03

Рассеяние света малыми многослойными несофокусными сфероидами с использованием подходящих сфероидальных базисов

© В.Г. Фарафонов[1], В.И. Устимов[2], В.Б. Ильин[1,2,3]

[1] Государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
[3] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: far@aanet.ru

Поступила в редакцию 17.07.2018 г.

Построено приближение Релея для многослойных частиц, границы слоев которых являются несофокусными сфероидами. Максимальный учет геометрии задачи достигнут за счет представления потенциалов полей внутри неконфокальных оболочек в виде разложений по сфероидальным гармоникам в разных системах, где поверхности слоев являются координатными. Для сшивки двух разложений внутри каждого слоя использованы полученные авторами соотношения между сфероидальными гармониками уравнения Лапласа в системах с разными фокусными расстояниями. Методы расширенных граничных условий (EBCM) и разделения переменных (SVM) оказались эквивалентными, поскольку привели к одинаковым результатам. Поляризуемость частицы и, следовательно, характеристики рассеянного излучения записаны через бесконечномерные матрицы, элементы которых определяются либо явным образом, либо в виде конечных сумм. В частных случаях софокусных сфероидов данное решение полностью согласуется с известными результатами.

DOI: 10.21883/OS.2018.12.46939.203-18

Введение

Анализ рассеяния света неоднородными несферическими телами требуется во многих прикладных задачах в самых разных областях науки и техники [1–6]. Во многих случаях неоднородность частицы можно рассматривать в виде многослойности. При данном предположении наиболее простой и интересной моделью неоднородной несферической частицы служит многослойный сфероид. В настоящий момент для задач рассеяния электромагнитного излучения однородными и многослойными конфокальными (софокусными) сфероидами, в частности сильно вытянутыми или сильно сплюснутыми, следует применять решение Фарафонова и Вощинникова [7–10], использующее сфероидальный базис, в максимальной степени учитывающий геометрию задачи. Многослойные неконфокальные сфероиды, у которых оболочки имеют разные фокусы, рассматриваются в работах [11,12]. Во многих случаях, например в нанооптике [4], размеры рассеивателей много меньше длины волны излучения. Здесь следует рассматривать задачу рассеяния в приближении Релея, которое базируется на решении соответствующей электростатической задачи. Подобные задачи проще волновых, в частности известны решения классических задач для однородного [2,3], софокусного двухслойного [1] и многослойного эллипсоидов [13]. Однако для частиц других форм явных решений не существует [14].

В настоящей статье рассматривается приближение Релея для многослойных частиц, границы слоев которой являются несофокусными сфероидами с единым центром и осью симметрии. Сначала формулируется дифференциальная и интегральная постановки задачи, при этом поля описываются с помощью потенциалов, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Особенность нашего подхода заключается в том, что потенциалы внутри оболочек представляются в виде разложений по сфероидальным гармоникам в разных системах координат. Геометрия задачи учитывается максимально, так как поверхности слоев являются координатными в этих системах. Еще один оригинальный момент предлагаемого алгоритма решения задачи состоит в том, что сшивка двух разложений внутри каждого слоя осуществляется с помощью полученных авторами соотношений между сфероидальными гармониками уравнения Лапласа в системах с разными фокусными расстояниями. Применение методов расширенных граничных условий (EBCM) и разделения переменных (SVM) приводит к одинаковым результатам, что указывает на их эквивалентность. Окончательное решение задачи записывается через бесконечномерные матрицы, элементы которых определяются либо явным образом, либо в виде конечных сумм. В частных случаях софокусных сфероидов данное решение полностью согласуется с известными результатами.

1. Постановка задачи

1.1. Основные соотношения

При решении проблемы рассеяния электромагнитного излучения малыми телами в рамках приближения Релея поляризуемость частицы α вводится через дипольный момент, индуцированный внешним полем $\mathbf{E}_0$ [1]:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_0, \tag{1}$$

при этом она имеет размерность объема. В общем случае поляризуемость является тензором, который в случае осесимметричных частиц становится диагональным для трех взаимно перпендикулярных направлений напряженности электрического поля:

$$\mathbf{p} = \alpha_x\, E_x\, \mathbf{i}_x + \alpha_y\, E_y\, \mathbf{i}_y + \alpha_z\, E_z\, \mathbf{i}_z. \tag{2}$$

Сечения поглощения и рассеяния определяются через волновое число среды вне частицы k_1 и поляризуемость частицы, а именно [1]

$$C^{\text{abs}} = 4\pi\, k_1\, \text{Im}\, (l^2\, \alpha_x + m^2\, \alpha_y + n^2\, \alpha_z), \tag{3}$$

$$C^{\text{sca}} = \frac{8}{3}\pi\, k_1^4 |\alpha|^2, \tag{4}$$

где

$$|\alpha|^2 = l^2\, |\alpha_x|^2 + m^2\, |\alpha_y|^2 + n^2\, |\alpha_z|^2, \tag{5}$$

а l, m, n - направляющие косинусы вектора $\mathbf{E}_0$ относительно трех главных осей тензора поляризуемости (для осесимметричных частиц $\alpha_x = \alpha_y$).

Для определения поляризуемости рассмотрим электростатическую задачу, которая решается с помощью скалярных потенциалов Φ, связанных с напряженностью электрического поля $\mathbf{E}$ следующим образом [2,3]:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \tag{6}$$

Для двухслойной частицы потенциалы будут иметь два индекса — Φ_i^j, где $j = 1, 2, 3$ соответственно для поля вне частицы, внутри оболочки и ядра. Нижний индекс принимает два значения $i = 1, 2$ соответственно для регулярной части, не имеющей особенностей в начале координат, и иррегулярной части, которая убывает на бесконечности и имеет особенность в начале координат.

Поля вне частицы описываются суммой потенциалов:

$$\Phi^1 = \Phi_1^1 + \Phi_2^1, \tag{7}$$

где Φ_1^1 соответствует внешнему полю, а второе слагаемое Φ_2^1 — „рассеянному“ полю, т. е. полю, возникающему из-за наличия частицы. Именно это поле представляет основной интерес при решении электростатической задачи, так как его дипольная составляющая используется для построения релеевского приближения.

Потенциал поля внутри оболочки содержит оба слагаемые:

$$\Phi^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2. \tag{8}$$

И наконец, поле внутри ядра не имеет особенностей в начале координат, поэтому описывается только первым слагаемым:

$$\Phi^3 = \Phi_1^3. \tag{9}$$

Из уравнений Максвелла для электростатических полей следует, что они должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi_i^j = 0. \tag{10}$$

Граничные условия на поверхностях раздела сред заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрических полей и нормальных составляющих векторов электрической индукции $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, и их можно записать, используя скалярные потенциалы, следующим образом [2,3]:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1^j + \Phi_2^j = \Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1}, \\ &\tfrac{\partial(\Phi_1^j + \Phi_1^j)}{\partial n_j} = \varepsilon_{j+1}\tfrac{\partial(\Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1})}{\partial n_j}, \end{aligned}\right\}_{\mathbf{r}\in S_j} \tag{11}$$

где $j = 1, 2$, при этом $\frac{\partial}{\partial n_j}$ — производные вдоль внешних нормалей к поверхностям частицы S_1 и ядра S_2. Кроме того, ε_{j+1} — относительная диэлектрическая проницаемость для среды в $(j+1)$-й оболочке по сравнению со средой в j-й оболочке.

Наряду с постановкой задачи в дифференциальной форме (10), (11) ее можно сформулировать в виде системы поверхностных интегральных уравнений [15]:

$$(\varepsilon_{j+1} - 1)\int\limits_{S_j}\left\{\frac{\partial(\Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}\,') + \Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}\,'))}{\partial n\,'}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')\right\}\mathrm{d}s'$$

$$= \begin{cases} \Phi_1^j(\mathbf{r}) - \Phi_1^{j+1}(\mathbf{r}), & \mathbf{r}\in D_j, \\ -\Phi_2^j(\mathbf{r}) + \Phi_2^{j+1}(\mathbf{r}), & \mathbf{r}\in -R^3\setminus \bar{D}_j. \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что уравнения (12) являются аналогами интегральных поверхностных уравнений, возникающих при применении метода расширенных граничных условий (EBCM) для волновых задач (см., например, [16]). Здесь дополнительные упрощения имеют место из-за отсутствия в качестве параметра волнового числа среды и, как следствие, появления единой функции Грина для всех сред – в ядре, оболочках и вне частицы:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}\,'|}, \tag{13}$$

где $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы точек наблюдения и интегрирования.

Важную роль играет коммутативность оператора T, соответствующего электростатической задаче, и оператора $T_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Если воспользоваться интегральной формулировкой задачи (12), то вместо оператора T можно рассматривать оператор

$$\tilde{T}\,E = \int\limits_S \left\{\frac{\partial\Phi_1^2(\mathbf{r}\,')}{\partial n\,'}\, G(\mathbf{r}, \mathbf{r}\,')\right\}\mathrm{d}s'. \tag{14}$$

Равенство

$$\tilde{T}\, T_\varphi = T_\varphi\, \tilde{T} \tag{15}$$

легко доказывается интегрированием по частям по переменной φ' (в сферической или сфероидальной системах координат) в левой части этого уравнения. При этом следует учесть независимость от азимутального угла функции $r = r(\theta)$, описывающей поверхность осесимметричной частицы, и метрических коэффициентов соответствующих систем координат, а также соотношение $\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\varphi'} = -\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial\varphi}$. Отметим, что внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, равны нулю в силу 2π-периодичности по переменной φ' всех функций, входящих в интегралы (14).

1.2. Сфероидальные гармоники

С целью наибольшего учета геометрии задачи для двухслойной неконфокальной частицы ниже будут использоваться две сфероидальные системы координат (ξ_1, η_1, φ) и (ξ_2, η_2, φ). Будем считать, что как и сама частица, системы имеют общую ось вращения и центр (начало координат), но разные фокусы, что приводит к общему для систем азимутальному углу φ. Связь любой сфероидальной системы координат с декартовой системой (x, y, z), ось z которой совпадает с осью симметрии частицы, можно записать следующим образом [17]:

$$x = \frac{d_i}{2}\left[(\xi_i^2 - f_i)(1-\eta_i^2)\right]^{1/2}\cos\varphi,$$

$$y = \frac{d_i}{2}\left[(\xi_i^2 - f_i)(1-\eta_i^2)\right]^{1/2}\sin\varphi,$$

$$z = \frac{d_i}{2}\,\xi_i\,\eta_i, \tag{16}$$

где d_i — фокусное расстояние. Параметр $f_i = 1$ для вытянутых сфероидальных координат, при этом $\xi_i \in [1, \infty)$, $\eta_i \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $f_i = -1$ для сплюснутых сфероидальных координат, при этом $\xi_i \in [0, \infty)$, $\eta_i \in [-1, 1]$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Координатными поверхностями в сфероидальной системе являются вытянутые или сплюснутые софокусные сфероиды и двуполостные или однополостные гиперболоиды соответственно. Отметим, что вытянутые сфероидальные координаты возникают при вращении вокруг большой оси софокусных эллипсов и гипербол, а сплюснутые — при вращении вокруг малой оси этих фигур.

Ниже будет использоваться общая сферическая система координат (r, θ, φ), которая связана с декартовой системой (x, y, z) стандартным образом:

$$\begin{cases} x = r\ \sin\theta\ \cos\varphi, \\ y = r\ \sin\theta\ \sin\varphi, \\ z = r\ \cos\theta. \end{cases} \tag{17}$$

Уравнение Лапласа (10) для потенциалов может быть решено разделением переменных как в сферической системе (17), так и в вытянутой или сплюснутой сфероидальных системах (16). Соответствующие гармоники имеют вид [2] в сферической системе:

$$\begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\mathbf{r})\end{matrix} = \begin{matrix} r^l \\ \frac{1}{2l+1}\ r^{-(l+1)}\end{matrix}\ \psi_{ml}(\theta,\varphi),$$

$$\psi_{ml}(\theta,\varphi) = \begin{matrix}\psi_{mle}(\theta,\varphi) \\ \psi_{mlo}(\theta,\varphi)\end{matrix} = \bar{P}_l^m(\cos\theta)\sqrt{\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}}\ \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi,\end{matrix} \tag{18}$$

в вытянутой сфероидальной системе:

$$\begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\mathbf{r})\end{matrix} = \begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(\xi,\eta,\varphi) \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\xi,\eta,\varphi)\end{matrix} = \begin{matrix}(\frac{d}{2})^l\ P_l^m(\xi) \\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\ (\frac{d}{2})^{-(l+1)}Q_l^m(\xi)\end{matrix}\ \psi_{ml}(\eta,\varphi),$$

$$\psi_{ml}(\eta,\varphi) = \begin{matrix}\psi_{mle}(\eta,\varphi) \\ \psi_{mlo}(\eta,\varphi)\end{matrix} = \bar{P}_l^m(\eta)\sqrt{\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}}\ \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi,\end{matrix} \tag{19}$$

в сплюснутой сфероидальной системе:

$$\begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}) \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\mathbf{r})\end{matrix} = \begin{matrix}\Psi_{ml}^{(1)}(\xi,\eta,\varphi) \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\xi,\eta,\varphi)\end{matrix}$$

$$= \begin{matrix}(\frac{-id}{2})^l\ P_l^m(i\xi) \\ \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\ (\frac{-id}{2})^{-(l+1)}Q_l^m(i\xi)\end{matrix}\ \psi_{ml}(\eta,\varphi),$$

$$\psi_{ml}(\eta,\varphi) = \begin{matrix}\psi_{mle}(\eta,\varphi) \\ \psi_{mlo}(\eta,\varphi)\end{matrix} = \bar{P}_l^m(\eta)\sqrt{\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}}\ \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi,\end{matrix} \tag{20}$$

где $n \geq m \geq 0$ – неотрицательные целые числа, символ Кронеккера $\delta_m^0 = 1$ или 0, когда $m = 0$ и $m \neq 0$ соответственно, $P_l^m(\eta)$ – присоединенные функции Лежандра 1-го рода,

$$\bar{P}_l^m(\eta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\ P_l^m(\eta) = N_{ml}^{-1}\ P_l^m(\eta) \tag{21}$$

— соответствующие нормированные функции. Угловые функции ψ_{ml} образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} \psi_{mn}(\eta,\varphi)\,\psi_{\mu\nu}(\eta,\varphi)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi = \delta_m^\mu\ \delta_n^\nu, \tag{22}$$

т.е. на поверхности любого координатного сфероида Ω. Сферические угловые функции (18) также образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой (22) на поверхности любой координатной сферы при замене $\eta \longrightarrow \cos\theta$.

Для функций, зависящих от угловой координаты η, вторые линейно независимые решения $Q_l^m(\eta)$ не рассматриваются, так как они имеют особенности при $\eta = \pm 1$ и не подходят по физическим соображениям, но они появляются для функций, зависящих от радиальных координат, поскольку убывают на бесконечности и имеют особенность на фокусном отрезке или круге.

Отметим, что при переходе от вытянутых сфероидальных функций к сплюснутым для получения необходимых соотношений в приведенных выше формулах нужно сделать замену $\xi \to i\,\xi,\ d \to -i\,d$.

Разложение функции Грина (13) для уравнения Лапласа в вытянутой системе координат имеет вид [2]

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}\,'|}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_0^m)\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(\xi_<)Q_l^m(\xi_>)$$

$$\times \bar{P}_l^m(\eta)\bar{P}_l^m(\eta')\cos m(\varphi-\varphi')$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\Psi_{ml}^{(1)}(\mathbf{r}_<)\ \Psi_{ml}^{(3)}(\mathbf{r}_>), \tag{23}$$

где $\xi_< = \min(\xi,\xi')$, $\xi_> = \max(\xi,\xi')$.

В случае сплюснутых сфероидальных координат для получения необходимых соотношений в приведенных выше формулах нужно сделать замену $\xi \to i\,\xi,\ d \to -i\,d$. В результате в формуле для функции Грина появится мнимая единица.

1.3. Связь между сфероидальными гармониками

Соотношения между вытянутыми сфероидальными и сферическими гармониками, содержащими радиальные функции 1-го и 2-го порядков, были приведены в работах [18,19]:

$$P_n^m(\xi)P_n^m(\eta) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\sum_{l=m}^{n}{}'(-1)^{\frac{n-l}{2}}$$

$$\times \frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l+m)!}\left(\frac{r}{d/2}\right)^l P_l^m(\cos\theta), \tag{24}$$

$$\left(\frac{r}{d/2}\right)^n P_n^m(\cos\theta)$$

$$= (n+m)!\sum_{l=m}^{n}{}'\frac{2l+1}{(n-l)!!(n+l+1)!!}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\xi)P_l^m(\eta) \tag{25}$$

и

$$Q_n^m(\xi)P_n^m(\eta) = (-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\sum_{l=n}^{\infty}{}'\frac{(l-m)!}{(l-n)!!(n+l+1)!!}$$

$$\times\left(\frac{d/2}{r}\right)^{l+1}P_l^m(\cos\theta),\quad r > d/2, \tag{26}$$

$$\left(\frac{d/2}{r}\right)^{n+1}P_n^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{(n-m)!}\sum_{l=m}^{\infty}{}'(-1)^{\frac{l-n}{2}}$$

$$\times\frac{(2l+1)(n+l-1)!!}{(l-n)!!}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}Q_l^m(\xi)P_l^m(\eta), \tag{27}$$

где штрих над знаком суммы означает, что суммирование ведется по индексам l, четность которых совпадает с четностью индекса n.

Исходя из этих формул можно найти соотношения, связывающие сфероидальные гармоники в двух разных сфероидальных системах координат:

$$\bar{P}_n^m(\xi_1)\bar{P}_n^m(\eta_1) = \frac{2n+1}{2}\sum_{l=m}^{n}{}'(-1)^{\frac{n-l}{2}}\frac{(n+l-1)!!}{(n-l)!!}$$

$$\times\left(\frac{d}{d_1}\right)^l\sum_{s=m}^{l}{}'\frac{2}{(l-s)!!(l+s+1)!!}\bar{P}_s^m(\xi_2)\bar{P}_s^m(\eta_2), \tag{28}$$

$$\bar{Q}_n^m(\xi_1)\bar{P}_n^m(\eta_1) = \frac{2n+1}{2}\sum_{l=n}^{\infty}{}'\frac{1}{(n-l)!!(n+l+1)!!}$$

$$\times\left(\frac{d_1}{d}\right)^{l+1}\sum_{s=l}^{\infty}{}'(-1)^{\frac{s-l}{2}}\frac{2(l+s-1)!!}{(s-l)!!}\bar{Q}_s^m(\xi_2)\bar{P}_s^m(\eta_2). \tag{29}$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\bar{P}_n^m(\xi_1)\bar{P}_n^m(\eta_1) = \frac{2n+1}{2}\sum_{s=m}^{n}{}'$$

$$\times\left(\sum_{l=s}^{n}{}'\frac{2(-1)^{\frac{n-l}{2}}(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l-s)!!(l+s+1)!!}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^l\right)\bar{P}_s^m(\xi_2)\bar{P}_s^m(\eta_2), \tag{30}$$

$$\bar{Q}_n^m(\xi_1)\bar{P}_n^m(\eta_1) = \frac{2n+1}{2}\sum_{s=n}^{\infty}{}'$$

$$\times\left(\sum_{l=n}^{s}{}'\frac{2(-1)^{\frac{s-l}{2}}(s+l-1)!!}{(l-n)!!(s-l)!!(l+n+1)!!}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{l+1}\right)$$

$$\times\bar{Q}_s^m(\xi_2)\bar{P}_s^m(\eta_2). \tag{31}$$

Введем обозначения для коэффициентов разложений (30), (31)

$$\tilde{\delta}_{ns}^{(1)}(d_1,d_2) = \frac{2n+1}{2}$$

$$\times\sum_{l=s}^{n}{}'\frac{2(-1)^{\frac{n-l}{2}}(n+l-1)!!}{(n-l)!!(l-s)!!(l+s+1)!!}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^l,\qquad n \ge s, \tag{32}$$

$$\tilde{\delta}_{ns}^{(3)}(d_1, d_2) = \frac{2n+1}{2} \times \sum_{l=n}^{s}{}' \frac{2(-1)^{\frac{s-l}{2}}(s+l-1)!!}{(l-n)!!(s-l)!!(l+n+1)!!} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{l+1}, \quad n \le s. \tag{33}$$

При других соотношениях между индексами n и s соответствующие коэффициенты равны нулю. Отметим, что коэффициенты (32), (33) представляются в виде конечных сумм. В случае $d_1 = d_2$ обе сфероидальные системы сливаются в одну, а приведенные выше коэффициенты переходят в символы Кронеккера

$$\tilde{\delta}_{ns}^{(i)}(d_1, d_1) = \delta_s^n. \tag{34}$$

Таким образом, матрицы $\tilde{\Delta}^{(i)}(d_1,d_2) = \{\tilde{\delta}_{ns}^{(i)}(d_1,d_2)\}_{n,s=m}^{\infty}$ являются нижнетреугольными ($\tilde{\delta}_{ns}^{(1)}(d_1, d_2) = 0$ при $n < s$) и верхнетреугольными ($\tilde{\delta}_{ns}^{(3)}(d_1, d_2) = 0$ при $n > s$) соответственно.

Если совершить переход от первой системы ко второй, а затем снова к первой системе, то получим соотношение

$$\tilde{\Delta}^{(i)}(d_1, d_2)\ \tilde{\Delta}^{(i)}(d_2, d_1) = I, \tag{35}$$

где I — единичная матрица. Из этого равенства следует, что для получения обратной матрицы достаточно поменять местами параметры, от которых она зависит:

$$\left(\tilde{\Delta}^{(i)}(d_1, d_2)\right)^{-1} = \tilde{\Delta}^{(i)}(d_2, d_1). \tag{36}$$

Из приведенных выше соотношений можно получить формулы для базисных функций:

$$\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) = \sum_{s=m}^{n}{}' \delta_{ns}^{(1)}(d_1, d_2)\ \Psi_{ms}^{(1)}(\xi_2, \eta_2, \varphi), \tag{37}$$

$$\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1, \eta_1, \varphi) = \sum_{s=n}^{\infty}{}' \delta_{ns}^{(3)}(d_1, d_2)\ \Psi_{ms}^{(3)}(\xi_2, \eta_2, \varphi), \tag{38}$$

где

$$\delta_{ns}^{(1)}(d_1, d_2) = \left(\left(\frac{d_1}{2}\right)^n N_{mn}\right)\tilde{\delta}_{ns}^{(3)}(d_1, d_2)\left(\left(\frac{d_2}{2}\right)^s N_{mn}\right)^{-1}, \tag{39}$$

$$\delta_{ns}^{(3)}(d_1, d_2) = \left(\left(\frac{d_1}{2}\right)^{-(n+1)} N_{mn}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\right)\tilde{\delta}_{ns}^{(3)}(d_1, d_2) \times \left(\left(\frac{d_2}{2}\right)^{-(s+1)} N_{ms}\frac{(s-m)!}{(s+m)!}\right)^{-1}. \tag{40}$$

Введем векторы базисных функций $\Psi^i(\xi, \eta, \varphi) = \{\Psi_{mn}^{(i)}(\xi,\eta,\varphi)\}$ и матрицы $\Delta^{(i)}(d_1,d_2) = \{\delta_{ns}^{(i)}(d_1,d_2)\}_{n,s=m}^{\infty}$. Теперь соотношения между базисными функциями в разных системах можно записать в матричном виде:

$$\Psi^i(\xi_1, \eta_1, \varphi) = \Delta^{(i)}(d_1, d_2)\ \Psi^i(\xi_2, \eta_2, \varphi). \tag{41}$$

Отметим, что свойства матриц $\Delta^{(i)}(d_1, d_2)$ аналогичны свойствам исходных матриц $\tilde{\Delta}^{(i)}(d_1, d_2)$, в частности, они являются треугольными и для них справедливы соотношения (34)–(36). Полученные выше результаты могут быть полезными при рассмотрении аналогичных соотношений между волновыми сфероидальными гармониками в разных системах координат [20].

1.4. Разложения скалярных потенциалов по сфероидальным гармоникам

Перейдем к построению решения рассматриваемой электростатической задачи с использованием двух сфероидальных систем. Основная идея заключается в том, чтобы в окрестности внешней границы частицы потенциалы полей представлять в виде разложений по сфероидальным гармоникам первой системы, а в окрестности внутренней границы с ядром потенциалы полей представлять в виде аналогичных разложений, но по сфероидальным гармоникам второй системы. Наличие связи (37), (38) между этими гармониками позволяет наиболее просто провести сшивку данных разложений одних и тех же потенциалов внутри оболочки частицы.

Уравнение поверхности частицы S_1 в первой сфероидальной системе имеет вид

$$\xi_1 = \xi_1^0. \tag{42}$$

Разложения потенциалов полей в окрестности этой поверхности с учетом их поведения в начале координат и на бесконечности можно записать следующим образом в случае потенциалов для внешнего поля:

$$\Phi_1^1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^{(1)}\, \Psi_{ml}^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \varphi). \tag{43}$$

С учетом осевой симметрии частицы можно рассматривать только два случая ориентации внешнего поля. Предположим, что единичное внешнее поле направлено вдоль ее оси вращения:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}_z. \tag{44}$$

Соответствующий скалярный потенциал имеет вид

$$\Phi_1^1 = -z = -\frac{d}{2}\xi\eta = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{d}{2}\ P_1(\xi)\bar{P}_1(\eta) = -a_{01}^{(1)}\, \Psi_{01}^{(1)}(\xi_1, \eta_1, \varphi), \tag{45}$$

при этом коэффициент

$$a_{01}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, \tag{46}$$

в то время как все остальные коэффициенты равны нулю.

Во втором случае единичное внешнее поле перпендикулярно оси симметрии частицы:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{i}_x, \tag{47}$$

при этом соответствующий потенциал записывается следующим образом:

$$\Phi_1^1 = -x = -\frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\cos\varphi$$
$$= -\sqrt{\frac{4}{3}}\,\frac{d}{2}\,P_1^1(\xi)\bar{P}_1^1(\eta)\cos\varphi = a_{11}^{(1)}\,\Psi_{11}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi). \tag{48}$$

Итак, разложение (43) содержит одно слагаемое, при этом отличен от нуля коэффициент

$$a_{11}^{(1)} = -\sqrt{\frac{4}{3}}. \tag{49}$$

Разложение „рассеянного“ поля записывается следующим образом:

$$\Phi_2^1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} b_{ml}^{(1)}\,\Psi_{ml}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi). \tag{50}$$

Регулярный и иррегулярный потенциалы в оболочке в окрестности поверхности частицы могут быть представлены в виде разложений по базисным функциям первой сфероидальной системы:

$$\begin{matrix}\Phi_1^2\\ \Phi_2^2\end{matrix} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{1,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\\ b_{1,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi).\end{matrix} \tag{51}$$

Заметим, что подобная запись справедлива также и для потенциалов внешнего и „рассеянного“ излучений.

Уравнение поверхности ядра частицы S_2 во второй сфероидальной системе имеет вид

$$\xi_2 = \xi_2^0. \tag{52}$$

Потенциалы полей в оболочке в окрестности поверхности ядра частицы могут быть представлены в виде разложений по базисным функциям второй сфероидальной системы:

$$\begin{matrix}\Phi_1^2\\ \Phi_2^2\end{matrix} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{2,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(1)}(\xi_2,\eta_2,\varphi)\\ b_{2,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(3)}(\xi_2,\eta_2,\varphi).\end{matrix} \tag{53}$$

Наконец, потенциал поля внутри ядра имеет вид

$$\Phi_1^3 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^{(3)}\,\Psi_{ml}^{(1)}(\xi_2,\eta_2,\varphi). \tag{54}$$

Коммутативность операторов T и $\tilde{T}$ для осесимметричных несофокусных сфероидальных частиц (15) означает, что электростатическая задача для них решается независимо для каждого слагаемого разложений потенциалов Φ в ряды Фурье по азимутальному углу φ, т.е. в этом случае имеет место разделение относительно переменной φ. В силу этого в случае вертикальной ориентации внешнего поля следует рассматривать только члены с индексом $m = 0$ (45), а при горизонтальной ориентации — только члены с индексом $m = 1$ (48). Отметим, что в разложениях потенциалов появились бы функции $\sin m\varphi$ вместо $\cos m\varphi$ при рассмотрении внешнего поля, направленного вдоль оси y. Здесь результаты получаются точно такие же, как и во втором случае, в силу осевой симметрии исходной задачи.

Проведем сшивку разложений (51) и (52), используемых внутри оболочки:

$$\sum_{n=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\\ b_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\end{matrix} = \sum_{l=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{2,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(1)}(\xi_2,\eta_2,\varphi)\\ b_{2,\,ml}^{(2)}\,\Psi_{ml}^{(3)}(\xi_2,\eta_2,\varphi).\end{matrix} \tag{55}$$

Базисные функции в правых частях этих соотношений запишем через базисные функции, используемые в левых частях:

$$\sum_{n=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\\ b_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\end{matrix}$$
$$= \sum_{l=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{2,\,ml}^{(2)}\left(\sum\limits_{n=m}^{l}{}'\,\delta_{ln}^{(1)}(d_2,d_1)\,\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\right)\\ b_{2,\,ml}^{(2)}\left(\sum\limits_{n=l}^{\infty}{}'\,\delta_{ln}^{(3)}(d_2,d_1)\,\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\right).\end{matrix} \tag{56}$$

Изменяя порядок суммирования в правых частях этих равенств, получим

$$\sum_{n=m}^{\infty}\begin{matrix} a_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\\ b_{1,\,mn}^{(2)}\,\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\end{matrix}$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty}\begin{matrix} \left(\sum\limits_{l=n}^{\infty}{}'\,\delta_{ln}^{(1)}(d_2,d_1)\,a_{2,\,ml}^{(2)}\right)\Psi_{mn}^{(1)}(\xi_1,\eta_1,\varphi)\\ \left(\sum\limits_{l=m}^{n}{}'\,\delta_{ln}^{(3)}(d_2,d_1)\,b_{2,\,ml}^{(2)}\right)\Psi_{mn}^{(3)}(\xi_1,\eta_1,\varphi).\end{matrix} \tag{57}$$

В силу линейной независимости базисных функций имеем

$$\begin{matrix} a_{1,\,mn}^{(2)}\\ b_{1,\,mn}^{(2)}\end{matrix} = \sum_{l=m}^{\infty}{}'\begin{matrix} \delta_{ln}^{(1)}(d_2,d_1)\,a_{2,\,ml}^{(2)}\\ \delta_{ln}^{(3)}(d_2,d_1)\,b_{2,\,ml}^{(2)}.\end{matrix} \tag{58}$$

Напомним, что матрицы $\Delta^{(j)}$ являются треугольными (32), (33). В соотношении (58) появляются транспонированные матрицы $\Delta^{(j)\,T}(d_2,d_1)$ В матричном виде формулу (58) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^{(2)}\\ \mathbf{b}_1^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta^{(1)\,T}(d_2,d_1) & 0\\ 0 & \Delta^{(3)\,T}(d_2,d_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{a}_2^{(2)}\\ \mathbf{b}_2^{(2)}\end{pmatrix}. \tag{59}$$

Ниже эти соотношения будут использоваться при построении решения рассматриваемой задачи.

1.5. Формула для поляризуемости частицы

Связь между „рассеянным“ полем и внешним полям описывается T-матрицей, связывающей коэффициенты разложений соответствующих потенциалов:

$$\mathbf{a}^{(1)} = T\ \mathbf{b}^{(1)}, \tag{60}$$

где введены векторы коэффициентов $\mathbf{a}^{(1)} = \{a_{ml}^{(1)}\}$ и $\mathbf{b}^{(1)} = \{b_{ml}^{(1)}\}$.

Важную роль играет поведение радиальных функций в начале координат и на бесконечности. Из приведенных выше соотношений ясно, что радиальные функции $P_l^m(\xi)$ обеспечивают конечность потенциалов регулярных полей, включая внешнее и внутреннее поля в ядре. Радиальные функции $Q_l^m(\xi)$ обеспечивают убывание к нулю потенциала „рассеянного" поля на бесконечности. Более того, при $\xi \longrightarrow \infty$ радиальные функции 2-го рода убывают как $Q_l^m(\xi) \longrightarrow \xi^{-(l+1)}$. В частности, нетрудно найти поведение функций, соответствующих дипольной составляющей:

$$Q_1(\xi) \longrightarrow \frac{1}{3\xi^2}, \qquad Q_1^1(\xi) \longrightarrow \frac{2}{3\xi^2}. \tag{61}$$

В дальней зоне (при $r \longrightarrow \infty$ и, следовательно, $\xi \longrightarrow \infty, \xi d/2 \longrightarrow r, \eta \longrightarrow \cos\theta$) потенциалы „рассеянного" поля для вертикальной ориентации внешнего поля имеют вид

$$\Phi_2^1 = -b_{01}^{(1)} \frac{\cos\theta}{3r^2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = -\frac{\cos\theta}{3r^2} \frac{b_{01}^1}{a_{01}^1}, \tag{62}$$

а идеального вертикально ориентированного диполя [1]

$$\Phi^{\mathrm{dip}} = -\alpha \frac{\cos\theta}{4\pi r^2} \tag{63}$$

соответственно. Сравнивая данные соотношения, получим формулу для поляризуемости

$$\alpha_z = \frac{4\pi}{3} \frac{b_{01}^{(1)}}{a_{01}^{(1)}} = \frac{4\pi}{3}\ T_{11}, \tag{64}$$

где T_{11} — соответствующий элемент T-матрицы. При горизонтальной ориентации внешнего поля соответственно имеем

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{4\pi}{3} \frac{b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{4\pi}{3}\ T_{11}. \tag{65}$$

Здесь было учтено поведение соответствующих дипольных составляющих потенциалов на бесконечности (19), (61).

2. Решение электростатической задачи

Данные выше представления полей удовлетворяют уравнениям Максвелла и условиям на бесконечности, а неизвестные коэффициенты разложений можно найти из граничных условий (11) или интегральных уравнений (12). В первом случае применяется метод разделения переменных (SVM), а во втором — метод расширенных граничных условий (EBCM). Покажем, что они для рассматриваемой задачи эквивалентны, т. е. приводят к одним и тем же бесконечным системам линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) для определения неизвестных коэффициентов.

Сначала рассмотрим метод EBCM. Для алгебраизации интегральных уравнений на поверхности частицы подставим в них разложения потенциалов и функции Грина в первой сфероидальной системе. Систему для определения неизвестных коэффициентов можно записать в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(1)} &= A_{31}^{(1)}\ \ \mathbf{a}_1^{(2)} + A_{33}^{(1)}\ \ \mathbf{b}_1^{(2)}, \\ \mathbf{b}^{(1)} &= A_{11}^{(1)}\ \ \mathbf{a}_1^{(2)} + A_{13}^{(1)}\ \ \mathbf{b}_1^{(2)}. \end{aligned} \tag{66}$$

Аналогично для алгебраизации граничных условий на поверхности ядра частицы подставим в них разложения потенциалов и функции Грина во второй сфероидальной системе. В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^{(2)} &= A_{31}^{(2)}\ \ \mathbf{a}^{(3)}, \\ \mathbf{b}_1^{(2)} &= A_{11}^{(2)}\ \ \mathbf{a}^{(3)}, \end{aligned} \tag{67}$$

где введены векторы $\mathbf{a}_i^{(j)} = \left\{a_{ml}^{j}\right\}_m^\infty$, $\mathbf{b}_i^{(j)} = \left\{b_{ml}^{j}\right\}_m^\infty$ и матрицы

$$A_{31}^{(j)} = \left\{\delta_l^n + (\varepsilon_2 - 1)\ L_{nl,\ m}^{j,\ 31}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{33}^{(j)} = \left\{(\varepsilon_2 - 1)\ L_{nl,\ m}^{j,\ 33}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{11}^{(j)} = \left\{-(\varepsilon_2 - 1)\ L_{nl,\ m}^{j,\ 11}\right\}_m^\infty,$$

$$A_{13}^{(j)} = \left\{\delta_l^n - (\varepsilon_2 - 1)\ L_{nl,\ m}^{j,\ 13}\right\}_m^\infty. \tag{68}$$

Выше использовано обозначение для интегралов

$$L_{nl,\ m}^{j,\ ki} = \int\limits_{S_j} \Psi_{mn}^{(k)}(\mathbf{r}) \frac{\partial \Psi_{ml}^{(i)}(\mathbf{r})}{\partial n} \mathrm{d}s, \tag{69}$$

которые зависят от индекса j через поверхность интегрирования, при этом следующие два верхние индекса матриц показывают, какого рода радиальные функции входят в их выражения.

Принимая во внимание ортогональность угловых сфероидальных гармоник на соответствующих поверхностях (22), поверхностные интегралы (69) могут быть записаны следующим образом:

$$L_{nl,\ m}^{j,\ 31} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{d_j}{2}\right)^{l-n}((\xi_j^0)^2-1)P_l^{m\prime}(\xi_j^0)Q_n^m(\xi_j^0)\ \delta_l^n,$$

$$L_{nl,\ m}^{j,\ 33} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{d_j}{2}\right)^{-(n+l+1)} \times ((\xi_j^0)^2-1)Q_l^{m\prime}(\xi_j^0)Q_n^m(\xi_j^0)\ \delta_l^n,$$

$$L_{nl,\ m}^{j,\ 11} = \left(\frac{d_j}{2}\right)^{(n+l+1)}((\xi_j^0)^2-1)P_l^{m\prime}(\xi_j^0)P_n^m(\xi_j^0)\ \delta_l^n,$$

$$L_{nl,\ m}^{j,\ 13} = \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{d_j}{2}\right)^{n-l} \times ((\xi_j^0)^2-1)Q_l^{m\prime}(\xi_j^0)P_n^m(\xi_j^0)\ \delta_l^n, \quad j=1,2. \tag{70}$$

Таким образом, все матрицы $A_{ki}^{(j)}$ являются диагональными.

Покажем, что для рассматриваемой задачи метод SVM эквивалентен методу EBCM. Рассмотрим случай вертикальной ориентации внешнего поля и вытянутый сфероид. Для алгебраизации граничных условий (11) на поверхности частицы подставим в них разложения потенциалов в первой сфероидальной системе. С учетом ортогональности угловых сфероидальных гармоник на этой поверхности (22) получим

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^n P_n(\xi_1^0)a_{0n}^{(1)} + \left(\frac{d_1}{2}\right)^{-(n+1)} Q_n(\xi_1^0)b_{0n}^{(1)} = \left(\frac{d_1}{2}\right)^n P_n(\xi_1^0)a_{1,\,0n}^{(2)} + \left(\frac{d_1}{2}\right)^{-(n+1)} Q_n(\xi_1^0)b_{1,\,0n}^{(2)},$$

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^n P_n'(\xi_1^0)a_{0n}^{(1)} + \left(\frac{d_1}{2}\right)^{-(n+1)} Q_n'(\xi_1^0)b_{0n}^{(1)} = \varepsilon_2\left(\left(\frac{d_1}{2}\right)^n P_n'(\xi_1^0)a_{1,\,0n}^{(2)} + \left(\frac{d_1}{2}\right)^{-(n+1)} Q_n'(\xi_1^0)b_{1,\,0n}^{(2)}\right). \tag{71}$$

Данная система может быть легко решена относительно коэффициентов $a_{0n}^{(1)}$ и $b_{0n}^{(1)}$. В матричном виде ее можно записать следующим образом:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \tilde{A}_{31}^{(1)}\ \mathbf{a}_1^{(2)} + \tilde{A}_{33}^{(1)}\ \mathbf{b}_1^{(2)},$$
$$\mathbf{b}^{(1)} = \tilde{A}_{11}^{(1)}\ \mathbf{a}_1^{(2)} + \ \mathbf{b}_1^{(2)}. \tag{72}$$

Легко показать, что она совпадает с системой (66). Для примера рассмотрим первую матрицу:

$$\left(\tilde{A}_{31}^{(1)}\right)_{nn} = \frac{P_n(\xi_1^0)Q_n'(\xi_1^0) - \varepsilon_2 P_n'(\xi_1^0)Q_n(\xi_1^0)}{P_n(\xi_1^0)Q_n'(\xi_1^0) - P_n'(\xi_1^0)Q_n(\xi_1^0)} = 1 + (\varepsilon_2 - 1)((\xi_j^0)^2 - 1)P_n'(\xi_1^0)Q_n(\xi_1^0), \tag{73}$$

что совпадает с соответствующим элементом матрицы $A_{31}^{(1)}$ (см. (68) и (70) при $m=0$). Выше было использовано выражение для вронскиана:

$$P_n(\xi_1^0)Q_n'(\xi_1^0) - P_n'(\xi_1^0)Q_n(\xi_1^0) = \frac{-1}{(\xi_1^0)^2 - 1}. \tag{74}$$

Для других матриц сравнение проводится аналогично. Итак, для рассматриваемого подхода с использованием двух подходящих сфероидальных систем методы EBCM и SVM эквивалентны.

Теперь соберем воедино результаты трех шагов, а именно соотношения (66), (59) и (67). Общую систему можно записать в виде

$$\mathbf{a}^{(1)} = A_1\ \mathbf{a}^{(J+1)},$$
$$\mathbf{b}^{(1)} = A_2\ \mathbf{a}^{(J+1)}, \tag{75}$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{31}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta^{(1)\,T}(d_2, d_1) & 0 \\ 0 & \Delta^{(3)\,T}(d_2, d_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31}^{(2)} \\ A_{11}^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты разложения потенциала „рассеянного“ излучения, а именно

$$\mathbf{b}^{(1)} = A_2(A_1)^{(-1)}\ \mathbf{a}^{(1)} = T\ \mathbf{a}^{(1)}. \tag{77}$$

Заметим, что для приближения Релея потребуется только один элемент этой матрицы – T_{11}.

3. Несофокусные многослойные сфероиды

Пусть многослойная сфероидальная частица имеет J слоев. Построение T-матрицы для этого случая осуществляется аналогично вышеприведенному алгоритму для двухслойного сфероида. Используя те же обозначения, получим

$$T = A_2(A_1)^{(-1)}, \tag{78}$$

где

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{31}^{(1)} & A_{33}^{(1)} \\ A_{11}^{(1)} & A_{13}^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta^{(1)\,T}(d_2, d_1) & 0 \\ 0 & \Delta^{(3)\,T}(d_2, d_1) \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_{31}^{(J-1)} & A_{33}^{(J-1)} \\ A_{11}^{(J-1)} & A_{13}^{(J-1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta^{(1)\,T}(d_J, d_{J-1}) & 0 \\ 0 & \Delta^{(3)\,T}(d_J, d_{J-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{31}^{(J)} \\ A_{11}^{(J)} \end{pmatrix}. \tag{79}$$

В частном случае конфокального (софокусного) сфероида задача принципиально упрощается. Отсутствует необходимость проводить сшивку, поэтому матрицы $\Delta^{(j)\,T}(d,d)$ становятся единичными. В формуле (79) остаются только диагональные матрицы $A_{ik}^{(j)}$. В результате задача рассеяния имеет решение в явном виде. Поскольку в рамках приближения Релея требуется только один элемент T_{11}, то для вычисления поляризуемости частицы требуются лишь первые элементы соответствующих матриц:

$$L_{11,\ 0}^{j,\ 31} = ((\xi_j)^2 - 1)(P_1(\xi_j))' Q_1(\xi_j)$$
$$= ((\xi_j)^2 - 1)\left(\frac{\xi_j}{2}\ln\frac{\xi_j+1}{\xi_j-1} - 1\right) = L_z^j,$$

$$L_{11,\ 0}^{j,\ 33} = \left(\frac{d}{2}\right)^{-3}((\xi_j)^2 - 1)Q_1(\xi_j)\ (Q_1(\xi_j))' = \frac{L_z^j(L_z^j - 1)}{\tilde{V}_j},$$

$$L_{11,\ 0}^{j,\ 11} = \left(\frac{d}{2}\right)^{3}((\xi_j)^2 - 1)(P_1(\xi_j))' P_1(\xi_j)$$
$$= a_j\ (b_j)^2 = \frac{3}{4\pi}\ V_j = \tilde{V}_j,$$
$$L_{11,\ 0}^{j,\ 13} = ((\xi_j)^2 - 1)(Q_1(\xi_j))' P_1(\xi_j)$$
$$= \xi_j((\xi_j)^2 - 1)(Q_1(\xi_j))' = L_z^j - 1. \qquad (80)$$

Для двухслойных и многослойных софокусных сфероидов формулы (76), (80) дают известный результат для поляризуемости частицы [1,21]. Для неконфокальных частиц соответствующие формулы будут давать первое приближение, в рамках которого каждая матрица в этих формулах заменяется первым элементом.

Выводы

1. В работе построено приближение Релея для многослойных несофокусных сфероидальных частиц, базирующиеся на представлении потенциалов полей внутри неконфокальных оболочек в виде разложений по сфероидальным гармоникам в системах, где поверхности слоев являются координатными.

2. Для сшивки двух разложений внутри каждого слоя использованы полученные авторами соотношения между сфероидальными гармониками уравнения Лапласа в системах с разными фокусными расстояниями.

3. Методы расширенных граничных условий (EBCM) и разделения переменных (SVM) оказались эквивалентными, поскольку привели к одинаковым результатам при решении задачи.

4. Поляризуемость частицы записана через бесконечномерные матрицы, элементы которых определяются либо явным образом, либо в виде конечных сумм. В частных случаях многослойных софокусных сфероидов данное решение полностью согласуется с известными результатами.

Работа была поддержана в 2018 г. грантом ГУАП и грантами РФФИ 16-02-00194а и 18-52-52006.

Список литературы

[1] *Борен К., Хаффмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.
[2] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: ИЛ, 1958.
[3] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[4] *Климов В.В.* Наноплазмоника М.: Физматлит, 2009.
[5] *Mishchenko M.I., Hovenier J.W., Travis L.D.* Light Scattering by Nonspherical Particles. San Diego: Academic Press, 2000.
[6] *Mishchenko M.I., Travis L.D., Lacis A.A.* Scattering, Absorption and Emission of Light by Small Particles. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
[7] *Фарафонов В.Г.* // Дифференц. уравн. 1983. Т. 19. С. 1765.
[8] *Voshchinnikov N.V., Farafonov V.G.* // Astrophys. Space Sci. 1993. V. 204. P. 9.
[9] *Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Somsikov V.V.* // Appl. Opt. 1996. V. 35. P. 5412.
[10] *Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V.* // Appl. Opt. 2012. V. 51. P. 1586.
[11] *Han Y., Zhang H., Sun X.* // Appl. Phys. 2006. V. B 84. P. 485.
[12] *Фарафонов В.Г.* // Опт. спектр. 2013. Т. 114. № 3. С. 462.
[13] *Фарафонов В.Г.* // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. № 3. С. 441.
[14] *Kang H., Milton G.W.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 2008. V. 188. P. 93.
[15] *Фарафонов В.Г., Устимов В.И., Соколовская М.В.* // Опт. и спектр. 2016. Т. 120. № 3. С. 470.
[16] *Farafonov V.G., Il'in V.B.* // Light Scattering Reviews. / Ed. by Kokhanovsky A.A. Berlin: Springer-Praxis, 2006. P. 125.
[17] *Комаров В.И., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
[18] *Jansen G.* // J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 1375.
[19] *Антонов В.А., Баранов А.С.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. С. 80.
[20] *Farafonov V.G., Voshchinnikov N.V., Semenova E.G.* // J. Math. Sci. 2016. V. 214. P. 382.
[21] *Farafonov V.G., Sokolovskaja M.V.* // J. Math. Sci. 2013. V. 194. P. 104.