Описание термодинамических свойств неметаллического твердого тела в рамках самосогласованного термодинамического подхода (на примере германия)

© В.Ю. Бодряков, А.А. Повзнер

Уральский государственный технический университет,
620002 Екатеринбург, Россия

E-mail: povz@kf.ustu.ru

(Поступила в Редакцию 11 ноября 2002 г.)

Разрабатывается алгоритм построения самосогласованной модели парамагнитного неметаллического изотропного твердого тела дебаевского типа. На примере германия показано, что в даже в рамках сильно упрощенных предположениях о значениях термодинамических параметров возможно удовлетворительное описание термодинамических величин в широком интервале температур.

Известно, что реальные твердые тела не слишком хорошо могут быть описаны в традиционных рамках модели Дебая, которая в настоящее время является по сути единственной устоявшейся термодинамической моделью немагнитного твердого тела [1,2]. Одна из причин этого состоит в том, что модель Дебая является чрезмерно упрощенной и противоречива сама по себе. В частности, одним из важнейших параметров теории является характеристическая температура Дебая θ, которая, согласно классическим представлениям, является константой вещества и не зависит от температуры. Величина θ определяется видом спектра фононных колебаний, который в идеальном случае предполагается квадратичным по частоте и ограниченным сверху дебаевской частотой; θ может быть выражена через упругие модули всестороннего сжатия и сдвига, плотность и молярный объем. Последнее, как можно показать из простых термодинамических выкладок, являются явными и притом существенными функциями температуры. Следовательно, неизбежен вывод о температурной зависимости θ. Такой вывод противоречит исходным посылкам модели в традиционной интерпретации, но соответствует калориметрическим данным по измерению теплоемкостей твердых тел (см., например, [3–8]). Температурная зависимость температуры Дебая является прямым отражением неидеальности фактического колебательного спектра реального твердого тела (фононного ангармонизма) и является причиной особенностей в поведении теплофизических свойств твердых тел, которые не могут быть объяснены в рамках традиционного подхода [5–13]. В частности, отклонение фактического хода температурной зависимости твердого тела от классического закона Дюлонга и Пти даже в отсутствие электронного вклада не находит объяснения в рамках классической дебаевской теории и требует допущения зависимости $\theta(T)$. Подобным образом имеются отклонения в ходе температурной зависимости коэффициента теплового расширения $\alpha(T)$ от классического дебаевского поведения, согласно которому $\alpha(T)$ с повышением температуры должен асимптотически приближаться к постоянной величине [2].

Далее, если факт корреляции температурных зависимостей теплоемкости и коэффициента теплового расширения твердого тела прямо отмечается в теории твердого тела [2], то другой хорошо известный экспериментальный факт корреляции температурных зависимостей теплоемкости и упругих модулей теоретически почти не изучен (в этой связи см. [14]).

Указанные выше и ряд других противоречий так и остались не раскрытыми в полной мере. Это делает актуальным продолжение исследований в направлении построения самосогласованной термодинамической модели твердого тела, которая бы позволила в рамках единого подхода одновременно описать и спрогнозировать зависимости упругих модулей и теплоемкости твердого парамагнетика от температуры.

Цель настоящей работы — развитие модельных представлений теории Дебая и принципиальное „построение“ подхода к разработке самосогласованной модели, в рамках которой будет возможно взаимосогласованное описание всего комплекса важнейших термодинамических свойств изотропного непроводящего немагнитного твердого тела, таких как теплоемкость C, объемный коэффициент термического расширения (ОКТР) α, модуль всестороннего сжатия K и т. п.

В качестве модельного объекта выбран полупроводниковый германий, для которого имеется достаточный объем справочной экспериментальной информации по теплофизическим свойствам (см. [3,4,15–18]). При этом электронной проводимостью Ge можно с достаточной точностью пренебречь.

1. Температура Дебая и ее термодинамические производные

Одно из важнейших понятий теории Дебая — понятие о характеристической температуре (температуре Дебая) θ, которая является усредненной характеристикой фононного спектра тепловых колебаний атомов, который считается квадратичным по частоте и ограниченным сверху дебаевской частотой [1,2]. Разумеется истинный колебательный спектр реального твердого тела далек от идеального, и проблема состоит в корректном, насколько это вообще возможно в рамках макроскопической термодинамики, учете этой неидеальности для более точного описания фактических термодинамических свойств твердого тела.

Температура Дебая может быть найдена в результате дебаевского усреднения парциальных температур Дебая

$$\theta = \left(\frac{3}{\frac{1}{\theta_l^3} + \frac{2}{\theta_t^3}} \right)^{1/3}. \tag{1}$$

В классической дебаевской интерпретации считается, что температура Дебая является функцией объема твердого тела V (или давления P), однако не зависит от температуры. „Продольная" температура Дебая отвечает продольной моде звуковых колебаний; ее удобно представить в виде

$$\theta_l = \frac{\hbar}{k_\mathrm{B}} \left(\frac{6\pi^2 N_\mathrm{A}}{V} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3} G}{\rho}} = \frac{\hbar}{k_\mathrm{B}} \frac{(6\pi^2 N_\mathrm{A})^{1/3}}{M^{1/2}} L^{1/2} V^{1/6}. \tag{2}$$

„Поперечная" температура Дебая отвечает поперечным модам звуковых колебаний,

$$\theta_t = \frac{\hbar}{k_\mathrm{B}} \left(\frac{6\pi^2 N_\mathrm{A}}{V} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{\hbar}{k_\mathrm{B}} \frac{(6\pi^2 N_\mathrm{A})^{1/3}}{M^{1/2}} G^{1/2} V^{1/6}. \tag{3}$$

В выражениях (2), (3) k_B, N_A — постоянные Больцмана и Авогадро соответственно; V — молярный объем; ρ — плотность массы; M — молярная масса; K и G — модуль всестороннего сжатия и сдвига соответственно. Поскольку не существует удобного термодинамического определения модуля сдвига G, удобно выразить его через модуль всестороннего сжатия и коэффициента Пуассона σ [19]

$$G = \frac{3(1 - 2\sigma)}{2(1 + \sigma)} K, \tag{4}$$

L — так называемый модуль продольной упругости (аналог модуля Юнга) — также может быть выражен через K и σ

$$L = \frac{3(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)} K. \tag{5}$$

Для многих веществ коэффициент Пуассона близок к 1/4 и слабо изменяется с температурой. В дальнейшем будем предполагать его постоянным (не зависящим от температуры). Температурная зависимость температуры Дебая, если ею нельзя пренебречь, при этом определяется соответствующими зависимостями упругого модуля всестороннего сжатия и молярного объема. Температурные зависимости последних, как будет видно в дальнейшем, следуют непосредственно из самой дебаевской теории.

В дальнейшем нам потребуются выражения для изотермических объемных производных усредненной и парциальных температур Дебая. Эти термодинамические производные удобно записывать, введя следующее обозначение:

$$\gamma_i = \left(\frac{V}{i} \frac{\partial i}{\partial V} \right)_T, \quad \gamma_i^* = \left(\frac{V^2}{i} \frac{\partial^2 i}{\partial V^2} \right)_T, \quad i = \theta, \theta_t, \theta_l.$$

С точностью до знака параметр γ_θ совпадает с известным в теории твердого тела параметром Грюнайзена $\Gamma = -\left(\frac{\partial \ln \theta}{\partial \ln V} \right)_T$, величина которого для большинства твердых тел порядка единицы.

Нетрудно убедиться, что

$$\gamma_\theta = \frac{\gamma_{\theta l}/\theta_l^3 + 2\gamma_{\theta t}/\theta_t^3}{1/\theta_l^3 + 2/\theta_t^3}, \tag{6}$$

$$\gamma_\theta^* = \frac{\gamma_{\theta l}^*/\theta_l^3 + 2\gamma_{\theta t}^*/\theta_t^3}{1/\theta_l^3 + 2/\theta_t^3}. \tag{7}$$

В ряде случаев температурной зависимостью параметров γ (обобщенных параметров Грюнайзена) можно пренебречь. В общем случае температурная зависимость γ_θ-параметров определяется температурной зависимостью парциальных γ_θ-параметров ($\gamma_{\theta l}$ и $\gamma_{\theta t}$, $\gamma_{\theta l}^*$ и $\gamma_{\theta t}^*$) и температур Дебая (θ_l и θ_t).

2. Первые и вторые термодинамические производные

Имея в виду цели настоящей работы и комплекс анализируемых физических свойств, будем использовать представление термодинамики рассматриваемых объектов (твердых слабоанизотропных неметаллических парамагнетиков) как через термодинамический потенциал (свободную энергию) Гельмгольца $F(T, V)$ в функции температуры T и объема V, так и через термодинамический потенциал Гиббса $\Phi(T, P)$ в функции температуры и давления P. Как известно [2], дифференциальные представления молярных свободной энергии и термодинамического потенциала соответственно имеют вид

$$dF(T, V) = -SdT - PdV, \tag{8}$$

$$d\Phi(T, P) = -SdT + VdP, \tag{9}$$

где S — молярная энтропия. Выражения (8) и (9) близки друг к другу и отличаются лишь набором переменных. Как будет видно в дальнейшем, для анализа тепловых свойств веществ (теплоемкости и теплового расширения) более удобен термодинамический потенциал Φ, так как он позволяет получить термодинамически точные выражения для измеряемых на эксперименте изобарной теплоемкости и термического коэффициента объемного расширения. Для анализа упругих свойств более удобна свободная энергия F, так как она позволяет получить термодинамически точное выражение для изотермического модуля всестороннего сжатия. Следует сказать, что выбор в качестве независимой переменной давления в большинстве случаев более оправдан, так как на эксперименте именно давление может быть изменено в достаточной мере произвольным образом.

В духе традиционных термодинамических представлений запишем выражения для интегральных молярных свободной энергии и термодинамического потенциала изотропного неметаллического твердого тела в пренебрежении электронным вкладом в виде

$$F = F_0 + F_p, \tag{10}$$

где $F_0(V)$ — не зависящая от температуры, но являющаяся функцией объема часть свободной энергии; $F_p(T,\theta)$ — дебаевская (решеточная, фононная, парамагнитная) часть свободной энергии, являющаяся согласно закону соответственных состояний Грюнайзена [2] функцией отношения температуры T и характеристической температуры Дебая $\theta = \theta(V)$. Молярный термодинамический потенциал может быть аналогично (10) представлен в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_p, \tag{11}$$

где слагаемые имеют тот же смысл, что и в случае свободной энергии, но с учетом соответствующей замены V на P.

Опуская промежуточные выкладки, опубликованные ранее [11,13], приведем лишь окончательные результаты — термодинамические точные выражения для основных физических свойств неметаллического твердого тела.

2.1. Первые термодинамические производные. Необходимые с точки зрения дальнейших расчетов первые термодинамические производные свободной энергии и термодинамического потенциала изобарная молярная энтропия, изотермический молярный объем, плотность массы и изотермическое давление с учетом возможной температурной зависимости температуры Дебая $\theta(T)$ есть

$$S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_P = 3R\left\{\frac{4}{3}D(z) - \ln(1-e^{-z}) - \left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right)_P\right\}, \tag{12}$$

$$V = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_T = V_0 + 3R\left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial P}\right)_T, \tag{13}$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{V_0 + 3R\left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial P}\right)_T}, \tag{14}$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = P_0 - 3R\left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\left(\frac{\partial\theta}{\partial V}\right)_T. \tag{15}$$

В (12)–(15) $S_0 = 0$; $V_0 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)_T$; $P_0 = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$; $D(z)$ — стандартная табулированная функция Дебая [2], зависящая от обратной приведенной температуры $z = \theta/T$; R — универсальная газовая постоянная.

Хотя плотность или в некоторых случаях объем могут быть непосредственно измерены, на практике обычно определяют физические величины, соответствующие вторым термодинамическим производным, именно молярную теплоемкость, объемный коэффициент теплового расширения, модуль всестороннего сжатия.

2.2. Вторые термодинамические производные. Термодинамические точные выражения для изобарной молярной теплоемкости, объемного коэффициента теплового расширения, изотермического модуля всестороннего сжатия неметаллического твердого тела с учетом возможной температурной зависимости характеристической температуры $\theta(T)$ имеют вид

$$\begin{aligned} C &= T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2}\right)_P \\ &= 3R\left\{C_{VR}(z)\left[1-\frac{T}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right)_P\right]^2 - T\left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial T^2}\right)_P\right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{V}\frac{\partial^2\Phi}{\partial P\partial T} \\ &= \frac{3R}{V}\left\{C_{VR}(z)\left[1-\frac{T}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right)_P\right]\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial\theta}{\partial P}\right)_T + \left[\frac{3}{8}+\frac{D(z)}{z}\right]\frac{\partial^2\theta}{\partial T\partial P}\right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} K &= -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{V}\left(V^2\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T \\ &= K_0 + \frac{3R}{V}\left\{\frac{3}{8}\gamma_\theta^*\theta - T\left[\gamma_\theta^2 C_{VR}(z) - \gamma_\theta^* D(z)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Опуская довольно громоздкий анализ различных предельных случаев, опубликованный ранее [6–13], заметим лишь, что в пренебрежении температурной зависимостью $\theta(T)$ получим известные термодинамические результаты, соответствующие теории Дебая в традиционном изложении (закон Дюлонга и Пти, закон соответственных состояний Грюнайзена и др.). Учет температурной зависимости характеристической температуры при обычно реализуемых соотношениях $(\partial\theta/\partial T)_P < 0$, $(\partial^2\theta/\partial T^2)_P < 0$ приводит к превышению теплоемкостью $C(T)$ и ОКТР $\alpha(T)$ классических предельных значений даже в отсутствие электронного вклада. Последнее соответствует наблюдающимся на практике результатам и может быть учтено при численной обработке экспериментальных результатов для реальных твердых тел.

Уместо также привести полезное соотношение $(\partial\theta/\partial P)_T = (-\theta/K)\gamma_\theta$.

3. Алгоритм построения самосогласованной термодинамической модели

Для устранения указанных выше внутренних противоречий дебаевской модели в ее традиционной интерпретации эффективной представляется самосогласованная схема расчета термодинамических характеристик, которая может быть реализована численно методом последовательных приближений. Как будет видно в дальнейшем на примере Ge, учет неидеальности фононного спектра посредством учета температурной зависимости $\theta(T)$ в рамках даже самых простых предположений (температурная независимость параметров $\gamma_{\theta l}, \gamma_{\theta t}, \gamma^*_{\theta l}, \gamma^*_{\theta t}, \sigma$) позволяет добиться вполне удовлетворительного согласия экспериментальных и расчетных данных одновременно по целому комплексу теплофизических свойств вещеста в интервале температур, измеряющимся многими сотнями кельвинов.

3.1. Затравочное приближение. Для проведения затравочных расчетов задаются затравочные термодинамические параметры: V_0, K_0, $\gamma_{\theta l}$, $\gamma_{\theta t}$, $\gamma^*_{\theta l}$, $\gamma^*_{\theta t}$, σ. Это позволяет вычислить затравочные значения усредненной и парциальных температур Дебая θ_0, θ_{0l}, θ_{0t}, плотности ρ_0, усредненных значений обобщенных $\gamma_{\theta 0}$-параметров Грюнайзена.

3.2. Нулевое приближение $(n = 0)$. Вычисленные затравочные значения указанных выше параметров позволяют провести полноценное вычисление в нулевом приближении (приближении постоянства температуры Дебая $\theta = \theta_0$) температурных зависимостей $V(T)$, $K(T)$, $\rho(T)$. Далее становится возможным вычисление температурных зависимостей $\theta(T)$, $\theta_l(T)$, $\theta_t(T)$, а также соответствующих температурных производных. Затем вычисляются усредненные значения γ_θ-параметров Грюнайзена, что позволяет вычислить оставшиеся термодинамические параметры $C(T)$ и $\alpha(T)$ в этом приближении.

3.3. Первое и последующие приближения $(n = 1, 2, \dots)$. Расчеты в первом и последующих приближениях организуются таким же образом, как и в нулевом приближении, с той лишь разницей, что счет ведется с учетом зависимости $\theta(T)$, которая приводит к перенормировке хода температурных зависимостей теплофизических величин. Итерационный самосогласующий процесс может быть прерван по некоторому произвольно заданному условию, например, как только разница в величине θ в двух последовательных приближениях становится менее 0.01 K. Как показывают расчеты, для этого достаточно первых трех-пяти приближений.

Организовав описанным выше образом итерационный процесс, варьируя затравочные параметры и добиваясь наименьшего среднеквадратичного отклонения между имеющимися экспериментальными данными и соответствующими расчетными значениями термодинамических параметров, можно получить взаимосогласованные температурные зависимости всего комплекса физических величин, определяющих термодинамику исследуемого твердого тела. Такие расчеты проведены в настоящей работе на примере полупроводникового германия.

4. Обсуждение результатов

Результаты вычисления основных термодинамических функций германия в соответствии с описанным алгоритмом отражены на рис. 1–3, где в сравнении с известными табличными данными соответственно представлены температурные зависимости молярной теплоемкости,

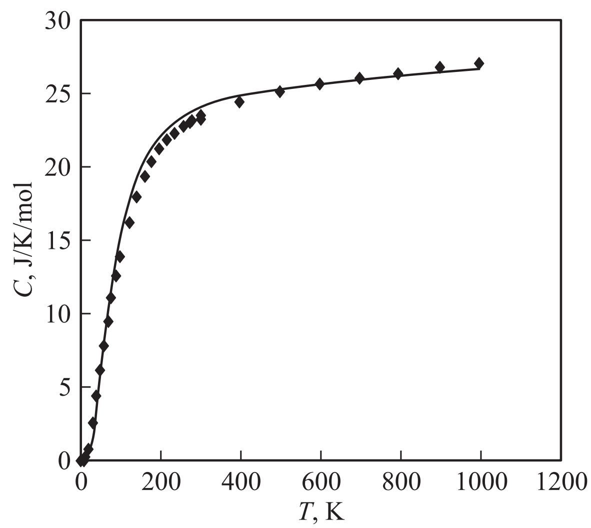

Рис. 1. Температурная зависимость теплоемкости германия. Точки — данные таблицы [17] (ниже 300 K) и [16] (выше 300 K); сплошная линия — расчет.

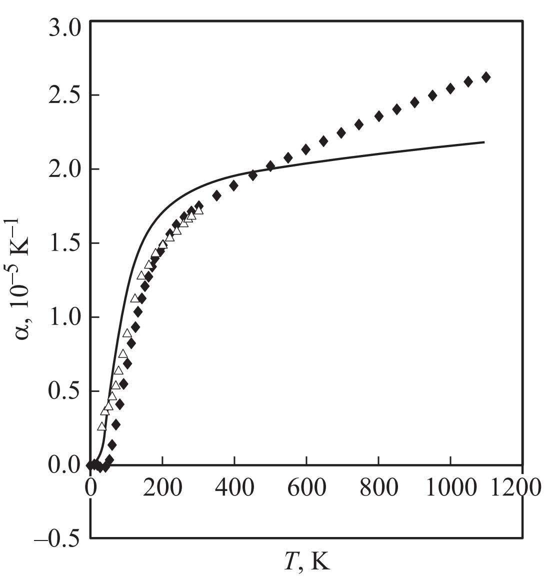

Рис. 2. Температурная зависимость объемного коэффициента теплового расширения германия. Квадраты — данные таблицы [15], треугольники — данные [17], сплошная линия — расчет.

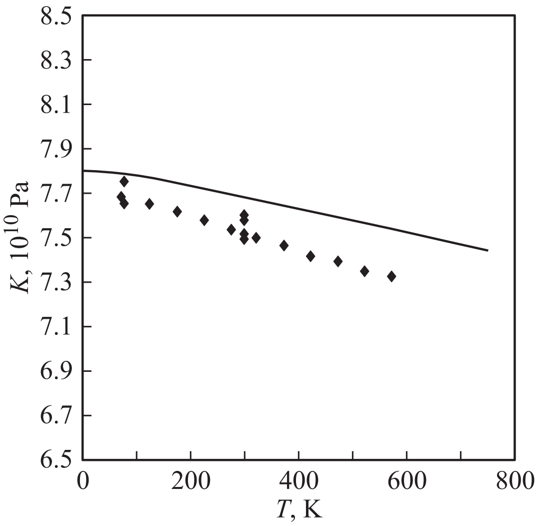

Рис. 3. Температурная зависимость модуля всестороннего сжатия германия. Точки — данные таблицы [18], сплошная линия — расчет.

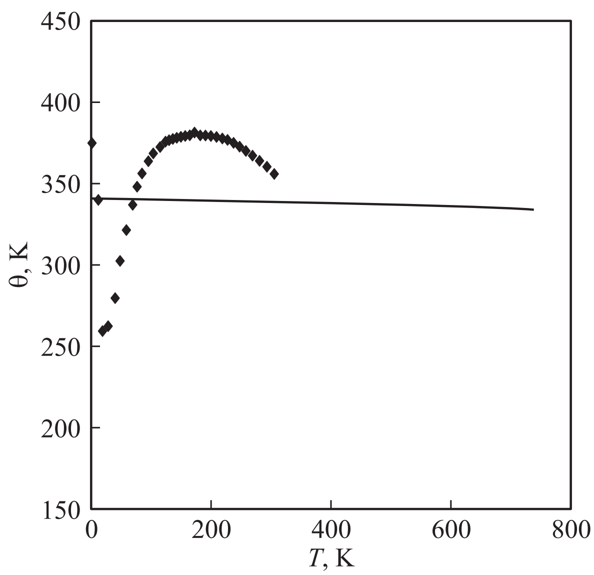

Рис. 4. Температурная зависимость температуры Дебая германия. Точки — данные [3], сплошная линия — расчет.

объемного коэффициента термического расширения и модуля всестороннего сжатия. Кроме того, на рис. 4 представлена расчетная температурная зависимость температуры Дебая в сравнении со значениями $\theta(T)$, вычисленными из калориметрических данных [3].

Несмотря на чрезвычайную простоту сделанных при проведении расчетов предположений (не зависящими от температуры считались все γ_θ-параметры Грюнайзена, а именно $\gamma_{\theta l}$, $\gamma_{\theta t}$, $\gamma^*_{\theta l}$, $\gamma^*_{\theta t}$, а также коэффициент Пуассона σ) удалось достичь вполне удовлетворительного согласия расчетных и справочных значений термодинамических функций в широком интервале температур. Особенно хорошим оказалось согласие для молярной теплоемкости. Расчетные значения термодинамических параметров, варьировавшихся в качестве свободных параметров при проведении расчетов, составили: $V_0 = 1.43 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3 \cdot mol^{-1}}$; $K_0 = 78.5\,\mathrm{GPa}$; $\gamma_{\theta l} = -3.86$; $\gamma_{\theta t} = -0.588$; $\gamma^*_{\theta l} = -1.89$; $\gamma^*_{\theta t} = -2.37$; $\sigma = 0.261$. Относительная погрешность (относительное среднеквадратичное отклонение расчетных и табличных значений) составила соответственно для теплоемкости $\pm 2.4\%$, для ОКТР $\pm 11.1\%$, для модуля всестороннего сжатия $\pm 2.2\%$, для плотности $\pm 5.5\%$, для температуры Дебая $\pm 8.6\%$, для коэффициента Пуассона $\pm 0.5\%$. Значение последнего при комнатной температуре взято из [18].

Несколько худшее по сравнению с другими теплофизическими свойствами согласие расчетных и табличных [15,18] значений ОКТР, по-видимому, может быть объяснено двумя обстоятельствами. Во-первых, в справочниках [15,18] приведены данные для линейного коэффициента теплового расширения монокристаллического германия (без точного указания кристаллографического направления измерений), тогда как термодинамические расчеты справедливы для усредненного поликристаллического ОКТР твердого тела. Во-вторых, в области низких температур в поведении теплового расширения германия имеется „инварная“ аномалия: коэффициент теплового расширения Ge в интервале температур $16 < T < 40\,\mathrm{K}$ отрицателен. Эта аномалия сопровождается соответствующим аномальным поведением температурной зависимости температуры Дебая (рис. 4). Вероятно, что хорошо известное аномальное поведение физических свойств Ge, до сих пор не нашедшее удовлетворительного объяснения, не может быть описано термодинамически в рамках сделанных выше упрощающих предположений, в частности, о температурной независимости параметров $\gamma_{\theta l}$ и $\gamma_{\theta t}$ (в этой связи см. [15]).

Таким образом, в настоящей работе показано, что в рамках самосогласованной термодинамической модели дебаевского типа, оставаясь даже в рамках весьма сильно упрощающих предположений, возможно удовлетворительное описание всего комплекса термодинамических характеристик твердого тела в интервале температур, исчисляющимся многими сотнями кельвинов. Дальнейшее уточнение расчетов лежит на пути корректного учета температурной зависимости γ_θ-параметров Грюнайзена.

Список литературы

[1] Г. Лейбфрид. Микроскопическая теория упругих и тепловых свойств кристаллов. ГИФМЛ. М.–Л. (1963). 312 с.
[2] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Ч.I. Наука, М. (1976). 584 с.
[3] P. Flubacher, A.J. Leadbetter, J.A. Morrison. Phil. Mag. **4**, *39*, 273 (1959).
[4] D. Gerlich, B. Abeles, R.E. Miller. J. Appl. Phys. **36**, *1*, 76 (1965).

[5] A.J. Leadbetter. J. Phys. **C1**, *2*, 1481 (1968); 1489 (1968).
[6] В.Ю. Бодряков, В.М. Замятин. ФММ **85**, *4*, 18 (1998).
[7] В.Ю. Бодряков, В.М. Замятин. Металлы *4*, 123 (1999).
[8] В.Ю. Бодряков, В.М. Замятин. ТВТ **38**, *5*, 724 (2000).
[9] В.Ю. Бодряков, А.А. Повзнер, О.Г. Зелюкова. ФТТ **40**, *9*, 1581 (1998).
[10] В.Ю. Бодряков, В.В. Петрушкин, А.А. Повзнер. ФММ **89**, *4*, 5 (2000).
[11] В.Ю. Бодряков, А.А. Повзнер. ФММ **89**, *6*, 21 (2000).
[12] В.Ю. Бодряков, В.В. Петрушкин, А.А. Повзнер. ФММ **90**, *6*, 45 (2000).
[13] В.Ю. Бодряков, А.А. Повзнер, О.Г. Зелюкова. Металлы *2*, 79 (2000).
[14] V.Yu. Bodryakov. Solid Stat. Commun. **83**, *12*, 1053 (1992).
[15] С.И. Новикова. Тепловое расширение твердых тел. Наука, М. (1974). 292 с.
[16] Термодинамические свойства индивидуальных веществ / Под ред. В.П. Глушко. Наука, М. (1979). Т. II, Кн. 1. 440 с.
[17] Л.А. Новицкий, И.Г. Кожевников. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Машиностроение, М. (1975). 216 с.
[18] И.Н. Францевич, Ф.Ф. Воронов, С.А. Бакута. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Наук. думка, Киев (1982). 287 с.
[19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). 248 с.