

## О возбуждении поверхностных волн световыми пучками ограниченной апертуры

© А.Б. Петрин

Объединенный институт высоких температур РАН,  
125412 Москва, Россия  
e-mail: a\_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 21.08.2018 г.  
В окончательной редакции 29.08.2018 г.

Рассмотрен теоретический метод исследования отражения плоской электромагнитной волны от плоско-слоистой структуры в схеме Кречмана в строгой формулировке. Исследовано возбуждение поверхностной волны с учетом дифракционных явлений, связанных с ограниченным размером апертуры падающей волны. Внимание уделено применению развитой теории к исследованию эффекта Гуса–Хенхена. Исследовано интерференция поверхностных плазмонных волн при их возбуждении на поверхности металлической пленки. Обсуждены возможные приложения полученных результатов.

DOI: 10.21883/OS.2018.12.46947.243-18

### Введение и постановка задачи

В настоящее время большое внимание уделяется созданию многоканальных оптических сенсорных систем, применяемых в биологических, химических и физических исследованиях и использующих поверхностные плазмонные (или плазмонно-поляритонные) волны для диагностики изменений распространения поверхностной волны, вызванных изменением поверхностных свойств исследуемой среды [1–4]. Такие волны, например, распространяются вдоль поверхности металла, локализуясь вблизи его поверхности [5,6]. Часто используемым способом возбуждения поверхностных плазмонов является метод Кречмана [7].

В рамках схемы Кречмана [8] (рис. 1) согласование поверхностной плазмонной волны 1 на поверхности металлической пленки 2 и падающей волны 3 осуществляется с помощью стеклянной призмы 4. Линейно поляризованная монохроматическая волна  $E^i$  падает на металлическую пленку со стороны призмы. Вектор напряженности электрического поля падающей волны направлен в плоскости падения ( $p$ -поляризация). Призма необходима для согласования падающей плоской волны и поверхностной плазмонной волны по волновому числу. Волновое число поверхностной плазмонной волны больше волнового числа плоской волны в свободном пространстве той же частоты [9,10]. Чтобы обеспечить равенство волновых чисел падающей 3, отраженной 5 и поверхностной плазмонной 1 волн вдоль поверхности металла (рис. 1), необходимо, чтобы падающая волна подходила к пленке из оптически более плотной среды (где волновое число больше, чем в свободном пространстве). Показатель преломления призмы и угол падения подбираются таким образом, чтобы обеспечивалось равенство волновых чисел падающей и поверхностных волн. При этих параметрах в отсутствие металлической пленки (и возбуждения поверхностных плазмонов)

наблюдается полное внутреннее отражение падающей волны.

Эксперименты показывают, что, если угол падения соответствует согласованию по волновому числу падающей и поверхностной плазмонной волн, наблюдается резкое падение коэффициента отражения. Например, при длине падающей волны в вакууме  $\lambda = 633 \text{ nm}$  и толщине пленки серебра, приблизительно равной  $53.8 \text{ nm}$  (эта величина зависит от конкретного значения показателя преломления призмы и частоты падающей волны) наблюдается сильное изменение коэффициента отражения практически от единицы до нуля в окрестности угла падения, соответствующего согласованию свободной и поверхностной плазмонной волн. При небольшом отклонении угла падения от угла согласования коэффициент отражения возвращается практически от нуля к единичному значению.

Так как поле поверхностной плазмонной волны сосредоточено в тонком слое вблизи поверхности металла, характер отражения в схеме Кречмана сильно зависит

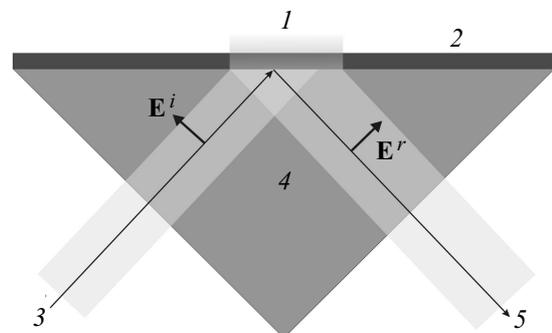


Рис. 1. Возбуждение поверхностных плазмонов 1 на поверхности металлической пленки 2 по схеме Кречмана. Падающая волна 3 в призме 4 порождает поверхностную плазмонную волну 1 и отраженную волну 5.

от изменений показателя преломления в тонком слое вблизи поверхности. Именно на этом основывается широкое применение схемы Кречмана для создания различного рода датчиков, обладающих высокой чувствительностью [11]. Исследования показали, что чувствительность определяется угловой шириной минимума отражения [12], которая, в свою очередь, определяется поглощением в металле пленки. Чем меньше поглощение в металле, тем уже минимум.

Чтобы увеличить чувствительность датчиков за счет уменьшения угловой ширины минимума, было предложено уменьшать толщину пленки металла. Оказалось, что у поверхностной плазмонной волны в тонкой пленке затухание уменьшается с уменьшением толщины пленки. Однако для согласования поверхностной волны в схеме Кречмана потребовалось введение дополнительного согласующего слоя между призмой и металлической пленкой [13–16], причем в некоторых случаях даже многопленочного слоя [17,18].

Поверхностные волны могут распространяться и в диэлектрических пленках планарных волноводов [19]. В связи с этим было показано [20,21], что в схеме Кречмана можно возбуждать поверхностную волну (не обязательно поверхностную плазмонную), которая согласуется по волновому числу с падающей волной. В этом случае в качестве волновода поверхностной волны можно использовать пленку (или несколько пленок) оптически плотного вещества (с большим показателем преломления), отделенного от призмы пленкой согласующего вещества с низким показателем преломления.

Возникновение минимума отражения при возбуждении поверхностной волны сопровождается максимумом амплитуды поверхностной волны на внешней границе пленочной структуры с возбужденной поверхностной волной. Эта амплитуда намного больше амплитуды падающей волны. Так, было показано, что амплитуда продольной составляющей напряженности электрического поля возрастает в примерно 5.8 раз в случае возбуждения поверхностной плазмонной волны на поверхности серебряной пленки и возрастает примерно в 109 раз в случае возбуждения поверхностной волны в диэлектрической поверхностной структуре [20,21] со специально подобранными параметрами. Это явление было исследовано для случая, когда апертура падающей волны ограничена. Оказалось, что при этом отражение будет происходить не совсем так, как в случае бесконечной структуры и идеально плоских волн. Так, в работе [22], было показано, что в случае ограниченной апертуры падающей волны острый минимум отражения остается, но отраженные волны имеют угловое распределение в пределах угла дифракции.

Данная работа посвящена исследованию пространственной локализации электромагнитного поля при возбуждении поверхностных волн и разработке методов увеличения локального усиления электрического поля

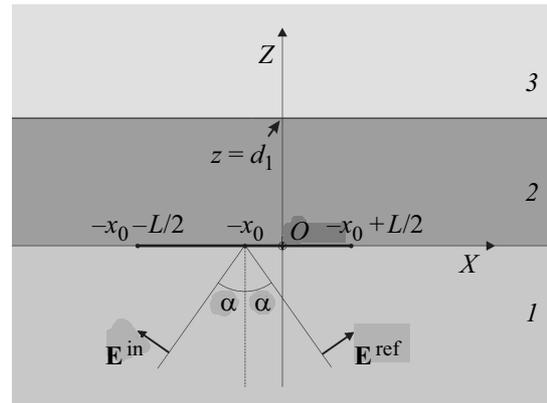


Рис. 2. Геометрия электромагнитной задачи. Плоская волна  $p$ -поляризации падает из призмы 1 на металлическую пленку 2, за пленкой находится вакуум 3.

в поверхностном слое. Эта общая проблема рассматривается на примере возбуждения поверхностных плазмонов. Из рассмотрения этого конкретного и важного практического примера будет ясно, как обобщить полученные результаты на общий случай возбуждения поверхностной волны в многопленочных структурах как в работах [20,22].

### Задача падения плоской электромагнитной волны ограниченной апертуры на плоскоструктурную структуру

Рассмотрим падение плоской монохроматической волны с циклической частотой  $\omega$  единичной амплитуды (рис. 2) из однородного полупространства 1 (призмы), заполненного однородным изотропным диэлектриком с показателем преломления  $n_1$ , под углом  $\alpha$  к нормали на плоскую пленку толщины  $d_1$ . Обобщение на произвольное количество пленок будет дано ниже. Предполагается для определенности, что пленка металлическая с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$  на рассматриваемой частоте  $\omega$ , а за пленкой находится однородное полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_3$  (свободное пространство). Пусть размер апертуры  $D$  волнового фронта в плоскости  $XZ$  таков, что волна падает на отрезок границы раздела длины  $L$ , т.е.  $D = L \cos \alpha$ . В дальнейших выкладках используются некоторые идеи метода работы [23, с. 377—378].

Уравнения Максвелла в рассматриваемых областях можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{E}_j = i\omega \mathbf{B}_j, \tag{1}$$

$$\text{rot } \mathbf{B}_j = -i\omega \epsilon_j \mu_j \mathbf{E}_j, \tag{2}$$

где  $\mathbf{E}_j$  и  $\mathbf{B}_j$  — векторы напряженности электрического поля и индукция магнитного поля в области с номером  $j$ ;  $j = 1$  соответствует полупространству 1, для

которого  $z < 0$ ;  $j = 2$  соответствует области пленки 2 ( $0 < z < d_1$ );  $j = 3$  соответствует свободному полупространству ( $z > d_1$ ). Комплексное представление во времени предполагается в виде  $e^{-i\omega t}$ .

Будем рассматривать поля, не зависящие от координаты  $y$  и имеющие только компоненты  $x$  и  $z$  вектора напряженности электрического поля. Из (1), (2) следует волновое уравнение для электрического поля:

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_j - \omega^2 \mu_j \varepsilon_j \mathbf{E}_j = 0. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\text{div } \mathbf{D}_j = 0$  или  $\partial_x E_{j,x} + \partial_z E_{j,z} = 0$ , из (3) получаем уравнения для компонент  $E_{j,x}$  и  $E_{j,z}$ :

$$\partial_{xx}^2 E_{j,x} + \partial_{zz}^2 E_{j,x} + \omega^2 \mu_j \varepsilon_j E_{j,x} = 0, \quad (4)$$

$$\partial_{zz}^2 E_{j,z} + \partial_{xx}^2 E_{j,z} + \omega^2 \mu_j \varepsilon_j E_{j,z} = 0, \quad (5)$$

Представим компоненты электрических полей в виде фурье-разложений:

$$E_{j,x}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{j,x}(\xi, z) e^{i\xi x} d\xi,$$

$$E_{j,z}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}_{j,z}(\xi, z) e^{i\xi x} d\xi,$$

где фурье-образы определяются интегралами:

$$\tilde{E}_{j,x}(\xi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{j,x}(x, z) e^{-i\xi x} dx,$$

$$\tilde{E}_{j,z}(\xi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{j,z}(x, z) e^{-i\xi x} dx.$$

Тогда для фурье-образов полей из (4) и (5) получим уравнения

$$\frac{d^2 \tilde{E}_{j,x}}{dz^2} + (\omega^2 \mu_j \varepsilon_j - \xi^2) \tilde{E}_{j,x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \tilde{E}_{j,z}}{dz^2} + (\omega^2 \mu_j \varepsilon_j - \xi^2) \tilde{E}_{j,z} = 0. \quad (7)$$

Решением этих уравнений являются  $\tilde{E}_{j,x}^{\pm} = \hat{E}_{j,x}^{\pm} e^{\pm ik_{j,z} z}$ ,  $\tilde{E}_{j,z}^{\pm} = \hat{E}_{j,z}^{\pm} e^{\pm ik_{j,z} z}$ , где  $\hat{E}_{j,x}^+$ ,  $\hat{E}_{j,x}^-$ ,  $\hat{E}_{j,z}^+$ ,  $\hat{E}_{j,z}^-$  — функции только от  $\xi$ , а  $k_{j,z}(\xi) = \sqrt{\omega^2 \mu_j \varepsilon_j - \xi^2}$ .

Общее решение уравнения (3) с поляризацией в плоскости падения и заданной вариацией поля вдоль оси  $X$  для направлений распространения вдоль и против оси  $Z$  можно записать в виде

$$\mathbf{E}_j^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^{\pm}(\xi) \\ 0 \\ \hat{E}_{j,z}^{\pm}(\xi) \end{pmatrix} e^{\pm ik_{j,z}(\xi)z} e^{i\xi x} d\xi, \quad (8)$$

где  $\xi^2 + k_{j,z}^2(\xi) = \omega^2 \mu_j \varepsilon_j$ . Так как  $\text{div } \mathbf{D}_j = 0$ , то  $\varepsilon_j \xi \hat{E}_{j,x}^{\pm} \pm \varepsilon_j k_{j,z}(\xi) \hat{E}_{j,z}^{\pm} = 0$  и выражение (8) можно переписать в виде

реписать в виде

$$\mathbf{E}_j^{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mp \frac{\xi}{k_{j,z}(\xi)} \end{pmatrix} \hat{E}_{j,x}^{\pm}(\xi) e^{\pm ik_{j,z}(\xi)z} e^{i\xi x} d\xi. \quad (9)$$

Запишем теперь поле в рассматриваемых областях в следующем виде: в области 1

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1(x, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+(\xi) e^{+ik_{1,z}(\xi)z} e^{i\xi x} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^-(\xi) e^{-ik_{1,z}(\xi)z} e^{i\xi x} d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

в области 2

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2(x, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{2,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{2,x}^+(\xi) e^{+ik_{2,z}(\xi)z} e^{i\xi x} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\xi}{k_{2,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{2,x}^-(\xi) e^{-ik_{2,z}(\xi)(z-d_1)} e^{i\xi x} d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

в области 3

$$\mathbf{E}_3(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{3,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{3,x}^+(\xi) e^{+ik_{3,z}(\xi)(z-d_1)} e^{i\xi x} d\xi. \quad (12)$$

Полученные выражения для полей в рассматриваемых областях должны удовлетворять известным граничным условиям. Рассмотрим границу первой и второй областей  $z = 0$ . На ней должны быть непрерывны тангенциальные компоненты напряженности электрического поля и нормальные компоненты электрической индукции:

$$E_{1,x}(x, 0) - E_{2,x}(x, 0) = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon_1 E_{1,z}(x, 0) - \varepsilon_2 E_{2,z}(x, 0) = 0, \quad (14)$$

где

$$E_{1,x}(x, 0) = E_{1,x}^+(x, 0) + E_{1,x}^-(x, 0),$$

$$E_{2,x}(x, 0) = E_{2,x}^+(x, 0) + E_{2,x}^-(x, 0),$$

$$E_{1,z}(x, 0) = E_{1,z}^+(x, 0) + E_{1,z}^-(x, 0),$$

$$E_{2,z}(x, 0) = E_{2,z}^+(x, 0) + E_{2,z}^-(x, 0),$$

Заметим, что можно показать, что условие  $\varepsilon_j E_{j,z} = \text{const}$  эквивалентно в нашем случае непрерывности тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля  $B_{j,y}/\mu_j$  (в рассматриваемом случае

у напряженности магнитного поля существует только компонента вдоль оси  $Y$ ).

После несложных преобразований из граничных условий (13) и (14), используя (10) и (11) при  $z = 0$ , получим следующие два уравнения, которые можно переписать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+ \\ \hat{E}_{1,x}^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon_1 \frac{\xi}{k_{1,z}} & \varepsilon_1 \frac{\xi}{k_{1,z}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & e^{ik_{2,z}d_1} \\ -\varepsilon_2 \frac{\xi}{k_{2,z}} & \varepsilon_2 \frac{\xi}{k_{2,z}} e^{ik_{2,z}d_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{2,x}^+ \\ \hat{E}_{2,x}^- \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Аналогично рассмотрим границу второй и третьей областей ( $z = d_1$ ). Граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} E_{2,x}(x, d_1) - E_{3,x}(x, d_1) &= 0, \\ \varepsilon_2 E_{2,z}(x, d_1) - \varepsilon_3 E_{3,z}(x, d_1) &= 0, \end{aligned}$$

из которых следует

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_{2,x}^+ \\ \hat{E}_{2,x}^- \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ik_{2,z}d_1} & 1 \\ -\varepsilon_2 \frac{\xi}{k_{2,z}} e^{ik_{2,z}d_1} & \varepsilon_2 \frac{\xi}{k_{2,z}} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon_3 \frac{\xi}{k_{3,z}} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{E}_{3,x}^+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Из матричных уравнений (15), (16) получаем

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+ \\ \hat{E}_{1,x}^- \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{E}_{3,x}^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где матрица  $\mathbf{M}$  представляется в виде произведения трех матриц  $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_3$ , в котором

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_{1,z}}{\varepsilon_1 \xi} \\ 1 & \frac{k_{1,z}}{\varepsilon_1 \xi} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(k_{2,z}d_1) & i \frac{k_{2,z}}{\varepsilon_2 \xi} \sin(k_{2,z}d_1) \\ i \frac{\varepsilon_2 \xi}{k_{2,z}} \sin(k_{2,z}d_1) & \cos(k_{2,z}d_1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon_3 \frac{\xi}{k_{3,z}} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из (17) получаем  $\hat{E}_{1,x}^+ = M_{11} \hat{E}_{3,x}^+$  и  $\hat{E}_{1,x}^- = M_{21} \hat{E}_{3,x}^+$ . Вводя функцию  $R(\xi) = -M_{21}/M_{11}$ , можно выразить отраженную волну как  $\hat{E}_{1,x}^- = -R(\xi) \hat{E}_{1,x}^+$ . Кроме того, введем функцию  $T(\xi) = 1/M_{11}$ , с помощью которой можно записать  $\hat{E}_{3,x}^+ = T(\xi) \hat{E}_{1,x}^+$ .

Отметим, что обобщение формулы (17) для многоплочной структуры из  $N$ , вообще говоря, разных слоев можно произвести по индукции, которая приводит к следующим выражениям:

$$\begin{pmatrix} E_{1,x}^+ \\ E_{1,x}^- \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} E_{N+2,x}^+ \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем матрица  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_1 \cdot \left( \prod_{m=2}^{N+1} \mathbf{T}_m \right) \cdot \mathbf{T}_{N+2},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{k_{1,z}}{\varepsilon_1 \xi} \\ 1 & \frac{k_{1,z}}{\varepsilon_1 \xi} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_m &= \begin{bmatrix} \cos(k_{m,z}d_{m-1}) & i \frac{k_{m,z}}{\varepsilon_m \xi} \sin(k_{m,z}d_{m-1}) \\ i \frac{\varepsilon_m \xi}{k_{m,z}} \sin(k_{m,z}d_{m-1}) & \cos(k_{m,z}d_{m-1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_{N+2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon_{N+2} \frac{\xi}{k_{N+2,z}} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В данной работе мы будем интересоваться падающей  $E_1^i(x, z)$  и отраженной  $E_1^r(x, z)$  волнами в первой среде ( $z \leq 0$ ) и волной за пленкой в третьей среде  $E_3(x, z)$  ( $z \geq d_1$ ). Данные поля, учитывая (10)-(12), можно переписать в виде

$$E_1^i(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \hat{E}_{1,x}^+(\xi) e^{ik_{1,z}z} e^{i\xi x} d\xi, \quad (18)$$

$$E_1^r(x, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} R(\xi) \hat{E}_{1,x}^+(\xi) e^{-ik_{1,z}z} e^{i\xi x} d\xi, \quad (19)$$

$$E_3(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{3,z}} \end{pmatrix} T(\xi) \hat{E}_{1,x}^+(\xi) e^{ik_{3,z}(z-d_1)} e^{i\xi x} d\xi. \quad (20)$$

Формулы (18), (19) показывают, что падающее поле можно разложить на плоские волны с разной гармонической вариацией по оси  $x$  (т.е.  $e^{i\xi x}$ ), и каждая такая плоская волна отразится от плоскостлой структуры с коэффициентом отражения  $R(\xi)$  под углом, соответствующим данному  $\xi$ .

Рассмотрим падение на пленку плоской волны вида

$$E_1^+(x, z) = e^{i(k_1(x+x_0) \sin \alpha + k_{1,z} \cos \alpha)} (\cos \alpha \mathbf{e}_x - \sin \alpha \mathbf{e}_z), \quad (21)$$

где  $k_1 = n_1 \omega / c$  — волновое число в первой среде,  $c$  — скорость света в вакууме,  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$  — показатель преломления в первой среде,  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  — единичные векторы в направлении осей  $X$  и  $Z$ . Пусть апертура волны ограничена таким образом, чтобы при  $z = 0$  волна падала только на отрезок  $x \in [-x_0 - L/2, -x_0 + L/2]$ , причем центр этого отрезка соответствует точке  $x_c = -x_0$ . Тогда фурье-образ падающей волны можно записать в виде

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,x}^{in}(\xi) &= \int_{-x_0-L/2}^{-x_0+L/2} E_{1,x}^+(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= 2e^{i\xi x_0} \cos \alpha \frac{\sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя полученное выражение в формулы (18) и (19), получим полное поле в первой среде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1(x, z) = & \frac{L \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \\
 & \times \frac{\sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)} e^{i(\xi(x+x_0)+k_{1,z}z)} d\xi \\
 & - \frac{L \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \\
 & \times \frac{R(\xi) \sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)} e^{i(\xi(x+x_0)-k_{1,z}z)} d\xi. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл справа дает интегральную сумму плоских волн, на которые можно разложить падающую волну с ограниченной апертурой. Второй интеграл есть соответствующая сумма отраженных плоских волн. Влияние апертуры на отраженную волну приводит к разделению энергии падающей волны по волнам в различных направлениях в окрестности угла  $\alpha$ .

Итак, полное поле в первой среде можно представить как сумму падающего и отраженного:  $\mathbf{E}_1(x, z) = \mathbf{E}_1^i(x, z) + \mathbf{E}_1^r(x, z)$ . Выражение для падающего и отраженного полей в области  $z \leq 0$  и поля, прошедшего в третью среду в области  $z \geq d_1$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1^i(x, z) = & \frac{L \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \\
 & \times \frac{\sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)} e^{i(\xi(x+x_0)+k_{1,z}z)} d\xi, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1^r(x, z) = & \frac{L \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\xi}{k_{1,z}} \end{pmatrix} \\
 & \times \frac{\sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)} R(\xi) e^{i(\xi(x+x_0)-k_{1,z}z)} d\xi, \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_3(x, z) = & \frac{L \cos \alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{\xi}{k_{3,z}} \end{pmatrix} \\
 & \times \frac{\sin((k_1 \sin \alpha - \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha - \xi)} T(\xi) e^{i(\xi(x+x_0)+k_{3,z}z)} d\xi. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Заметим, что из (25) следует, что амплитуда поля, отраженного под углом  $\beta$  в пределах малого угла  $d\beta$  (с учетом того, что  $\xi = k_1 \sin \beta$ ,  $d\xi = k_1 \cos \beta d\beta$ ), равна

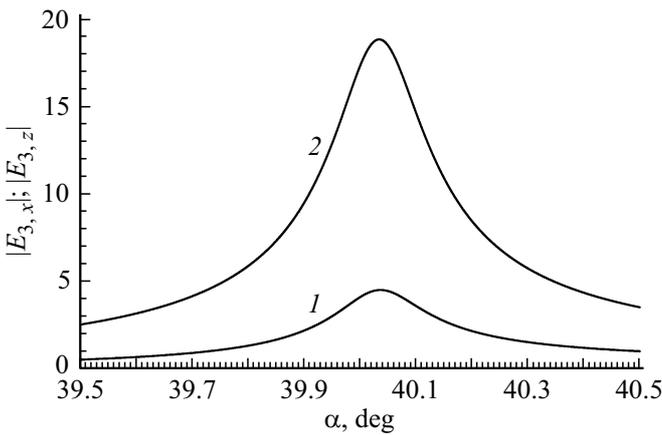
$$\frac{dE_{1,a}^r}{d\beta} = \frac{k_1 L \cos \alpha}{2\pi} \left| \frac{\sin((\sin \alpha - \sin \beta)k_1 L/2)}{(\sin \alpha - \sin \beta)k_1 L/2} R(k_1 \sin \beta) \right|. \quad (27)$$

Порядковый номер среды, $j$	Слой	Относительная диэлектрическая проницаемость	Толщина пленки, nm
1	Призма	1.6 <sup>2</sup>	Полубесконечная среда
2	Серебряная пленка	$\epsilon_m = -18.2 + i0.5$	53.8
3	Свободное пространство (воздух)	1	Полубесконечная среда

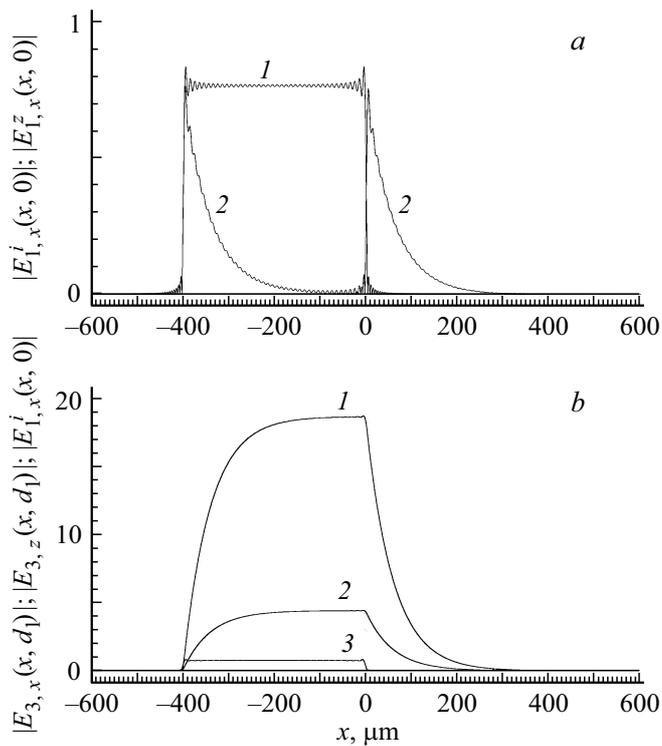
Зависимость (27) определяет угловое распределение амплитуды отраженного поля, при падении из первой среды на границу  $z = 0$  волны единичной амплитуды и ограниченной апертуры  $D = L \cos \alpha$ .

### Распределение полей на границах пленки

Рассмотрим схему возбуждения поверхностных плазмонов Кречмана (рис. 1). Будем считать, что пленка серебряная. Было показано [21], что для призмы с показателем преломления  $n_1 = 1.6$  существует оптимальная толщина пленки. Предполагалось, что длина падающей волны в вакууме  $\lambda = 633$  nm. С помощью вышеизложенной теории для падающей волны бесконечной апертуры ( $L \rightarrow \infty$ ) были найдены параметры оптимальной пленки (таблица). Вычисления показали [21], что угол падения, при котором наблюдается практически полное поглощение падающей волны (коэффициент отражения практически равен нулю для оптимальной толщины пленки), приблизительно равен  $\alpha_{opt} \approx 40.041^\circ$ . При отклонении угла падения от  $\alpha_{opt}$  на угол порядка  $\pm 0.2^\circ$  коэффициент отражения возвращается практически к единичному значению, возникает полное отражение падающей волны [21]. Интересно, что в диапазоне углов резонансного взаимодействия наблюдается значительный рост амплитуды поверхностной волны на свободной границе металла. На рис. 3 показаны угловые распределения амплитуд продольной ( $|E_{3,x}|$ , кривая 1) и перпендикулярной ( $|E_{3,z}|$ , кривая 2) составляющих напряженности электрического поля на граничной поверхности пленки  $z = d_1$ . Видно, что под углом  $\alpha_{opt}$  поверхностная волна достигает максимальной амплитуды, особенно нормальная компонента поля  $|E_{3,z}|_{max} \approx 18.78$ . Абсолютные значения амплитуд на рис. 3 соответствуют единичной амплитуде падающей на пленку волны (в призме). Таким образом, рассматриваемая конструкция обеспечивает значительное усиление и концентрацию поля в поверхностном слое пленки.



**Рис. 3.** Распределения амплитуд  $x$ -составляющей  $|E_{3,x}|$  (1) и  $z$ -составляющей  $|E_{3,z}|$  (2) напряженности электрического поля на свободной поверхности серебряной пленки (таблица) как функция от угла падения  $\alpha$  при падении идеальной плоской волны. Амплитуда падающего поля равна 1.



**Рис. 4.** (а) Распределения амплитуд  $x$ -составляющих падающего  $|E_{1,x}^i(x, 0)|$  (1) и отраженного  $|E_{1,x}^r(x, 0)|$  (2) полей для  $L = 400 \mu\text{m}$ ,  $x_0 = L/2$ . (б) Распределения амплитуд  $x$ -составляющей падающего поля  $|E_{1,x}^i(x, 0)|$  (1),  $x$ -составляющей поверхностной волны на свободной границе  $|E_{3,x}(x, d_1)|$  (2) и амплитуды  $z$ -составляющей волны  $|E_{3,z}(x, d_1)|$  на свободной границе ( $z = d_1$ ) (3).

Рассмотрим теперь, как влияет конечный размер апертуры на локализацию отраженного поля на границе призмы (при  $z = 0$ ) и на поле поверхностной волны на свободной границе пленки (при  $z = d_1$ ).

Начнем с полей на внутренней границе пленки ( $z = 0$ ). Падающее  $\mathbf{E}_1^i(x, 0)$  и отраженное  $\mathbf{E}_1^r(x, 0)$  поля на этой границе определяются формулами (24) и (25) соответственно. На рис. 4, а показано распределение амплитуд  $x$ -составляющих падающего  $|E_{1,x}^i(x, 0)|$  и отраженного  $|E_{1,x}^r(x, 0)|$  полей для  $L = 400 \mu\text{m}$ . Центр области, на которую падает волна, смещен влево относительно начала координат на  $x_0 = L/2$  так, что правый край засвеченной области находится в начале координат. Кривая 1 на рис. 4, а соответствует распределению амплитуды  $x$ -составляющей падающего поля  $|E_{1,x}^i(x, 0)|$ , а кривая 2 — распределению амплитуды  $x$ -составляющей отраженного поля  $|E_{1,x}^r(x, 0)|$ .

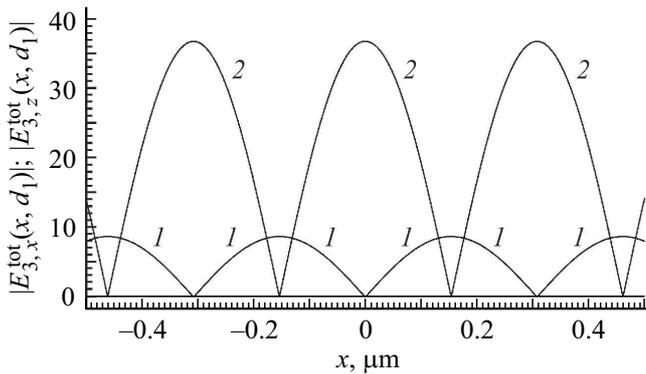
Из рис. 4, а видно, что область, на которую падает волна, и область, с которой отражается волна, отличаются. Более того, из рисунка видно, что можно выделить две области, из которых исходят две отраженные волны, разделенные вдоль оси  $X$  на расстояние  $L$  (перпендикулярно направлению отражения на  $L \cos \alpha_{\text{opt}}$ ).

Область существования волны на свободной поверхности пленки и область падения также не совпадают. Это иллюстрируют распределения амплитуды  $x$ -составляющей волны  $|E_{3,x}(x, d_1)|$  (кривая 2) и амплитуды  $z$ -составляющей волны  $|E_{3,z}(x, d_1)|$  на свободной границе ( $z = d_1$ ) (кривая 3), показанные на рис. 4, б. Указанные зависимости вычислялись по формуле (26) для той же падающей волны, что и на рис. 4, а. Для демонстрации усиления поля на свободной поверхности по сравнению с падающей волной на границе призмы на рис. 4, б показано распределение амплитуды падающего поля  $|E_{1,x}^i(x, 0)|$  (та же зависимость, что и на рис. 4, а, кривая 1). Эта составляющая падающего поля соответствует единичной амплитуде падающей волны в призме.

Можно качественно объяснить поведение графиков рис. 4, а, б следующим образом. В точке  $x = -L$  падающая волна начинает взаимодействовать с пленкой, в этом месте начинает расти поверхностная волна, которая начинает излучать в призму. Эта волна начинает интерферировать с волной, отраженной от границы  $z = 0$ , и давать результирующую отраженную волну, уменьшающуюся с ростом  $x$ . Справа от точки  $x = 0$  падающая волна исчезает. Волна, отраженная от границы  $z = 0$ , также исчезает, и остается только волна, излучаемая поверхностной волной в призму, которая уменьшается экспоненциально по мере ослабления поверхностной волны за счет излучения в призму.

Заметим, что поверхностная волна распространяется на свободной границе за область возбуждения и при этом излучает в сторону призмы. Поле поверхностной волны затухает здесь экспоненциально, причем, как показали расчеты, константа затухания не зависит от размера апертуры падающей волны  $L$ .

Вернемся к отраженным волнам на рис. 4, а (кривая 2). Одна волна отражается справа от левого края засвеченной области ( $x = -L$ ), а вторая — справа от правой границы засвеченной области ( $x = 0$ ). Очевидно, что вклад в первую волну от излучения поверхностной



**Рис. 5.** Интерференционные распределения амплитуд  $x$ -составляющей (1) и  $z$ -составляющей (2) напряженности результирующего электрического поля при интерференции двух противоположно направленных поверхностных волн на свободной поверхности ( $z = d_1$ ) по оси  $X$  вблизи начала координат.

волны минимален (поверхностная волна еще слабая), а вторая волна полностью обусловлена излучением поверхностной волны в призму. Поэтому эти волны, вообще говоря, отражаются с фазовым сдвигом, который зависит от влияния внешней среды на поверхностную волну. Это явление называют эффектом Гуса–Хенхена [24,25]. Эффект используется для создания оптических сенсоров с высокой чувствительностью [26–28]. Исходя из вышеизложенной теории, по отраженным волнам на внутренней поверхности пленки ( $z = 0$ ) легко найти разность фаз между отраженными волнами. Это планируется сделать в последующих работах.

Итак, важно отметить, что поверхностная волна на свободной границе возрастает от левой до правой границы области возбуждения и затем экспоненциально убывает, когда внешняя подпитка поверхностной волны исчезает. В точке границы, где исчезает падающая волна ( $x = 0$ ), амплитуда  $x$ - и  $z$ -составляющих напряженности электрического поля поверхностной волны имеет максимум. Заметим, что указанные максимальные амплитуды на правой границе равны соответствующим амплитудам для бесконечной апертуры (рис. 3) для угла  $\alpha_{\text{opt}}$ . Расчеты показали, что эти максимальные амплитуды будут уменьшаться при уменьшении  $L$ .

Полученный результат имеет прикладное значение, так как становится ясно положение области максимального поля на свободной границе и значений амплитуд составляющих полей в этой области. Это знание может быть важно в таких приложениях, как создание оптической эмиссии электронов с поверхности металлических пленок [29,30] и генерации высших оптических гармоник [31].

Распределения рис. 4 подсказывают, как заставить интерферировать поверхностные волны и увеличить усиление поля в отдельных местах на свободной поверхности пленки. Так, возьмем и создадим дополнительно

падающую волну, симметричную относительно оси  $Z$ . Пусть эта волна падает под углом  $-\alpha_{\text{opt}}$ :

$$\mathbf{E}_{1,R}^+(x, z) = e^{i(-k_1(x-x_0) \sin \alpha_{\text{opt}} + k_1 z \cos \alpha_{\text{opt}})} \times (-\cos \alpha_{\text{opt}} \mathbf{e}_x - \sin \alpha_{\text{opt}} \mathbf{e}_z), \quad (28)$$

так, что эта волна при  $z = 0$  волна падает только на отрезок  $x \in [x_0 - L/2, x_0 + L/2]$ . Тогда

$$\begin{aligned} \hat{E}_{1,x}^R(\xi) &= - \int_{x_0 - L/2}^{x_0 + L/2} \cos \alpha_{\text{opt}} e^{-ik_1(x-x_0) \sin \alpha_{\text{opt}}} e^{-i\xi x} dx \\ &= -2e^{-i\xi x_0} \cos \alpha_{\text{opt}} \frac{\sin((k_1 \sin \alpha_{\text{opt}} + \xi)L/2)}{(k_1 \sin \alpha_{\text{opt}} + \xi)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем, как и для первой волны,  $x_0 = L/2$  и  $L = 400 \mu\text{m}$ , при этом волна будет падать на отрезок  $x \in [0, L]$ , при этом возбуждаемая этой волной поверхностная волна будет максимальна в точке  $x = 0$  и будет экспоненциально затухать при распространении влево от этой точки.

Рассмотрим интерференцию данной волны с рассмотренной ранее волной. Интерференционные распределения амплитуд  $x$ - и  $z$ -составляющих напряженности результирующего электрического поля на свободной поверхности ( $z = d_1$ ) вблизи точки  $x = 0$  показаны на рис. 5. На поверхности пленки будет наблюдаться интерференционные полосы. Причем в максимумах амплитуда  $z$ -составляющей напряженности результирующего поля будет в 36.8 раз больше амплитуды падающих волн в призме. Это вдвое больше, чем в максимуме распределения волны (рис. 4, *b*).

Наконец, если создать дополнительно аналогичную схему возбуждения относительно плоскости падения  $YZ$ , то получим (в результате интерференции с рассмотренными выше полями) на свободной поверхности пленки интерференционные пятна. Например, в пятне в начале координат получим амплитуду  $z$ -составляющей напряженности результирующего поля еще в 2 раза больше, т.е. в 73.6 раз больше амплитуды падающего поля. Если в этом месте поместить металлическое коническое острие, то на его поверхности возбудится стоячая поверхностная поляритонная ТМ-волна, которая даст на вершине гигантское усиление поля [32].

Итак, возбуждение поверхностной плазмонной волны бесконечной апертуры в схеме Кречмана дает усиление амплитуды поля 18.78, если рассматривать  $z$ -компоненту плазмонной волны на границе. При ограниченной апертуре падающей волны амплитуда плазмонной волны возрастает вдоль возбужденной области пленки (рис. 4, *b*) и достигает максимума на правой границе этой области. Так, если  $L > 200 \mu\text{m}$ , указанное усиление достигает более 90% от максимума для волны бесконечной апертуры, а при  $L = 400 \mu\text{m}$  практически равно максимальному  $\approx 18.76$ . Этот результат позволяет выбирать минимальную область засветки пленки падающей

волной для достижения амплитуд поля в поверхностной волне, близких к максимальной амплитуде.

Чтобы увеличить амплитуду вдвое, предложено при помощи симметричной падающей волны возбудить противоположно направленную когерентную плазмонную волну. Причем место падения предложено сдвинуть латерально так, чтобы заставить поверхностные волны интерферировать в местах максимальных амплитуд. При этом в максимумах интерференционных полос усиление амплитуды будет примерно равно 36.8.

Наконец, чтобы увеличить локально амплитуду еще вдвое, предложено ввести еще две повернутые на 90 градусов относительно оси  $Z$  волны, создающие ещё две противоположно направленные поверхностные волны. Возникнет интерференция четырех поверхностных волн, дающих, например, в центре интерференционный максимум  $z$ -компоненты с усилением по амплитуде до 73.6 раз.

## Заключение

Предложен теоретический метод исследования дифракционных явлений при отражении плоской электромагнитной волны ограниченной апертуры от плоско-слоистой структуры. Продемонстрированная теория позволяет описать разделение отраженной волны на две с разными фазами (эффект Гуса–Хенхена). Рассмотрены способы локального усиления поверхностного поля путем интерференции поверхностных волн. Полученные результаты могут быть полезны при разработке современных оптических многоканальных биологических, химических и физических сенсорных систем, систем с оптически стимулированной электронной эмиссией и систем нелинейной оптики.

## Список литературы

- [1] *Homola J., Yee S.S., Gauglitz G.* // Sens. Actuators B. 1999. V. 54. P. 3.
- [2] *Barnes W.L., Dereux A., Ebbesen T.W.* // Nature. 2003. V. 424. P. 824.
- [3] *Homola J.* // Chem. Rev. 2008. V. 108. P. 462.
- [4] *Spoto G., Minunni M.* // J. Phys. Chem. Lett. 2012. V. 3. P. 2682.
- [5] *Raether H.* Surface Plasmons. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 353 p.
- [6] *Barnes W.L.* // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2006. V. 8. P. S87.
- [7] *Kretschmann E., Raether H.Z.* // Naturforsch A. 1968. V. 23. P. 2135.
- [8] *Piliarik M., Homola J.* // Opt. Express. 2009. V. 17. N 19. P. 16505.
- [9] *Liedberg B., Nylander C., Lundstrom I.* // Sens. Actuators. 1983. V. 4. P. 299.
- [10] *Liedberg B., Nylander C., Lundstrom I.* // Biosensors & Bioelectronics. 1995. V. 10. P. i-ix.
- [11] *Garabedian R., Gonzalez C., Richards J. et al.* // Sens. Actuators A. 1994. V. 43. P. 202.
- [12] *Yeatman E.M.* // Biosensors & Bioelectronics. 1996. V. 11. P. 635.
- [13] *Sarid D.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 1927.
- [14] *Matsubara K., Kawata S., Minami S.* // Opt. Lett. 1990. V. 15. P. 75.
- [15] *Yang F., Bradberry G.W., Sambles J.R.* // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2030.
- [16] *Kessler M.A., Hall E.A.H.* // Thin Solid Films. 1996. V. 272. P. 161.
- [17] *Nenninger G.G., Tobiska P., Homola J., Yee S.S.* // Sens. Actuators B. 2001. V. 74. P. 145.
- [18] *Toyama S., Doumae N., Shoji A., Ikariyama Y.* // Sens. Actuators B. 2000. V. 65. P. 32.
- [19] *Airoudj A., Debarnot D., Beche B., Poncin-Epaillard F.* // Anal. Chem. 2008. V. 80. P. 9188.
- [20] *Петрин А.Б., Вольян О.Д., Сизов А.С.* // Опт. и спектр. 2017. Т. 123. № 5. С. 786.
- [21] *Петрин А.Б., Вольян О.Д., Сизов А.С.* // ЖТФ. 2018. Т. 88. № 3. С. 433.
- [22] *Петрин А.Б.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 3. С. 375.
- [23] *Новотный Л., Хехт Б.* Основы нанооптики. М.: Физматлит, 2009. 484 с.
- [24] *Goos F., Hänchen H.* // Ann. Phys. 1947. V. 1. P. 333.
- [25] *Renard R.* // J. Opt. Soc. Am. 1964. V. 54. P. 1190.
- [26] *Yin X., Hesselink L.* // Appl. Phys. Lett. 2006. V. 89. P. 261108.
- [27] *Wan Y., Zheng Z., Zhu J.* // J. Opt. Soc. Am. B. 2011. V. 28. P. 314.
- [28] *Parks A.D., Spence S.E.* // Appl. Opt. 2015. V. 54. P. 5872.
- [29] *Racz P., Irvine S.E., Lenner M. et al.* // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 98. N 11. P. 111116.
- [30] *Welsh G.H., Wynne K.* // Opt. Expr. 2009. V. 17. P. 2470.
- [31] *Kim S., Jin J., Kim Y. et al.* // Nature. 2008. V. 453. N 5. P. 757.
- [32] *Giugni A., Allione M., Torre B. et al.* // J. Opt. 2014. V. 16. P. 114003.