

04

Особенности поведения моды Дебая в электронной плазме при различных степенях вырождения электронного газа

© Н.М. Гордеева¹, А.А. Юшканов²

¹ Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

² Московский государственный областной университет, Москва, Россия
E-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

Поступило в Редакцию 7 августа 2018 г.

Рассматривается отклик электронной плазмы с произвольной степенью вырождения на переменное электромагнитное поле, направленное перпендикулярно границе слоя плазмы. Экранирование электрического поля в плазме определяется модой Дебая. Проведен анализ поведения этой моды в зависимости от параметров задачи. Впервые показано, что при достаточно высоких степенях вырождения электронного газа область существования моды Дебая имеет существенно нетривиальный характер, при котором области существования и отсутствия этой моды чередуются по мере роста частоты электрического поля.

DOI: 10.21883/PJTF.2018.24.47042.17495

В последнее время проявляется растущий интерес к вопросу об экранировании внешнего переменного электромагнитного поля в плазме в зависимости от различных параметров [1–4].

При воздействии переменного электромагнитного поля на слой электронной плазмы с частичным вырождением в последней индуцируется поле, которое при некоторых предположениях относительно условий задачи можно найти аналитически (речь идет о функции распределения плотности электронов и напряженности электрического поля). Напряженность электрического поля представляется в виде трех слагаемых, соответствующих объемной проводимости, дебаевскому экранированию и волнам (модам Друде, Дебая и волнам Ван Кампена). Слагаемое, отвечающее моде Дебая, присутствует в разложении не всегда, это зависит от параметров среды. Условия существования дебаевского экранирования и характер зависимости описаны далее.

Общая постановка задачи приведена в работах [5,6]. При этом используется τ -модельное уравнение Власова–Больцмана и уравнение Пуассона для электрического поля [7,8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \int (f - f_0) d\Omega, \quad d\Omega = \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (2)$$

Здесь f_{eq} — локально-равновесная функция распределения Ферми–Дирака, $f_{eq}(\mathbf{r}, v, t) = (1 + \exp(\frac{\varepsilon - \mu(\mathbf{r}, t)}{kT}))^{-1}$, $f_0 = f_{FD}$ — невозмущенная (абсолютная) функция распределения Ферми–Дирака, $f_0(v, m) = f_{FD}(v, m) = (1 + \exp(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}))^{-1}$, $p = mv$ — импульс электрона, $\varepsilon = mv^2/2$ — кинетическая энергия электрона, μ и $\mu(\mathbf{r}, t)$ — соответственно невозмущенный и возмущенный химический потенциал, e и m — заряд и эффективная масса электрона, ρ — плотность заряда, \hbar — постоянная Планка, $\nu = 1/\tau$ — эффективная частота рассеяния электронов, τ — среднее время свободного пробега электрона, k — постоянная Больцмана, T — температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — электрическое поле внутри плазмы.

Предполагается, что слой бесконечен и достаточно тонок, граничные условия рассеяния электронов на поверхности зеркальные. Введем декартову систему координат с осью x , перпендикулярной поверхности слоя, и с центром в середине слоя. Внешнее электрическое поле вне плазмы меняется по закону $\mathbf{E}_{ext}(t) = (E_0 e^{-i\omega t}, 0, 0)$. Соответствующее самосогласованное электрическое поле внутри плазмы обозначим $\mathbf{E}(x, t) = (E(x) e^{-i\omega t}, 0, 0)$.

Будем считать внешнее электрическое поле достаточно малым, чтобы была возможность линеаризовать задачу. Проведем линеаризацию уравнений (1) и (2) относительно абсолютной функции распределения Ферми–Дирака f_0 : $f_{eq}(x, P, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha) \delta\alpha(x) e^{-i\omega t}$, где $f_0(P, \alpha) = f_{FD}(P, \alpha) = (1 + e^{P^2 - \alpha})^{-1}$, $g(P, \alpha) = e^{P^2 - \alpha} / (1 + e^{P^2 - \alpha})^2$, $\mathbf{P} = \mathbf{p}/p_T = \mathbf{v}/v_T$. Здесь v_T — тепловая скорость электронов, $v_T = \sqrt{2kT/m}$, а $\alpha = \mu/kT$ — безразмерный химический потенциал. Изменение химического потенциала считаем достаточно малым, чтобы было возможно представление $\alpha(x, t) = \alpha + \delta\alpha(x) e^{-i\omega t}$. Линеаризуем функцию распределения электронов: $f(x, \mathbf{P}, t) = f_0(P, \alpha) + g(P, \alpha) h(x, P_x) e^{-i\omega t}$, где $h(x, P_x)$ — новая неизвестная функция.

В результате получаем систему, содержащую новые неизвестные функции и безразмерные переменные, подробное решение приведено в [5]. Решение основывается на методе разделения переменных, сводится к получению дисперсионной функции и поиску собственных функций, по которым можно разложить получившееся аналитическое решение. Спектр решений поставленной задачи определяет дисперсионная функция

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{1}{w_0} + \frac{\eta_1^2 - z^2}{w_0 \eta_1^2} \lambda(z, \alpha), \quad \lambda(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\mu, \alpha)}{\mu - z} d\mu.$$

Константы w_0 , η_1^2 и функция $k(\eta, \alpha)$ имеют вид

$$f_0(\eta, \alpha) = (1 + \exp(\eta^2 - \alpha))^{-1}, \quad k(\eta, \alpha) = \frac{f_0(\eta, \alpha)}{2s_0(\alpha)},$$

$$s_0(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_0(t, \alpha) dt, \quad w_0 = 1 - i \frac{\omega}{v},$$

$$\eta_1^2 = w_0 \frac{v^2}{\omega_p^2} \frac{s_2(\alpha)}{s_0 \alpha}, \quad s_2(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^2 f_0(t, \alpha) dt.$$

В результате решения индуцированное электромагнитное поле представляется в виде суммы трех слагаемых, соответствующих разложению по спектру дисперсионной функции. Структура возникающего в плазме электрического поля в общем случае может быть представлена в виде

$$e(x) = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_\infty} + \frac{2\Lambda_1 \eta_0}{\Lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)} \frac{\text{ch}\left(\frac{w_0 x}{\eta_0}\right)}{\text{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta_0}\right)} + \frac{\Lambda_1}{w_0 \eta_1^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta^2 k(\eta, \alpha)}{\Lambda^+(\eta) \Lambda^-(\eta)} \frac{\text{ch}\left(\frac{w_0 x}{\eta}\right)}{\text{ch}\left(\frac{w_0 l}{\eta}\right)} d\eta. \quad (3)$$

Здесь

$$l = L/\lambda, \quad \Lambda_1 = i\omega/(i\omega - \omega_p), \quad \Lambda_\infty = (\omega_p^2 - \omega^2 - i\nu\omega)/(v - i\omega)^2, \\ \Lambda_\eta^\pm = \Lambda(\eta) \pm i\pi\eta k(\eta, \alpha)(\eta_1^2 - \eta^2)/w_0 \eta_1^2.$$

Первое слагаемое соответствует бесконечно удаленной точке в спектральном разложении, а по физическому смыслу оно является

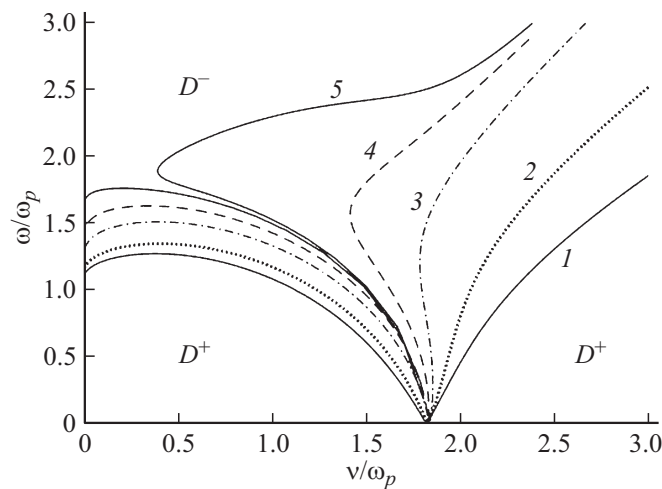


Рис. 1. Области существования и отсутствия моды Дебая. 1–5 — кривые $L(\alpha)$ при коэффициентах вырождения плазмы $\alpha = 0, 3, 10, 20, 50$ соответственно.

объемной проводимостью слоя, т.е. модой Друде. Второе слагаемое соответствует комплексному корню дисперсионной функции и представляет собой моду Дебая, т.е. экранирование. Третье слагаемое отвечает непрерывному спектру. Первое и третье слагаемые всегда присутствуют в разложении решения по собственным функциям, а наличие второго слагаемого зависит от параметров плазмы: от частоты внешнего поля ω , эффективной частоты столкновений электронов ν , а также от степени вырождения электронного газа α , т.е. при некоторых режимах дебаевское экранирование отсутствует. Это обстоятельство вызывает интерес и требует дополнительных исследований.

Для поиска моды Дебая нужно найти конечные комплексные нули дисперсионной функции $\Lambda(z)$. Чтобы оценить наличие корня, применяется принцип аргумента [8]. В результате на комплексной плоскости с координатами, означающими соответственно частоту внешнего поля и частоту плазменных столкновений, можно построить параметрическую кривую $L(\alpha) = \Lambda^+(z, \alpha)/\Lambda^-(z, \alpha)$, зависящую от химического потенциала плазмы. Эта кривая делит комплексную плоскость на две области: область D^+ , где существуют корни, и область D^- , где не существует корней (рис. 1). При изображении ограничимся первой четвертью.

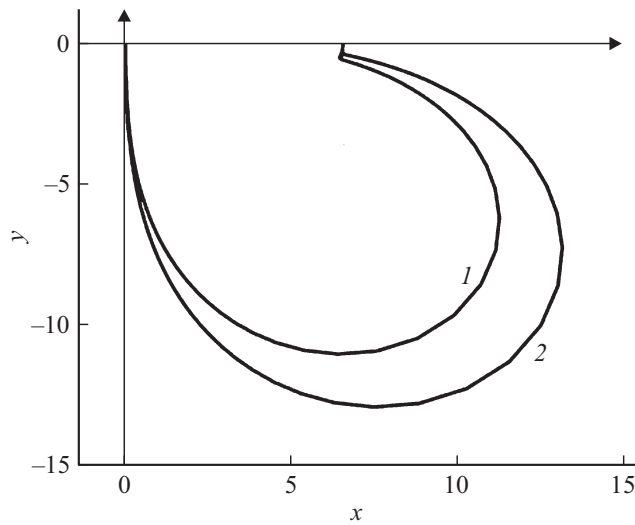


Рис. 2. Кривые на комплексной плоскости — геометрическое место точек, являющихся корнем дисперсионной функции, т.е. модой Дебая. Коэффициент вырождения плазмы равен $\alpha = 1$ (1) и 3 (2). Частота столкновений электронов в плазме $0.01\omega_p$.

Отметим, что при высоких степенях вырождения параметрическая кривая описывает некоторую „петлю“, т.е. изменение частоты внешнего поля приводит то к появлению, то к исчезновению дебаевской моды (рис. 1). Если обратить внимание на кривую с химическим потенциалом 50, при частоте выше 0.5 видно, что с возрастанием частоты внешнего поля области D^+ и D^- перемежаются, т.е. экранирование то присутствует, то исчезает. Данное явление наблюдается только при больших значениях степени вырождения, когда энергия Ферми значительно превышает тепловую энергию электронов.

В [8] показано, что корень дисперсионного уравнения, соответствующий моде Дебая z_0 , может быть вычислен следующим образом:

$$z_0^2 = z_1^2 + \frac{\Lambda(z_1)}{\Lambda_\infty X(z_1)X(-z_1)},$$

где z_1 — любая точка, выбранная из области $D^+ \setminus \gamma_\varepsilon$, $\Lambda_\infty = 1 - 1/w_0 + \omega_p^2/(w_0v)^2$.

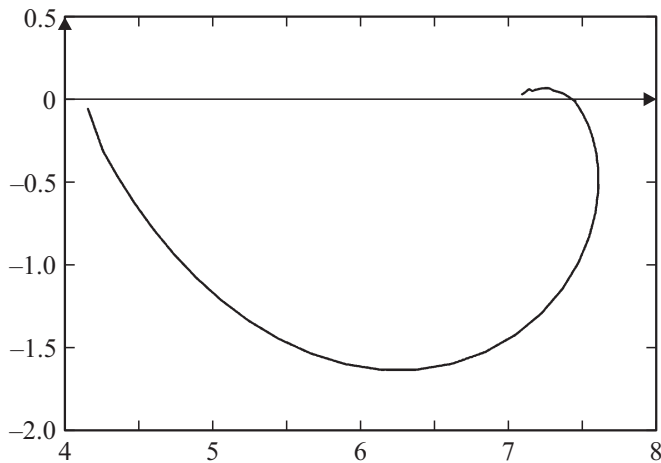


Рис. 3. Геометрическое место точек, являющихся корнем дисперсионной функции, т.е. модой Дебая, при $\alpha = 50$ и частоте столкновений электронов в плазме, равной ω_p .

Функция $X(z)$ имеет следующий вид:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln G(t) - 2\pi i}{t - z} dt\right).$$

На рис. 2 показаны параметрические графики существования корня $z_0 = +\sqrt{z_0^2}$ для плазмы с коэффициентом вырождения 1 и 3. Частота столкновения плазмы фиксирована и равна 0.01, а частота внешнего поля меняется от нуля до того критического значения, которое достигается на границе области D^+ , где корень должен исчезнуть.

Видно, что график „зарождается“ около нуля, „отрываясь“ от действительной оси, которая является непрерывным спектром, делает петлю и, когда параметр приближается к границе области D^+ , график „исчезает“, комплексный корень „вливается“ в действительную ось, в непрерывный спектр, „садится“ на разрез.

Интересно посмотреть, что происходит при высоких химических потенциалах, когда при возрастании частоты внешнего поля перебегают области D^+ и D^- . График для этого случая показан на

рис. 3, левый конец петли соответствует движению от нуля в сторону возрастания частоты внешнего поля. При приближении к границе области D^+ график корня приближается к действительной оси, корень становится частью непрерывного спектра, при движении далее по области D^- корень не наблюдается, а при попадании опять в область D^+ петля продолжает движение уже в первой четверти комплексной плоскости и при приближении к границе D^+ опять „садится“ на ось. При этом кривая выглядит гладкой, как будто и не было фрагмента области D^- . Это связано с узостью переходной области D^- между двумя областями существования моды Дебая.

Проанализированы условия существования и характер зависимости дебаевского экранирования от параметров, характеризующих электронную плазму, прежде всего от степени вырождения электронного газа. Впервые выявлена сложная зависимость дебаевской моды от степени вырождения электронного газа. Такое поведение оказывает существенное влияние на экранирование электрического поля в плазме.

Список литературы

- [1] Rubab N., Murtaza G. // Phys. Scripta. 2006. V. 74. N 2. P. 145–148.
- [2] Fahr H.J., Hey M. // Astronomy Astrophys. 2016. V. 589. P. A85 (1–5). DOI: 10.1051/0004-6361/201628082
- [3] Escande D.F., Elskens Y., Doveil F. // Plasma Phys. Control. Fusion. 2015. V. 57. N 2. P. 025017. <http://iopscience.iop.org/0741-3335/57/2/025017/article>
- [4] Stenson E.V., Horn-Stanja J., Stoneking M.R., Pedersen T.S. // J. Plasma Phys. 2017. V. 83. N 1. P. 1–13. DOI: 10.1017/S0022377817000022
- [5] Латышев А.В., Гордеева Н.М. // ТМФ. 2017. Т. 192. № 3. С. 506–522. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9290>
- [6] Gordeeva N.M., Yushkanov A.A. // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 996. P. 012009. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/996/1/012009>
- [7] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 535 с.
- [8] Латышев А.В., Юшканов А.А. Граничные задачи для вырожденной электронной плазмы. М.: МГОУ, 2006. 274 с.