Модуляционная неустойчивость электромагнитных возбуждений в нелокальной джозефсоновской электродинамике тонкой пленки немагнитного и магнитного (двумерного и трехмерного) сверхпроводника

© А.И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт Национальной академии наук Украины,
83114 Донецк, Украина

E-mail: lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

(Поступила в Редакцию 17 декабря 2002 г.)

Для джозефсоновского перехода в тонкой пленке немагнитного и магнитного (двумерного и трехмерного) сверхпроводника исследована модуляционная неустойчивость осциллирующих с джозефсоновской частотой нелинейных электромагнитных возбуждений конечной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты. Получены дисперсионные уравнения для инкрементов нарастания малых амплитудных возмущений. Показано, что для такого типа возбуждений в джозефсоновском переходе в тонкой пленке немагнитного сверхпроводника модуляционная неустойчивость развивается в конечной области волновых векторов, тогда как для двумерного и трехмерного магнитного сверхпроводника — при любой величине волнового вектора.

В настоящее время известно большое число магнитных сверхпроводников, проявляющих новые уникальные свойства [1–3], интерес к изучению которых не потерян и поныне. Сосуществование магнетизма и сверхпроводимости, помимо тройных соединений [4], установлено в ВТСП материалах типа REBaCuO, RECuO и других, где RE — редкоземельный ион. Достаточно сильная антиферромагнитная корреляция спинов меди в CuO_2 плоскостях в сверхпроводящем состоянии является одной из главных черт ВТСП материалов [5].

До сих пор не ослабевает интерес к исследованию широкого круга явлений неустойчивости волн в различных нелинейных системах и средах [6,7]. Известно, что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. В качестве примеров можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [8], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [9]. Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в оптических волокнах описывается неустойчивостью решений нелинейного уравнения Шредингера [10], в распределенных джозефсоновских переходах — неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon [11,12]. Наряду с теоретическим интересом явление модуляционной неустойчивости имеет ряд практических приложений. Например, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотй повторения [10], разработки новых логических устройств [13].

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно нелокальные модификации нелинейного уравнения Шредингера [14] и уравнения sine-Gordon [15–26].

Так, в работах [15,16] показано, что эффекты пространственной нелокальности могут быть существенными даже в контактах массивных сверхпроводников с большой толщиной $d \gg \lambda$ (λ — лондоновская глубина проникновния) вдоль магнитного поля (по направлению вихрей), т.е. в ситуациях, ранее рассматривавшихся в локальном приближении. В противоположном предельном случае контактов в тонких пленках, когда $d \ll \lambda$, локальный предел отсутствует, а пространственная нелокальность очень существенна и становится определяющим фактором. Соответствующие уравнения получены и изучались в работах [17–20]. Как показали исследования [21–23], для джозефсоновской электродинамики тонких пленок магнитных (двумерных и трехмерных) сверхпроводников наряду с пространственной нелокальностью существенной становится и временнáя нелокальность, порождаемая в конечном счете эффектами запаздывания. Джозефсоновский переход между двумя сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, ортогональном магнитному полю вихрей, изучался в [24]. В работах [25,26] осуществлено рассмотрение контакта „встык“ и наклонного (скошенного) перехода соответственно конечной толщины вдоль магнитного поля вихрей при произвольном отношении d/λ.

Из-за различных геометрий задач в перечисленных выше работах уравнения джозефсоновской электродинамики отличаются видом ядра интегрального оператора, описывающего эффект пространственно нелокальной связи. Однако во всех этих работах пространственная нелокальность уравнений для разности фаз возникает вследствие нелокальной связи поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина пространственной нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов, а сама нелокальность становится, скорее, правилом, чем исключением.

Модуляционная неустойчивость в рамках пространственно нелокальной джозефсоновской электродинамики контакта из массивных сверхпроводников впервые рассмотрена в работе [15]. Показано, что процесс нарастания малых возмущений амплитуды и фазы отвечает развитию модуляционной неустойчивости электромагнитной волны конечной постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты и с законом дисперсии линейного приближения. Выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость. В работе [27] для джозефсоновского перехода также из массивных сверхпроводников исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой плоской нелинейной электромагнитной волны конечной амплитуды, обусловленная нарастанием малых возмущений амплитуды и приводящая к разбиению такой волны на пакеты.

Тем более актуальным становится исследование модуляционной неустойчивости электромагнитных возбуждений в рамках нелокальной электродинамики Джозефсона в тонких двумерных сверхпроводящих пленках, которое до сих пор не проводилось. Такими нелинейными системами, в которых также может проявляться модуляционная неустойчивость, является переход Джозефсона в ультратонкой пленке немагнитного или двумерного и трехмерного магнитного сверхпроводника толщиной $d \ll \lambda$.

Одна из рассматриваемых систем — тонкая пленка магнитного сверхпроводника — по своим магнитным свойствам является двумерной либо трехмерной, в тех случаях, когда магнитная проницаемость пленки μ зависит от двух (в плоскости пленки) либо трех координат и времени. Дело в том, что в двумерной по своим сверхпроводящим свойствам пленке благодаря близкодействию примесных спинов в магнитной подсистеме может устанавливаться двумерное (в плоскости пленки) либо трехмерное (в плоскости пленки, а также по ее толщине) магнитное упорядочение.

Геометрия задачи такова: плоскоть пленки совпадает с плоскостью $X0Y$, ток распространяется вдоль оси $0Y$, а линия слабых связей расположена по оси $0X$.

1. Пленка двумерного магнитного сверхпроводника

Предположим, что рассматриваемая система двумерна не только по своим сверхпроводящим, но и магнитным свойствам, т. е. магнитную проницаемость пленки можно представить в виде

$$\mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \mu(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', t - t')\delta(z - z'), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$.

При этом динамика разности фаз на берегах джозефсоновского перехода $\varphi(x, t)$ при любом типе магнитного упорядочения в тонкой двумерной магнитной сверхпроводящей пленке описывается нелинейным интегродифференциальным уравнением sine-Gordon с пространственной и временнóй нелокальностью [21,22]

$$\sin\varphi(x,t) + \frac{\beta}{\omega_J^2}\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega_J^2}\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$= l_J \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\, K\left(\frac{x - x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t - t'\right) \frac{\partial^2\varphi(x', t')}{\partial x'^2}. \quad (2)$$

Здесь ω_J — джозефсоновская частота, β — диссипативный параметр, $l_J = \lambda_J^2/\lambda$, λ_J — джозефсоновская длина, $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2/d$ — пирловская глубина проникновения, а нелокальное по пространственной и временнóй переменным интегральное ядро $K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t - t'\right)$ имеет вид

$$K\left(\frac{x - x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t - t'\right)$$
$$= \int\limits_0^{\infty} \frac{dq}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\lambda_{\text{eff}} J_0[q(x - x')] \exp[-i\omega(t - t')]}{\mu(\mathbf{q}, \omega) + 2q\lambda_{\text{eff}}}, \quad (3)$$

где $J_0(qx)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Нелокальность уравнения (2) по времени обусловлена частотной дисперсией магнитной проницаемости $\mu(\mathbf{q}, \omega)$.

Поскольку величина $\lambda \gg a$ (a — постоянная кристаллической решетки), то естественно использовать гидродинамическое описание магнитной подсистемы. Ограничиваясь парамагнитной областью температур, для магнитной проницаемости имеем выражение [28]

$$\mu(\mathbf{q}, \omega) = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{iD_2 q^2}{\omega + iD_2 q^2}, \qquad (4)$$

где χ_0 — статическая магнитная восприимчивость, а коэффициент спиновой диффузии для двумерных гейзенберговских магнетиков равен [29] $D_2 = (1/3)(2\pi)^{1/2} \times Ja^2[s(s+1)]^{1/2}$ (J — параметр внутрислоевого обмена, s — спин).

Рассмотрим эволюцию нелинейных, осциллирующих с джозефсоновской частотой ω_J волн малой, но конечной амплитуды типа бризера в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x, t)$ в виде

$$\varphi(x,t) = u(x,t)\exp(-i\omega_J t)$$
$$+ u^*(x,t)\exp(i\omega_J t), \quad |u(x,t)| \ll 1. \qquad (5)$$

В бездиссипативном пределе $\beta = 0$ учтем в уравнении (2) нижний порядок нелинейности на основной частоте ω_J и ограничимся приближением медленно меняющейся во времени амплитуды $u(x, t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2 u(x,t)/\partial t^2| \ll 2\omega_J |\partial u(x,t)/\partial t|$. Тогда из уравнения (2) при подстановке в него поля (5) для амплитуды $u(x,t)$ получаем следующее уравнение:

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\,|u(x,t)|^2u(x,t)$$

$$+\,l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\mathrm{eff}}},t-t'\right)$$

$$\times\exp[i\omega_J(t-t')]\,\frac{\partial^2u(x',t')}{\partial x'^2}=0. \qquad (6)$$

Это нелинейное нелокальное „уравнение Шредингера", которое имеет точное решение вида плоской нелинейной волны постоянной в пространстве амплитуды A с нелинейным сдвигом частоты

$$u_0(t)=A\exp(iA^2\omega_Jt/4),\quad A\ll 1. \qquad (7)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (7) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуды

$$u(x,t)=[A+\psi(x,t)]\exp(iA^2\omega_Jt/4),\quad |\psi(x,t)|\ll A. \quad (8)$$

Из уравнения (6) для малого возмущения $\psi(x,t)$ следует линейное уравнение

$$i\,\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\,A^2[\psi(x,t)+\psi^*(x,t)]$$

$$+\,l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\mathrm{eff}}},t-t'\right)$$

$$\times\exp[i\omega_J(1-A^2/4)(t-t')]\,\frac{\partial^2\psi(x',t')}{\partial x'^2}=0. \qquad (9)$$

Полагая в уравнении (9) $\psi(x,t)=v(x,t)+iw(x,t)$, для действительной и мнимой частей возмущения получаем систему уравнений

$$\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}+l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\mathrm{eff}}},t-t'\right)$$

$$\times\exp[i\omega_J(1-A^2/4)(t-t')]\,\frac{\partial^2w(x',t')}{\partial x'^2}=0,$$

$$-\,\frac{2}{\omega_J}\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+A^2v(x,t)$$

$$+\,l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\mathrm{eff}}},t-t'\right)$$

$$\times\exp[i\omega_J(1-A^2/4)(t-t')]\,\frac{\partial^2v(x',t')}{\partial x'^2}=0. \qquad (10)$$

Для возмущений вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$v(x,t)=V(Q,\Omega)\exp[i(Qx-\Omega t)],$$

$$w(x,t)=W(Q,\Omega)\exp[i(Qx-\Omega t)], \qquad (11)$$

распространяющихся вдоль перехода Джозефсона с волновым вектором Q и частотой Ω, из системы уравнений (10) следует дисперсионное соотношение $\tilde\Omega=\tilde\Omega(\tilde Q)$

$$\tilde\Omega^2=\frac{L}{2\pi}\,\tilde Q^2J_{(2)}(\tilde Q,\tilde\Omega)\left[\frac{2L}{\pi}\,\tilde Q^2J_{(2)}(\tilde Q,\tilde\Omega)-A^2\right], \qquad (12)$$

где

$$J_{(2)}(\tilde Q,\tilde\Omega)=\int\limits_0^{\infty}dx\left[1+\tilde Q\cosh x\right.$$

$$\left.+\,\frac{4\pi\chi_0\tilde Q^2\cosh^2x}{-i\eta_2(\tilde\Omega+1-A^2/4)+\tilde Q^2\cosh^2x}\right]^{-1}, \qquad (13)$$

а также введены безразмерные величины $\tilde Q=2Q\lambda_{\mathrm{eff}}$, $\tilde\Omega=\Omega/\omega_J$ и использованы следующие обозначения: $L=l_J/2\lambda_{\mathrm{eff}}$, $\eta_2=(2\lambda_{\mathrm{eff}})^2\omega_J/D_2$.

Неявное относительно $\tilde\Omega(\tilde Q)$ дисперсионное уравнение (12) с учетом (13) имеет комплексное решение $\tilde\Omega(\tilde Q)=\mathrm{Re}\,\tilde\Omega(\tilde Q)+i\,\mathrm{Im}\,\tilde\Omega(\tilde Q)$. При величине $\mathrm{Im}\,\tilde\Omega(\tilde Q)>0$ малые возмущения амплитуды (11) будут нарастать со временем, и при этом в джозефсоновском переходе в тонкой пленке двумерного магнитного сверхпроводника будет развиваться модуляционная неустойчивость плоской нелинейной электромагнитной волны (7).

2. Пленка трехмерного магнитного сверхпроводника

Теперь предположим, что двумерная по своим сверхпроводящим свойствам рассматриваемая система все же трехмерна по своим магнитным свойствам, когда магнитная проницаемость пленки μ зависит от трех координат и времени: $\mu=\mu(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')$.

В этом случае динамика разности фаз на джозефсоновском переходе $\varphi(x,t)$ при любом типе магнитного упорядочения в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника описывается нелинейным интегродифференциальным уравнением sine-Gordon с пространственной и временно́й нелокальностью [22,23]

$$\sin\varphi(x,t)+\frac{\beta}{\omega_J^2}\,\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{\omega_J^2}\,\frac{\partial^2\varphi(x,t)}{\partial t^2}$$

$$=l_J\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx'\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\mathrm{eff}}},t-t'\right)\frac{\partial^2\varphi(x',t')}{dx'^2}. \qquad (14)$$

Нелокальное по пространственной и временнóй переменным интегральное ядро $K(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t')$ имеет вид

$$K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t'\right) = \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\lambda_{\text{eff}} J_0[q(x-x')] \exp[-i\omega(t-t')]}{q[R(\mathbf{q},\omega)+\lambda_{\text{eff}}]}, \quad (15)$$

где функция $R(\mathbf{q},\omega)$ определяется интегралом

$$R(\mathbf{q},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \frac{\mu(\mathbf{q},p,\omega)}{p^2+q^2}. \quad (16)$$

Нелокальность уравнения (14) по времени обусловлена частотной дисперсией магнитной проницаемости $\mu(\mathbf{q},p,\omega)$ (через посредство функции $R(\mathbf{q},\omega)$).

Здесь, как и в предыдущем разделе, при величине $\lambda \gg a$ естественно использовать гидродинамическое описание магнитной подсистемы. Ограничиваясь также парамагнитной областью температур, для магнитной проницаемости имеем выражение

$$\mu(\mathbf{q},p,\omega) = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{iD_3(q^2+p^2)}{\omega + iD_3(q^2+p^2)}, \quad (17)$$

где D_3 — коэффициент спиновой диффузии для трехмерных гейзенберговских магнетиков.

Согласно формуле (16), с учетом выражения (17) функция $R(q,\omega)$ приобретает вид

$$R(\mathbf{q},\omega) = \frac{f_0(q,\omega) + i4\pi\chi_0 q}{2q f_0(q,\omega)}, \quad (18)$$

где $f_0(q,\omega)$ равно

$$f_0(q,\omega) = \left[(q^4+\omega^2/D_3^2)^{1/2}/2 - q^2/2\right]^{1/2} + i\left[(q^4+\omega^2/D_3^2)^{1/2}/2 + q^2/2\right]^{1/2}. \quad (19)$$

Уравнения динамики разности фаз (2) и (14) различаются лишь видом ядра интегрального оператора $K(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}, t-t')$, определяемого формулами (3) и (15) соответственно. Поэтому, повторяя схему рассуждений и математических преобразований предыдущего раздела, которые от исходного уравнения (2) привели к дисперсионному уравнению (12), и исходя из уравнения (14), получим дисперсионное уравнение $\tilde\Omega = \tilde\Omega(\tilde Q)$, определяющее инкремент нарастания малых возмущений амплитуды в виде

$$\tilde\Omega^2 = \frac{L}{2\pi}\tilde Q^2 J_{(3)}(\tilde Q,\tilde\Omega)\left[\frac{2L}{\pi}\tilde Q^2 J_{(3)}(\tilde Q,\tilde\Omega) - A^2\right], \quad (20)$$

где

$$J_{(3)}(\tilde Q,\tilde\Omega) = \int_0^\infty \frac{dx F_0(\tilde Q\cosh x,\tilde\Omega)}{F_0(\tilde Q\cosh x,\tilde\Omega)(1+\tilde Q\cosh x) + i4\pi\chi_0\tilde Q\cosh x} \quad (21)$$

и

$$F_0(x,y) = \left\{\left[x^4+\eta_3^2(y+1-A^2/4)^2\right]^{1/2}/2 - x^2/2\right\}^{1/2} + i\left\{\left[x^4+\eta_3^2(y+1-A^2/4)^2\right]^{1/2}/2 + x^2/2\right\}^{1/2}, \quad (22)$$

а также, как и выше, введены безразмерные величины $\tilde Q = 2Q\lambda_{\text{eff}}$, $\tilde\Omega = \Omega/\omega_J$ и использованы следующие обозначения: $L = l_J/2\lambda_{\text{eff}}$, $\eta_3 = (2\lambda_{\text{eff}})^2\omega_J/D_3$.

Неявное относительно $\tilde\Omega(\tilde Q)$ дисперсионное уравнение (20) с учетом (21) и (22) имеет комплексное решение $\tilde\Omega(\tilde Q) = \operatorname{Re}\tilde\Omega(\tilde Q) + i\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q)$. При величине $\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q) > 0$ малые возмущения амплитуды (11) будут нарастать со временем, и при этом в переходе Джозефсона в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника будет развиваться модуляционная неустойчивость плоской нелинейной электромагнитной волны (7).

3. Пленка немагнитного сверхпроводника

В случае немагнитной сверхпроводящей пленки при величине $\chi_0 = 0$ интегралы (13) и (21) совпадают и являются функцией лишь волнового вектора $\tilde Q$ (см. также работу [20])

$$J(\tilde Q) = \frac{1}{2\sqrt{1-\tilde Q^2}} \ln\frac{1+\sqrt{1-\tilde Q^2}}{1-\sqrt{1-\tilde Q^2}} \quad \text{для} \quad \tilde Q \le 1,$$

$$J(\tilde Q) = \frac{2}{\sqrt{\tilde Q^2-1}} \arctan\frac{\sqrt{\tilde Q^2-1}}{1+\tilde Q} \quad \text{для} \quad \tilde Q \ge 1. \quad (23)$$

При этом дисперсионнные уравнения (12) и (20) совпадают и переходят в явное уравнение относительно $\tilde\Omega(\tilde Q)$

$$\tilde\Omega^2(\tilde Q) = \frac{L}{2\pi}\tilde Q^2 J(\tilde Q)\left[\frac{2L}{\pi}\tilde Q^2 J(\tilde Q) - A^2\right], \quad (24)$$

которое для инкремента нарастания возмущения со временем имеет положительное решение $\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q) > 0$ в конечной области волновых векторов $0 < \tilde Q < \tilde Q_B$, где и развивается модуляционная неустойчивость. В области волновых векторов $\tilde Q \ge \tilde Q_B$ инкремент нарастания $\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q) = 0$ и волна является устойчивой. Пограничный волновой вектор $\tilde Q_B$ определяется из уравнения

$$\tilde Q_B^2 J(\tilde Q_B) = \frac{\pi A^2}{2L}. \quad (25)$$

Согласно дисперсионным уравнениям (12), (20) и (24), максимальное значение инкремента нарастания возмущений как для случая немагнитной сверхпроводящей пленки, так и для случая пленок магнитного двумерного и трехмерного сверхпроводника равно

$$\left(\operatorname{Im}\tilde\Omega(\tilde Q_m)\right)_{\max} = A^2/4 \quad (26)$$

и достигается при значении волнового вектора $\tilde{Q}_m$, являющегося корнем следующего уравнения

$$\tilde{Q}_m^2 J(\tilde{Q}_m) = \frac{\pi A^2}{4L}. \qquad (27)$$

4. Численный анализ и выводы

Для джозефсоновского перехода в тонкой пленке немагнитного сверхпроводника при величине $\chi_0 = 0$ согласно дисперсионному уравнению (24) с учетом (23) при росте величины волнового вектора $\tilde{Q}$ область модуляционной неустойчивости переходит в область устойчивости волн. Результаты численного счета представлены на рис. 1, где изображены области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной электромагнитной волны (7) при фиксированной величине амплитуды A для трех значений параметра L.

Согласно численному анализу, для тонкой пленки двумерного магнитного сверхпроводника при величинах $\chi_0 = 10^{-2}$ (такие значения статической магнитной восприимчивости имеют тройные, а также ВТСП соединения, содержащие редкоземельные ионы, вблизи температуры магнитного упорядочения $T_N \propto 1\,\mathrm{K}$) и $\eta_2 = 1$ дисперсионное уравнение (12) с учетом (13) при любой величине волнового вектора $\tilde{Q}$ имеет положительное решение для инкремента нарастания амплитудных возмущений $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q})$. На рис. 2 представлены перенормированные магнитной подсистемой зависимости инкремента нарастания от волнового вектора при фиксированной величине амплитуды A для трех значений параметра L.

В случае тонкой пленки трехмерного магнитного сверхпроводника при той же величине параметра χ_0 и $\eta_3 = 1$ численный анализ показал, что дисперсионное уравнение (20) с учетом (21), (22) также при любой величине волнового вектора $\tilde{Q}$ имеет положительное решение для инкремента нарастания амплитудных возмущений $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q})$. На рис. 3 показаны перенормированные магнитной подсистемой зависимости инкремента нарастания от волнового вектора при фиксированной величине амплитуды A для трех значений параметра L.

Видимое сходство рис. 2 и 3, связанное с малостью величины χ_0, в приведенном масштабе обманчиво, так как все соответствующие кривые на этих рисунках численно отличаются друг от друга в восьмом знаке после запятой, исключая точки максимальных значений инкремента нарастания, которые совпадают по своей величине.

Из сравнения рис. 1–3 следует, что для тонких пленок двумерного и трехмерного магнитного сверхпроводника в узкой области вблизи значения пограничного волнового вектора $\tilde{Q} = \tilde{Q}_B$ наблюдается „кроссовер“ зависимости инкремента нарастания $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q})$ от волнового вектора $\tilde{Q}$. Поэтому можно выделить две области модуляционной неустойчивости, непрерывно переходящие одна в другую: область сильной неустойчивости $0 < \tilde{Q} < \tilde{Q}_B$, в которой при выбранной величине $A = 10^{-1}$ величина $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q}) \propto 10^{-3}$, и область слабой неустойчивости $\tilde{Q} > \tilde{Q}_B$, где величина $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q}) \propto 10^{-6}{-}10^{-7}$. Инкремент нарастания с ростом величины волнового вектора ведет себя так, что $\operatorname{Im}\tilde{\Omega}(\tilde{Q}) \to 0$ при $\tilde{Q} \to \infty$.

Осциллирующая с джозефсоновской частотой плоская нелинейная волна в процессе развития модуляционной неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — малоамплитудных бризеров, частота повторения которых определяется периодом модуляции исходной волны $L_0 = 2\pi/Q$.

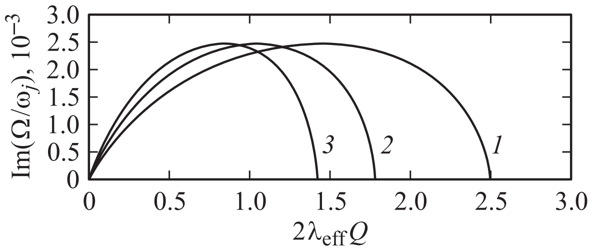

Рис. 1. Области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной электромагнитной волны (7) в тонкой пленке немагнитного сверхпроводника при величинах амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 0.5 \cdot 10^{-2}$ (*1*), $L = 0.75 \cdot 10^{-2}$ (*2*) и $L = 10^{-2}$ (*3*).

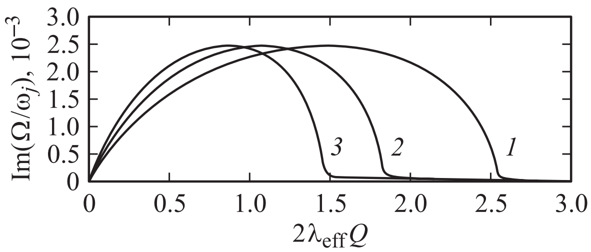

Рис. 2. Зависимости инкремента нарастания малых возмущений амплитуды плоской нелинейной электромагнитной волны (7) от волнового вектора в тонкой пленке двумерного магнитного сверхпроводника при величинах амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 0.5 \cdot 10^{-2}$ (*1*), $L = 0.75 \cdot 10^{-2}$ (*2*) и $L = 10^{-2}$ (*3*).

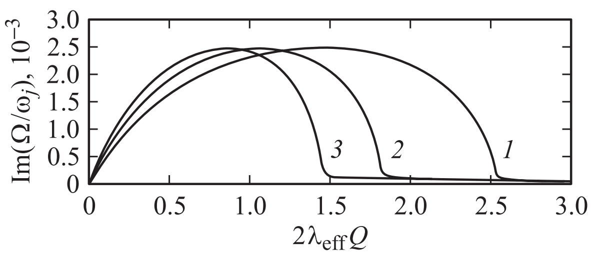

Рис. 3. Зависимости инкремента нарастания малых амплитудных возмущений плоской нелинейной электромагнитной волны (7) от волнового вектора в тонкой пленке трехмерного магнитного сверхпроводника при величинах амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 0.5 \cdot 10^{-2}$ (*1*), $L = 0.75 \cdot 10^{-2}$ (*2*) и $L = 10^{-2}$ (*3*).

Из проведенных исследований можно сделать следующий вывод. В бездиссипативном пределе для джозефсоновского перехода в тонкой пленке двумерного или трехмерного магнитного сверхпроводника временна́я нелокальность уравнения динамики разности фаз, обусловленная частотной дисперсией магнитной проницаемости и порождаемая процессом двумерной либо трехмерной диффузии спиновых волн в магнитной подсистеме, приводит к дополнительному развитию модуляционной неустойчивости плоских нелинейных электромагнитных волн в той области волновых векторов $\tilde{Q} \geq \tilde{Q}_B$, в которой для пленки немагнитного сверхпроводника они были устойчивы.

В заключение выражаю искреннюю признательность Ю.В. Медведеву и И.Б. Краснюку за полезные обсуждения, внимание и поддержку, а также благодарность А.Н. Артёмову и С.М. Орлу за консультации, связанные с численным счетом.

Список литературы

[1] А.И. Буздин, Л.Н. Булаевский, М.Л. Кулич, С.В. Панюков. УФН **144**, *4*, 597 (1984).
[2] А.И. Буздин, Л.Н. Булаевский. УФН **149**, *1*, 45 (1986).
[3] Ю.А. Изюмов, Н.М. Плакида, Ю.Н. Скрябин. УФН **159**, *4*, 621 (1989).
[4] Сверхпроводимость тройных соединений / Под ред. М. Мейпла и Э. Фишера. Мир, М. (1985). 392 с.
[5] Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников / Под ред. Д.М. Гинзберга. Мир, М. (1990). Гл. 4, 6 543 с.
[6] В.И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Наука, М. (1973). 176 с.
[7] Б.Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Наука, М. (1976). 240 с.
[8] Г.А. Аскарьян. ЖЭТФ **42**, *6*, 1567 (1962); В.И. Беспалов, В.И. Таланов. Письма в ЖЭТФ **3**, *12*, 471 (1966).
[9] M.J. Lighthill. J. Inst. Math. Appl. **1**, *2*, 269 (1965); Proc. Roy. Soc. **A229**, *1*, 28 (1967).
[10] A. Hasegawa. Opt. Lett. **9**, *3*, 288 (1984).
[11] Н.Н. Ахмедиев, В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин. Изв. вузов. Радиофизика **31**, *2*, 244 (1988).
[12] N.M. Ercolani, M.G. Forest, D.W. McLaughlin. Lett. Appl. Math. **23**, *1*, 149 (1986).
[13] M. Islam. Ultra fast optical devices. Oxford University Press, Oxford (1993).
[14] M. Alfimov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin. Chaos **2**, *4*, 454 (1992).
[15] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Сверхпроводимость **5**, *2*, 228 (1992).
[16] A. Gurevich. Phys. Rev. B **46**, *5*, 3187 (1992).
[17] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. Письма в ЖЭТФ **51**, *2*, 100 (1990).
[18] Yu.M. Ivanchenko, T.K. Soboleva. Phys. Lett. **A147**, *1*, 65 (1990).
[19] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. ФТТ **32**, *7*, 2029 (1990).
[20] R.G. Mints, I.B. Snapiro. Phys. Rev. B **51**, *5* 3054 (1995).
[21] А.И. Ломтев. Письма в ЖЭТФ **69**, *2*, 132 (1999).
[22] А.И. Ломтев. ФТТ **42**, *1*, 16 (2000).
[23] А.И. Ломтев. ЖТФ **70**, *9*, 63 (2000).
[24] И.О. Кулик, И.К. Янсон. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. Наука, М. (1970). 272 с.
[25] Ю.Е. Кузовлев, А.И. Ломтев. ЖЭТФ **111**, *5*, 1803 (1997).
[26] А.И. Ломтев. ЖЭТФ **113**, *6*, 2256 (1998).
[27] Ф.Х. Абдуллаев. Письма в ЖТФ **23**, *2*, 8 (1997).
[28] B.I. Halperin, P.C. Hohenberg. Phys. Rev. **188**, *2*, 898 (1969).
[29] P.M. Richards, M.B. Salamon. Phys. Rev. B **9**, *1*, 32 (1974).