единого оптимального значения W , удовлетворяющего такому условию для всех элементарных нестационарных сигналов, становится невозможным. Таким образом, в этом случае следует использовать непрерывное вейвлетное преобразование.

Частотно-временной спектр сигнала флуоресценции холодных атомных облаков

Анализ флуоресценции холодных облаков в атомных ловушках является одним из наиболее эффективных экспериментальных методов исследования свойств таких облаков [30–37]. В последнее время особое внимание уделяется изучению динамики послесвечения холодных атомных ансамблей, возбуждаемых импульсным излучением. Это связано с исследованием таких эффектов как суб- и суперизлучение, сильная и слабая локализации света. При этом обычно ограничиваются исследованием скорости затухания интенсивности флуоресценции. Однако, как показано в работах [38,39], анализ спектрального состава флуоресценции также может служить важным дополнительным источником информации о спектре коллективных состояний, а следовательно, и об основных физических свойствах ансамбля. Еще более информативным является характер изменения спектрального состава флуоресценции со временем, поскольку на разных временах после окончания возбуждения вклад в излучение дают коллективные состояния с разным временем жизни, что открывает возможности одновременного определения времен жизни состояний и их энергий.

В данном разделе мы проводим сравнение применения двух обсуждаемых выше подходов — GT и CWT для анализа частотно-временных характеристик нестационарных сигналов флуоресценции, частотные свойства которого априори неизвестны.

Сравнение проводим на примере сигнала флуоресценции, рассчитанного для сферически симметричного атомного облака с однородным в среднем распределением атомов по объему. Расчет напряженности поля вторичной волны, излучаемой атомной системой, выполняем на основе квантового микроскопического подхода, подробно описанного в работах [38]. Конкретные вычисления проведены для атомов, возбуждаемых на переходе $J = 0 \rightarrow J = 1$. Это простейший переход, который позволяет, однако, корректно учесть векторную

природу излучения и наличие зеемановской структуры атомов. Радиус облака — $R = 45D$, концентрация атомов $n_0 D^3 = 0.002$. Здесь $D = 1/k$ — обратное волновое число квазирезонансного излучения. Длительность возбуждающего прямоугольного импульса τ_L , который для определенности считается циркулярно поляризованным, выбираем в десять раз меньше естественного времени жизни атомного возбужденного состояния τ_a . Короткий импульс накачки имеет широкий спектр частот, что позволяет эффективно возбуждать большое количество коллективных состояний в достаточно широком спектральном интервале. Несущая частота внешнего импульса при этом не очень существенна. Для определенности мы полагаем ее равной частоте атомного перехода изолированного атома.

Как показывают проведенные ранее расчеты [40,41], ширина спектра вторичного излучения не превышает нескольких десятков естественных ширин $\gamma = \tau_a^{-1}$ возбужденных состояний свободных атомов. Прямой спектральный анализ таких сравнительно узких частотных особенностей для оптического излучения крайне затруднителен. Поэтому при построении теоретической схемы анализа мы ориентируемся на гетеродинный метод регистрации, при котором анализируемое излучение перед детектированием смешивается с опорной волной, а спектральному анализу подвергается ток фотодетектора. Частоту опорной волны будем полагать равной частоте атомного перехода свободного атома.

В силу особенностей многоатомных коллективных состояний характер частотно-временного спектра послесвечения зависит от его поляризации и направления наблюдения. Обсуждение этих особенностей выходит за рамки данной работы. При сравнении результатов, получаемых в методе Габора и методе вейвлет-анализа, мы рассмотрим одно фиксированное направление — излучение на угол $\theta = \pi/4$ по отношению к направлению распространения возбуждающего света и один поляризационный канал — канал с изменяющейся спиральностью $H \perp H$.

Заметим также, что для анализа динамики спектрального состава сигнала флуоресценции в условиях сильных затуханий будем удобно рассматривать спектры сигналов, нормированных на мгновенное значение амплитуды. Это позволяет нам сравнивать как временное, так и спектральное различие сигналов для разных моментов времени после окончания действия импульса возбуждения, не учитывая быстрое экспоненциальное уменьшение амплитуды самих сигналов.

Полностью опуская вычисления, приведем для иллюстрации вейвлет-образ $|V(\nu, t)|$ сигнала, получаемого в этих условиях. Этот образ, рассчитанный для $m = 50$ и приведенный на рис. 2, показывает, что во вторичном излучении атомного ансамбля имеются компоненты, частоты которых как выше, так и ниже, чем частота атомного перехода ν_a . На рис. 2 эта частота выбрана за начало отсчета. С течением времени отличие характерных частот спектральных компонент флуоресценции

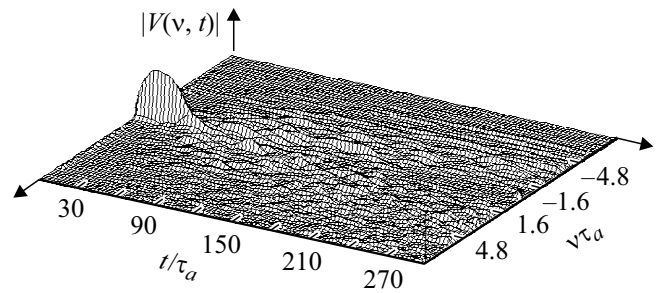


Рис. 2. Зависимость от безразмерной частоты $\nu\tau_a$ и безразмерного времени t/τ_a величины $|V(\nu, t)|$ для угла рассеяния $\theta = \pi/4$ для поляризации $H \perp H$, построенная для $m = 50$.

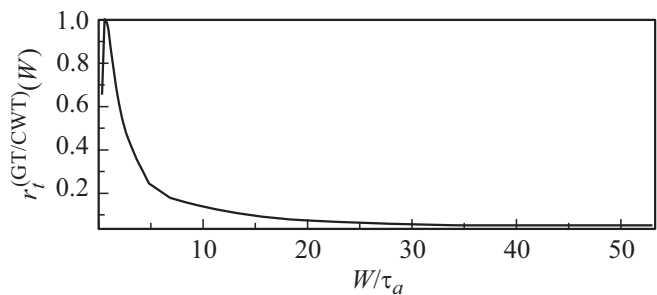


Рис. 3. Величина $r_t^{(GT/CWT)}(W)$ в зависимости от размера окна W/τ_a .

от ν_a увеличивается. Это означает, что чем более долгоживущим является коллективное состояние, тем более сдвинута его частота по сравнению с частотой невозмущенного атомного перехода. Подобная же зависимость наблюдается и при расчете преобразования Габора.

Рассчитанный нами сигнал флуоресценции был подвергнут вейвлет анализу с различными значениями параметра m . Преобразование Габора было также вычислено для широкого круга значений ширины окна W . Поскольку реальная частотно-временная зависимость исследуемого сигнала была нам неизвестна, основное внимание мы уделяли сравнению результатов, полученных этими двумя методами.

Каждый из методов дает зависимость от двух переменных ν и t . Это позволяет в каждом из них определять спектр сигнала в каждый заданный момент времени, а также анализировать, как меняется со временем амплитуда той или иной отдельной спектральной компоненты. Для этого в первом случае необходимо рассматривать разрез полученных трехмерных графиков вдоль оси частот при заданном t , а во втором, разрез должен быть перпендикулярен этой оси.

Рассмотрим вначале, насколько одинаково оба исследуемых преобразования могут воспроизводить временную зависимость амплитуды заданной спектральной компоненты. Наш опыт, основанный на анализе непрерывного вейвлетного преобразования с использованием модифицированного материнского вейвлета

Морле [13,14], показывает, что для широкого класса нестационарных сигналов $|V(\nu, t)|$ хорошо описывает эту зависимость при $m = 1$. Это, в частности, подтверждается результатами, проведенными выше для элементарного нестационарного сигнала. Поэтому, сравнивая два подхода в этом случае, мы рассчитали коэффициент корреляции по времени $r_t^{(GT/CWT)}(W)$ для разных W и одного m , равного единице. Результаты сравнения для частного случая $\nu_0\tau_a = 1.25$ показаны на рис. 3.

Видно, что при изменении W коэффициент корреляции ведет себя немонотонно. При $W = 0.71\tau_a$ уменьшении ширины окна этот коэффициент вначале нарастает, как и следовало ожидать, поскольку уменьшение ширины окна увеличивает временное разрешение. При этом коэффициент достигает максимального возможного значения, равного единице. Это означает, что графики, представляющие собой разрезы по времени t для GT $|g_w(\nu_0, t)|$ ($W = 0.71\tau_a$) и CWT $|V(\nu_0, t)|$ ($m = 1$), практически совпадают. При дальнейшем уменьшении W коэффициент корреляции падает. Это обусловлено тем, что размер окна становится соизмерим с обратной частотой сигнала, и метод Габора в этом случае не позволяет получать адекватные результаты.

Сравнение воспроизводимости спектров сигнала для фиксированного момента времени в двух подходах показано на рис. 4. Здесь мы демонстрируем поведение коэффициента корреляции по частоте $r_\nu^{GT/CWT}$. Как и в предыдущем случае, мы рассматриваем зависимость этого коэффициента от ширины окна в преобразовании Габора при фиксированном W . Хорошее частотное разрешение достигается при больших m , поэтому мы выбрали $m = 75$. Расчет проведен для больших интервалов времени после окончания $t_0/\tau_a = 180$. На этих временах основной вклад во флуоресценцию дают долгоживущие субрадиационные состояния, представляющие наибольший интерес при исследовании коллективных эффектов в холодных атомных ансамблях [38,39].

Рис. 4 демонстрирует монотонное возрастание коэффициента корреляции $r_\nu^{GT/CWT}$ при увеличении ширины окна. Таким образом, для больших значений параметров $W/\tau_a \gg 1$, $m \gg 1$ величины GT $|g_w(\nu, t_0)|$ и CWT $|V(\nu, t_0)|$, описывающие поведение спектров мощности со временем, практически совпадают.

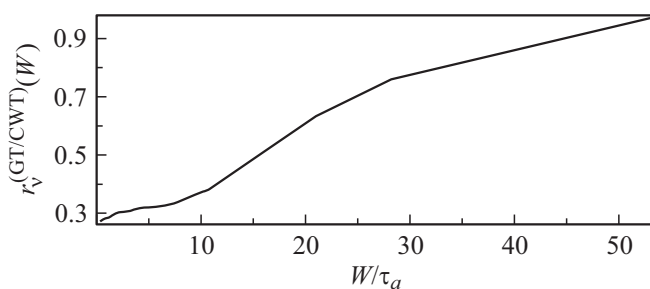


Рис. 4. Величина $r_\nu^{(GT/CWT)}(W)$ в зависимости от размера окна W/τ_a .

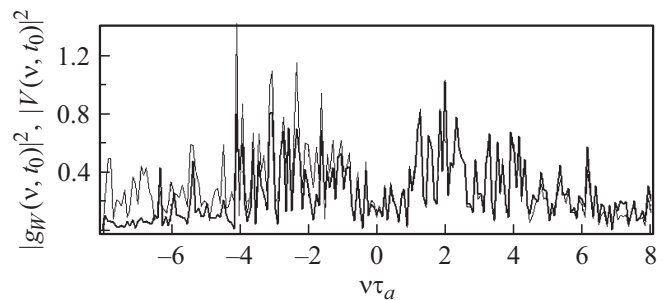


Рис. 5. Зависимость от частоты спектра мощности GT $|g_w(\nu, t_0)|^2$ (тонкая линия, $W = 53$ s) и CWT $|V(\nu, t_0)|^2$ (толстая линия, $m = 75$), построенные для момента времени $t_0/\tau_a = 180$.

Это совпадение хорошо демонстрирует рис. 5, на котором показаны спектры мощности $|g_w(\nu, t_0)|^2$ и $|V(\nu, t_0)|^2$ для $W = 53\tau_a$, $m = 75$ и $t_0/\tau_a = 180$.

Незначительные отличия двух кривых на рис. 5 наблюдаются лишь для низкочастотных компонент спектров мощности, что связано с недостаточно большим значением размера окна W . Дальнейшее существенное увеличение этого размера в рассматриваемом случае не имеет смысла, поскольку размер окна становится соизмеримым с полным временным интервалом, на котором рассчитывался сигнал флуоресценции.

Заключение

Проведено сравнение двух основных подходов, используемых для анализа нестационарных случайных процессов, — оконного преобразования Фурье и непрерывного вейвлетного преобразования. Сравнение выполнено на основе анализа ряда модельных сигналов с известными частотно-временными характеристиками, а также при исследовании динамики спектрального состава флуоресценции холодных атомных облаков, возбуждаемых импульсным излучением. В последнем случае спектральные свойства сигнала изначально не были известны.

Сравнение показало, что оба метода при определенном и оптимальном выборе управляющих параметров позволяют получить практически одинаковую информацию о частотно-временных свойствах этого сигнала. Однако сам выбор оптимальных управляющих параметров представляет отдельную задачу. С использованием современных вычислительных мощностей эта задача может быть решена практически для любого заданного сигнала при наличии достаточного ресурса времени.

Существенно более сложной является обработка нестационарных сигналов и определение динамики их частотного спектра при измерениях в масштабах реального времени непосредственно в процессе получения сигнала. Одним из важных результатов данной работы является выявление ряда преимуществ вейвлетного пре-

образования по сравнению с преобразованием Габора, которые наиболее ярко проявляются именно в этом случае. Как следует из наших расчетов, преобразование SWT при $m = 1$ правильно восстанавливает поведенные амплитуды различных спектральных компонент во времени. Такое свойство вейвлетного преобразования связано с тем, что для него ширина окна преобразования автоматически подстраивается в зависимости от частоты. При использовании преобразования GT для правильного восстановления амплитуд различных компонент возникают трудности. Их хорошее воспроизведение возможно в узком интервале ширины окна, который априори неизвестен. В случае же, когда сигнал является наложением нескольких нестационарных сигналов с большим разбросом характерных длительностей и частот, выбор единого значения W , оптимального для всех составляющих, может оказаться вообще невозможным.

Заметим также, что исследование динамики спектрального состава флуоресценции холодных атомных облаков является далеко не единственным примером эффективного применения метода Габора и метода вейвлетных преобразований. Помимо упоминавшихся во введении применений в медицинских исследованиях [42,43], данные методы анализа нестационарных сигналов могут быть с успехом использованы при исследовании вспышек в астрофизике [44], в задачах сейсмологии [45], а также при интерпретации параметров оптических сред, облучаемых фемтосекундными лазерами [46].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01085).

Список литературы

- [1] Mandel L., Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. Cambridge University Press, 1995. 1160 p.
- [2] Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. 3rd ed., NY: Academic Press, 2008. 671 p.
- [3] Дворкович В.П., Дворкович А.В. Метрологическое обеспечение видеоинформационных систем. Техносфера, 2015. 784 с.
- [4] Chui C.K. An Introduction to Wavelets. NY: Academic Press, 1992. 413 p.
- [5] Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab. М.: ДМК Пресс, 2008. 448 с.
- [6] Yarlagadda R.K.R. Analog and Digital Signals and Systems. Springer, 2010. 488 p.
- [7] Chui C.K., Jiang O. Applied Mathematics. Data Compression. Spectral Methods, Fourier Analysis, Wavelets and Applications. Mathematics Textbooks for Science and Engineering. Vol. 2. Atlantis Press, 2013.
- [8] Андреев Д.А., Божокин С.В., Веницев И.Д., Жунов К.Т. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 10. С. 10.
- [9] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A., Pavlov A.N., Sitnikova E. Wavelets in neuroscience, Springer Series in Synergetics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. 331 p.
- [10] Addison P.S. The illustrated wavelet transform handbook. Introductory theory and application in Science, Engineering, Medicine and Finance. Second Edition, CPC Press, 2017. 464 p.
- [11] Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004. 280 с.
- [12] Дьяконов В.П. Вейвлеты от теории к практике. М.: Солон-Р, 2002. 448 с.
- [13] Божокин С.В. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 7. С. 8.
- [14] Божокин С.В., Жарко С.В., Ларионов Н.В., Лутвинов А.Н., Соколов И.М. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 6. С. 822.
- [15] Kiyuk M.K., Güler I., Dizibüyük A., Akın M. // Computers in Biology and Medicine. 2005. Vol. 35. N 7. P. 603.
- [16] Akin M. // J. Medical Systems. 2002. Vol. 26. N 3. P. 241.
- [17] Sitnikova E., Hramov A.E., Koronovsky A.A., Luijtelaar G. // J. Neuroscience Methods. 2009. Vol. 180. P. 304.
- [18] Ryan E.D., Cramer J.T., Egan A.D., Hartman M.J., Herda T.J. // J. Electromyography and Kinesiology. 2008. Vol. 18. N 1. P. 54.
- [19] Canal M.R. // J. Medical Systems. 2010. Vol. 34. N 1. P. 91.
- [20] Coppola L., Liu Q., Buso S., Boroyevich D., Bell A. // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2008. Vol. 55. N 2. P. 880.
- [21] Cho S.H., Jang G., Kwon S.H. // IEEE Transaction on Power Delivery. 2010. Vol. 25. N 1. P. 494.
- [22] Dass S., Holi M.S., Rajan K.S. // International Journal of Engineering Research and Technology (IJERT). 2013. Vol. 2. N 11. P. 636.
- [23] Ubeyli E.D., Guler I. // Computers in Biology and Medicine. 2004. Vol. 34. P. 345.
- [24] Nockaert L., Migeotte P.F., Daubigny L., Prisk G.K., Grenez F., Sa R.C. // IEEE Transactions on Biomedical Engineering. 2008. Vol. 55. N 5. P. 1640.
- [25] Nijssen T.M.E., Aarts R.M., Chuitmans P.J.M., Griep P.A.M. // IEEE Transactions on Information Technology in Medicine. 2010. Vol. 14. N 5. P. 1197.
- [26] Shokrollahi E., Zargar G., Riahi M.A. // Int. J. Sci. Emerging Tech. 2013. Vol. 5. N 5. P. 291.
- [27] Hu Yi, Loizou P.C. // IEEE Transaction on Audio, Speech and Language Processing. 2008. Vol. 16. N 1. P. 229.
- [28] Benesty J., Chen J., Huang Y. // IEEE Transaction on Audio, Speech and Language Processing. 2008. Vol. 16. N 4. P. 757.
- [29] Jaskolski F., Mülle C., Manzoni O. // J. Neuroscience Methods. 2005. Vol. 146. P. 42.
- [30] Labeyrie G., Vaujour E., Muller C.A., Delande D., Miniatura C., Wilkowski D., Kaiser R. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. P. 223904.
- [31] Balik S., Olave R.G., Sukenik C.I., Havey M.D., Datsyuk V.M., Sokolov I.M., Kupriyanov D.V. // Phys. Rev. A. 2005. Vol. 72. P. 051402.
- [32] Balik S., Havey M.D., Sokolov I.M., Kupriyanov D.V. // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 79. P. 033418.
- [33] Balik S., Win A.L., Havey M.D., Sokolov I.M., Kupriyanov D.V. // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 87. P. 053817.
- [34] Pellegrino J., Bourgain R., Jennwein S., Sortais Y.R.P., Browaeys A., Jenkins S.D., Ruostekoski J. // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 113. P. 133602.
- [35] Araujo M.O., Kresic I., Kaiser R., Guerin W. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. P. 073002.
- [36] Roof S.J., Kemp K.J., Havey M.D., Sokolov I.M. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 117. P. 073003.
- [37] Guerin W., Araujo M.O., Kaiser R. // Phys. Rev. Lett. 2016. Vol. 116. P. 083601.
- [38] Соколов И.М. // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. № 3(9). С. 453.
- [39] Божокин С.В., Соколов И.М. // Опт. и спектр. 2017. Т. 123. № 6. С. 25.

- [40] *Fofanov Ya.A., Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Havey M.D.* // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 87. P. 063839.
- [41] *Sokolov I.M., Kuraptsev A.S., Kupriyanov D.V., Havey M.D., Balik S.* // J. Mod. Opt. 2013. Vol. 60. P. 50.
- [42] *Grubov V.V., Sitnikova E., Pavlov A.N., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Physica A. 2017. Vol. 486. P. 206.
- [43] *Borodina U.V., Aliev R.R.* // Neurocomputing. 2013. Vol. 121. P. 551.
- [44] *Bijaoui A.* Wavelet and Astrophysical Application. Wavelet in Physics. Ed. J.C. van den Berg. Cambridge University Press, 2004. 479 p.
- [45] *Baker J.W.* // Bulletin of the Seismological Society of America. 2007. Vol. 97. N 5. P. 1486.
- [46] *Deng Y., Wu Z., Chai L., Wang C., Yamane K., Morita R., Yamashita M., Zhan Z.* // Optics Express. 2005. Vol. 13. N 6. P. 2120–2126.