

03

## Неизотермическое течение газа в эллиптическом канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом в свободномолекулярном режиме

© О.В. Гермидер, В.Н. Попов

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,  
163002 Архангельск, Россия  
e-mail: v.popov@narfu.ru

(Поступило в Редакцию 2 марта 2018 г.)

В рамках кинетического подхода в свободномолекулярном режиме найдено решение линеаризованной задачи о вычислении потока массы разреженного газа в длинном эллиптическом канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом. Течение газа в канале обусловлено перепадами температуры и давления на концах канала. В качестве основного уравнения используется кинетическое уравнение Больцмана для бесстолкновительного газа, а в качестве граничного условия — модель диффузного отражения. Получено распределение массовой скорости газа по поперечному сечению канала. Вычислена величина приведенного потока массы газа в канале в зависимости от перепадов давления и температуры на его концах. Проведенный анализ результатов показал существенную зависимость потока массы от радиуса кругового цилиндра.

DOI: 10.21883/JTF.2019.01.46957.96-18

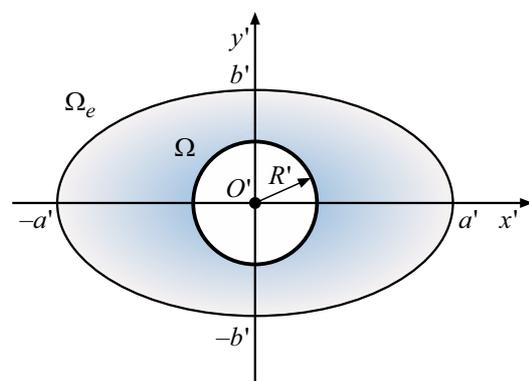
### Введение

В последнее время значительно возрос интерес к неизотермическим течениям разреженного газа в каналах [1–19]. Интерес обусловлен фундаментальными и прикладными значениями наноразмерных систем и вакуумных технологий в различных областях химии и физики, в частности возможностью создания высокоскоростных молекулярных пучков импульсного типа [1], травлением кремневых пластин [2], оценкой утечки газа через компрессорные клапаны [3], моделированием потока газа в наноподшипниках [3] и т. д. Для разработки и практического применения описанных выше технологий необходимо подробное описание потоков массы газа и тепла через каналы различного поперечного сечения. С учетом этого рядом авторов рассматривались каналы с различной конфигурацией: прямоугольный [3–7], эллиптический [8–11], цилиндрический [12–14], треугольный [2], в форме трапеции [15]. В работах [8–10] для получения макропараметров внутренних течений в эллиптическом цилиндре была использована  $S$ -модель кинетического уравнения, в [11] — уравнение Вильямса. В большинстве упомянутых выше работ для решения задач были использованы численные методы. Аналитически для каналов со сложной геометрией сечения в свободномолекулярном режиме решение линеаризованной задачи было получено для эллиптического цилиндра [8] и [16], двух коаксиальных цилиндров [17], прямоугольного канала с внутренним цилиндрическим элементом [18]. В качестве граничного условия на стенках канала в [1–4, 6–13, 15–18] была использована модель диффузного отражения, в [14] — модель зеркально-диффузного отражения. В связи с актуальностью исследований по неизотермическим течениям возникает необходимость

получения аналитических решений в каналах со сложной геометрией сечения. В представленной работе в свободномолекулярном режиме задача массопереноса рассматривается в длинном эллиптическом канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом. Течение газа в канале обусловлено перепадами температуры и давления на концах канала. Предполагается, что отражение молекул от стенок канала носит диффузный характер. Распределение массовой скорости газа по поперечному сечению канала находится в зависимости от отношения полуосей эллипса и радиуса внутреннего цилиндра. Величина приведенного потока массы газа в канале рассчитывается в зависимости от перепадов давления и температуры на его концах.

### 1. Постановка задачи. Кинетическое уравнение

Рассмотрим течение разреженного газа между двумя резервуарами, соединяющимися эллиптическим каналом



с внутренним круговым цилиндрическим элементом радиусом  $R'$ . Давление и температура в первом и во втором резервуарах остаются постоянными и равными соответственно  $p_1, T_1$  и  $p_2, T_2$ , причем  $p_2 > p_1$  и  $T_2 > T_1$ . Начало декартовой системы координат выбрано в сечении, расположенном в середине канала. Будем рассматривать течение газа в средней части канала, в окрестности точки  $z' = 0$ . Введем обозначения для границ сечения канала:  $\Omega$  — окружность радиусом  $R'$ ;  $\Omega_e$  — эллипс с полуосями  $a'$  и  $b'$  ( $a' \geq b'$ );  $\Omega \cup \Omega_e$  (см. рисунок). Предположим, что длина канала  $L' > a'$ . В этом случае давление и температура газа релаксируют значительно быстрее в поперечном сечении, чем по всей длине канала [19]. Таким образом, можно предположить, что давление и температура зависят только от продольной координаты  $z'$ . Будем полагать, что их безразмерные градиенты являются малыми по абсолютной величине, т. е.

$$G_T = \frac{z'}{T_0} \frac{dT}{dz'}, \quad |G_T| \ll 1, \quad G_p = \frac{z'}{p_0} \frac{dp}{dz'}, \quad |G_p| \ll 1.$$

Выберем в качестве размерного масштаба малую полуось эллипса  $b'$ . При этом безразмерные величины будем обозначать без штриха:  $x = x'/b'$ ,  $y = y'/b'$ ,  $z = z'/b'$ . В линейном приближении давление и температура газа имеют вид

$$T(z) = T_0(1 + G_T z), \quad p(z) = p_0(1 + G_p z), \quad (1)$$

где  $p_0, T_0$  — давление и температура газа в начале координат. Состояние разреженного газа в точке, радиус-вектор которой  $r$  имеет координаты  $x, y$  и  $z$ , определяем функцией распределения  $f_\Gamma(r, v)$ , где  $v$  — скорость молекул газа. Сделанное предположение о длине канала позволяет пренебречь концевыми эффектами и рассмотреть только продольную составляющую массовой скорости  $u_z(r)$  [9], которую находим согласно [20] как

$$u(r) = \frac{1}{n(z)} \int v f(r, v) d^3v, \quad (2)$$

где  $n(z)$  — концентрация молекул газа. Введем безразмерную компоненту вектора массовой скорости газа, следуя [19]

$$U = \beta^{1/2} u, \quad (3)$$

где  $\beta = m/(2k_B T_0)$ ,  $m$  — масса молекул газа,  $k_B$  — постоянная Больцмана. Приведенный поток массы газа через поперечное сечение определяем согласно [19] как

$$J_M = \frac{J'_M}{\pi(a'b' - R'^2)p(z)} \sqrt{\frac{2k_B T(z)}{m}} = \frac{8(I_1 + I_2)}{\pi(a - R^2)}, \quad (4)$$

$$I_1 = \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} U_z(r) dx dy, \quad I_2 = \int_R^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} U_z(r) dx dy,$$

где  $J'_M$  — размерный поток массы газа в канале. Для нахождения функции распределения молекул газа  $f(r, v)$  воспользуемся кинетическим уравнением Больцмана, которое в декартовой прямоугольной системе координат в отсутствии межмолекулярных столкновений имеет вид [20]

$$C_x \frac{\partial f}{\partial x} + C_y \frac{\partial f}{\partial y} + C_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где  $C = \beta^{1/2} v$  — безразмерная скорость молекул газа. В качестве граничного условия на обтекаемых газом стенках канала будем использовать модель диффузного отражения. В этом случае [20]

$$f^+(r_\Gamma, C) = f_\Gamma(r_\Gamma, C), \quad C_n > 0. \quad (6)$$

Здесь  $f^+(r_\Gamma, C)$  — функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала,  $r_\Gamma$  — безразмерный радиус-вектор точек стенок канала,  $n$  — вектор нормали к обтекаемой газом поверхности, направленный в сторону газа;  $f_\Gamma(r_\Gamma, C)$  — локально равновесная функция распределения:

$$f_\Gamma(r_\Gamma, C) = n_\Gamma(z) \left( \frac{m}{2\pi k_B T_\Gamma(z)} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{T_0}{T_\Gamma(z)} C^2\right), \quad (7)$$

где  $T_\Gamma(z), n_\Gamma(z)$  — температура и концентрация молекул газа на поверхности канала. Линеаризуя (7) относительно абсолютного максвеллиана  $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$  и учитывая, что  $p(z) = n(z)k_B T$ , приходим к следующему выражению для локально равновесной функции распределения:

$$f_\Gamma(z, C) = f_0(C) \left( 1 + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) z + G_p z \right). \quad (8)$$

Функцию распределения  $f(r, v)$  линеаризуем относительно  $f_\Gamma(z, C)$ . Принимая во внимание (8), получим

$$f(r, C) = f_0(C) \left( 1 + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) z + G_p z + C_z h(x, y, C) \right). \quad (9)$$

Подставляя функцию распределения (9) в (5), для определения  $h(x, y, C)$  приходим к уравнению

$$C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + G_p + G_T \left( C^2 - \frac{5}{2} \right) = 0. \quad (10)$$

Осуществим переход к сферическим координатам в пространстве скоростей:  $C_x = C \cos \varphi \sin \theta$ ,  $C_y = C \sin \varphi \sin \theta$ ,  $C_z = C \cos \theta$ , где углы  $\varphi$  и  $\theta$  отсчитываются от положительных направлений осей  $C_x$  и  $C_z$  в пространстве скоростей соответственно. Представим функцию  $h(x, y, C)$  в виде разложения по ортогональным в смысле равенства нулю скалярного произведения функций  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$  и  $e_3 = C - 5/(2C)$ :

$$h(x, y, C) = G_p \left( Z_1(x, y, \varphi, \theta) + \left( \frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) \times Z_2(x, y, \varphi, \theta) \right) + G_T \left( C - \frac{5}{2C} \right) Z_3(x, y, \varphi, \theta). \quad (11)$$

Здесь скалярное произведение функций  $f_1(C)$  и  $f_2(C)$  определяется следующим образом [21]:

$$(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} f_1(C)f_2(C)C^5 \exp(-C^2)dC.$$

Подставляя (11) в (10), в силу ортогональности функций  $e_1, e_2$  и  $e_3$  получаем три независимых уравнения для определения неизвестных функций  $Z_i(x, y, \varphi, \theta)$ :

$$\left( \cos \varphi \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \sin \theta + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = 0, \quad (12)$$

$$\left( \cos \varphi \frac{\partial Z_j}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial Z_j}{\partial y} \right) \sin \theta + 1 = 0, \quad j = 2, 3, \quad (13)$$

с граничными условиями

$$Z_i(x_\Gamma, y_\Gamma, \varphi, \theta) = 0, \quad Cn > 0, \quad i = 1 - 3. \quad (14)$$

Учитывая, что уравнения (13) и граничные условия (14) имеют одинаковую структуру для каждой функции  $Z_j(x, y, \varphi, \theta)$ , для краткости обозначим  $Z(x, y, \varphi, \theta) = Z_j(x, y, \varphi, \theta)$ ,  $j = 2, 3$ . Замечая при этом, что  $Z_1 = 3\sqrt{\pi}Z/8$ , получаем для ненулевой компоненты  $U_z$  вектора  $\mathbf{U}$ , определяемого равенствами (2), (3), (9) и (11), следующее выражение

$$U_z(x, y) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2)C_z^2 h(x, y, C)d^3C = G_T U_z^{(1)}(x, y) + G_p U_z^{(2)}(x, y), \quad (15)$$

$$U_z^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \int_0^{2\pi} Z(x, y, \varphi, \theta) d\varphi d\theta = -\frac{U_z^{(2)}(x, y)}{2}. \quad (16)$$

Из (15) следует, что приведенный поток массы, определяемый по формуле (4), также можно представить в виде суммы двух линейных по градиентам температуры и давления функций:

$$J_M = G_T J_M^{(1)} + G_p J_M^{(2)}, \quad J_M^{(i)} = \frac{8(I_1^{(i)} + I_2^{(i)})}{\pi(a - R^2)}, \quad (17)$$

$$I_1^{(i)} = \int_0^R \int_{\sqrt{R^2-y^2}}^{a\sqrt{1-y^2}} U_z^{(i)}(x, y) dx dy,$$

$$I_2^{(i)} = \int_R^1 \int_0^a U_z^{(i)}(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2.$$

Здесь коэффициенты  $J_M^{(1)}$  и  $J_M^{(2)} = -2J_M^{(1)}$  не зависят от  $G_T$  и  $G_p$ , а слагаемые в (17) для  $J_M$  определяют соответственно приведенные потоки массы разреженного

газа, вызываемые градиентом температуры в задаче о тепловом крипе и градиентом давления в задаче о течении Пуазейля. Получим значения этих коэффициентов для заданной конфигурации сечения канала. Для этого найдем явный вид функции  $Z(x, y, \varphi, \theta)$ . В силу симметрии сечения канала относительно координатных осей в конфигурационном пространстве рассмотрим точки из первого квадранта, для которых можно выделить две области изменения угла  $\varphi$ :

1.  $\varphi_0 - \xi \leq \varphi \leq \varphi_0 + \xi$  — для молекул, которые отразились от внутренней поверхности, где углы  $\varphi_0$  и  $\xi$  определяются выражениями  $\varphi_0 = \arctg(y/x)$ ,  $\xi = \arcsin(R/\sqrt{x^2 + y^2})$ ;

2.  $\varphi_0 + \xi \leq \varphi \leq 2\pi + \varphi_0 - \xi$  — для молекул, которые отразились от внешней поверхности.

В первом случае решение уравнения (13) с граничным условием (14) имеет вид [18]

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = -\frac{w_1(x, y, \varphi)}{\sin \theta}, \quad (18)$$

$$w_1(x, y, \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{R^2 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}. \quad (19)$$

Во втором случае получаем [16]

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = -\frac{w_2(x, y, \varphi)}{\sin \theta}, \quad (20)$$

$$w_2(x, y, \varphi) = \frac{x \cos \varphi + a^2 y \sin \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} + \frac{a \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}. \quad (21)$$

Подставляя (18)–(21) в (16), получаем

$$U_z^{(2)}(x, y) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left( 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\xi} w_1(x, y, \varphi) d\varphi + \int_{\varphi_0+\xi}^{2\pi+\varphi_0-\xi} w_2(x, y, \varphi) d\varphi \right). \quad (22)$$

Результаты вычислений  $-J_M^{(2)}$  по формуле (17) с учетом полученного выражения (22) для компоненты  $U_z^{(2)}(x, y)$  представлены в таблице в сравнении с результатами, полученными в [8,9] для эллиптического канала. Для канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами ( $a = 1$ ), значения  $-J_M^{(2)}$  из таблицы при  $R = 0.01$  и  $R = 0.1$  соответственно равны 1.4932 и 1.3890. Эти же значения были получены в [17] в пределе свободномолекулярного режима на основе S-модели кинетического уравнения. В работе [17] массовый поток был представлен в виде ряда по малому параметру  $R$ , в котором отброшены члены выше четвертого порядка малости. Как следует из приведенных в таблице значений поток массы существенно зависит от  $R$ .

Значения  $-J_M^{(2)}$  в зависимости от  $a, R$

$a$	$R$					
	0		0.01	0.1	0.5	0.9
	(17)	[8,9]	(17)	(17)	(17)	(17)
1	1.5045	1.5045	1.4932	1.3890	0.8701	0.2218
1.1	1.5770	1.5770	1.5657	1.4617	0.9468	0.3250
2	2.0655	2.0655	2.0542	1.9509	1.4684	1.0174
5	2.8888	2.8888	2.8775	2.7752	2.3312	2.0084
10	3.5397	3.5397	3.5284	3.4265	2.9993	2.7214
20	4.1991	4.1991	4.1878	4.0863	3.6689	3.4152
100	5.7387	5.7390	5.7274	5.6262	5.2183	4.9868

## 2. Неизотермическое течение разреженного газа при произвольных перепадах давления и температуры

В эксперименте, как правило, измеряется величина массы газа в канале в зависимости от перепадов давлений и температур на его концах. В случае малых перепадов температуры и давления на концах канала, распределения температуры и давления вдоль канала можно считать линейными [19]. При этом градиенты температуры и давления могут быть определены по формулам [19]

$$G_T = \frac{T_2 - T_1}{LT_{av}}, \quad G_p = \frac{p_2 - p_1}{Lp_{av}}, \quad (23)$$

где  $L = L'/b'$ ,  $T_{av} = (T_2 + T_1)/2$ ,  $p_{av} = (p_2 + p_1)/2$  и перепады температуры и давления являются малыми:  $(T_2 - T_1) \ll T_1$  и  $(p_2 - p_1) \ll p_1$ . В этом случае величина  $J_M$  остается постоянной. Если отношения  $T_2/T_1$  и  $p_2/p_1$  являются большими, то распределение давления перестает быть линейным и происходит изменение величины  $J_M$  вдоль канала. Так как теплопроводность стенок канала значительно больше, чем теплопроводность газа, распределение температуры, определяемое тепловыми свойствами канала, можно считать линейным [9]:  $T(z_*) = (T_2 - T_1)z_* + (T_1 + T_2)/2$ , где  $z_* = z'/L'$ . Распределение давления при этом заранее неизвестно, а должно быть найдено в результате решения кинетического уравнения. Следуя [3,9,15, 19], определим безразмерный поток массы как

$$J_M^* = \frac{J_M L}{\pi(a'b' - R^2)p_1} \sqrt{\frac{2k_B T_1}{m}}, \quad (24)$$

где величина  $J_M^*$  остается постоянной вдоль длины канала. Для определения давления газа в канале подставляем последовательно выражения (4) и (24) в (17). В результате с учетом того, что  $J_M^{(2)} = -2J_M^{(1)}$ , получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной

функции  $p(z_*)$ :

$$\frac{1}{p_1} \frac{dp}{dz_*} = \frac{p(z_*)}{2p_1 T(z_*)} \frac{dT}{dz_*} + \sqrt{\frac{T(z_*)}{T_1} \frac{J_M^*}{J_M^{(2)}}}, \quad (25)$$

где  $J_M^*$  является параметром, а значения  $J_M^{(2)}$  определяются по формуле (17). С учетом линейного распределения температуры вдоль длины канала общее решение дифференциального уравнения (25) имеет вид

$$p(z_*) = \frac{p_1 T(z_*)^{3/2} J_M^*}{(T_2 - T_1) J_M^{(2)} \sqrt{T_1}} + C_1 \sqrt{T(z_*)}, \quad (26)$$

где  $C_1$  — константа интегрирования. Подставляя в (26) граничные условия  $p(-1/2) = p_1$  и  $p(1/2) = p_2$ , приходим к системе уравнений для определения  $C_1$  и  $J_M^*$ . Введя обозначение

$$J_M^* = \left( \frac{p_*}{\sqrt{T_*}} - 1 \right) J_M^{(2)}, \quad C_1 = \frac{p_1 (p_* - T_*^{3/2})}{(1 - T_*) \sqrt{T_2}}. \quad (27)$$

Коэффициент перед  $J_M^{(2)}$  в выражении (27) для  $J_M^*$  совпадает с аналогичным результатом [19] для цилиндрического канала. Подставляя выражения (27) в (26), находим  $p(z_*)$ :

$$p(z_*) = \frac{p_1 (p_* + \sqrt{T_*} + 2z_* (p_* - \sqrt{T_*})) \sqrt{2(T_* + 1 + 2(T_* - 1)z_*)}}{4\sqrt{T_*}}. \quad (28)$$

В случае изобарического течения  $p_* = 1$  ( $p_1 = p_2$ ) из (27) следует, что  $J_M^*$  принимает только положительные значения, равные  $-(1 - 1/\sqrt{T_*}) J_M^{(2)}$ . При выполнении этого условия имеет место явление теплового крипа, т.е. газ течет от холодного резервуара к горячему, что соответствует выводам, приведенным в [19].

Для неизобарического течения ( $p_* > 1$ ) величина  $J_M^* < 0$ , если  $p_* > \sqrt{T_*}$ . В этом случае имеет место течение Пуазейля и газ течет от горячего резервуара, где давление выше, к холодному, где давление ниже. При  $p_* \leq \sqrt{T_*}$  величина  $J_M^* \geq 0$  и имеет место явление теплового крипа.

Полученные по формуле (27) значения  $J_M^*$  хорошо согласуются с результатами из [9] для эллиптических каналов ( $R = 0$ ) для режимов, близких к свободно-молекулярному. В частности, при  $p_* = 1$  и  $T_* = 3.8$  для  $a = 1$  и  $a = 10$  по формуле (27) при подстановке в нее значений из таблицы, находим  $J_M^* = 0.7327$  и  $J_M^* = 1.7239$ . Соответствующие значения этой величины из [9] равны 0.7144 и 1.5916. При  $p_* = 100$  и  $T_* = 3.8$  для  $a = 1$  и  $a = 10$  значения  $J_M^* \cdot 10^{-2}$ , вычисленные по формуле (27), становятся отрицательными:  $-0.757$  и  $-1.780$ , а из [9] они равны  $-0.738$  и  $-1.511$ .

## Заключение

Итак, в представленной работе решена линеаризованная задача о вычислении потока массы газа в длинном эллиптическом канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом в свободномолекулярном режиме. Приведены зависимости величины приведенного потока массы газа в канале от произвольных перепадов давления и температуры на его концах при условии, что полуоси канала много меньше его длины. Показано, что значения потока массы уменьшаются нелинейно в зависимости от радиуса внутреннего цилиндра.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19-01-00506.

## Список литературы

- [1] Конопелько Н.А., Титарев В.А., Шахов Е.М. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. Вып. 3. С. 476–489.
- [2] Naris S., Valougeorgis D. // European J. Mechanics. B: Fluids. 2008. Vol. 27. P. 810–822.
- [3] Graur I., Ho M.T. // Vacuum. 2014. Vol. 101. P. 328–332.
- [4] Sharipov F.M. // J. Vac. Sci. Technol. A. 1999. Vol. 17. N 5. P. 3062–3066.
- [5] Pantazis S., Varoutis S., Hauer V., Day C., Valougeorgis D. // Vacuum. 2011. Vol. 85. P. 1161–1164.
- [6] Титарев В.А., Шахов Е.М. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. Вып. 7. С. 1285–1302.
- [7] Гермидер О.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 6. С. 37–41.
- [8] Graur I., Sharipov F. // Europ. J. of Mechanics B: Fluids. 2008. Vol. 27. P. 335–345.
- [9] Graur I., Sharipov F. // Microfluid Nanofluid. 2009. Vol. 6. P. 267–275.
- [10] Rykov V.A., Titarev V.A., Shakhov E.M. // Fluid Dynamics. 2011. Vol. 46. № 3. P. 456–466.
- [11] Гермидер О.В., Попов В.Н. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 3. С. 331–334
- [12] Kämpfer C.H., Rodrigues P., Barichello L.B. // Appl. Mathematics. 2014. Vol. 5. P. 1516–1527.
- [13] Siewert C.E., Valougeorgis D. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 2002. Vol. 72. P. 531–550.
- [14] Гермидер О.В., Попов В.Н. // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 11. С. 1603–1608.
- [15] Ritos K., Lihnaropoulos Y., Naris S., Valougeorgis D. 2nd Micro and Nano Flows Conference, Brunel University, West London, UK. 2009.
- [16] Гермидер О.В., Попов В.Н., Юшканов А.А. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2017. Т. 20. Вып. 3. С. 24–30.
- [17] Шахов Е.М. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. Вып. 7. С. 1107–1116.
- [18] Гермидер О.В., Попов В.Н. // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 518–527.
- [19] Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
- [20] Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука, 1967. 440 с.
- [21] Латышев А.В., Юшканов А.А. Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения: монография. М.: МГОУ, 2004. 271 с.