05.1

Учет влияния полей остаточных деформаций в современных физико-механических технологиях обработки конструкционных материалов

© *Ю.Н. Кульчин, В.Е. Рагозина, О.В. Дудко*¶

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия
¶ E-mail: dudko@iacp.dvo.ru

Поступило в Редакцию 2 августа 2018 г.

Для нелинейной градиентной модели больших упругопластических деформаций дано строгое определение механизмов перераспределения предварительно накопленных необратимых деформаций в результате дополнительных упругих ударных воздействий на материал. Показано, что такое перераспределение ограничивается жестким переносом и вращением тензора пластических деформаций. Получены формулы изменения начальных значений компонент тензора пластических деформаций в упругих волнах. Показано, что предварительное пластическое поле влияет на динамику дальнейшего обратимого деформирования как один из факторов создания начального квазистатического упругого поля, которое невозможно получить в чисто упругом процессе.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47152.17487

Развитие эффективных технологий интенсивной обработки деталей конструкций основано на использовании современного лазерного и электронно-лучевого оборудования [1–3] и дополняется традиционными методами термомеханического импульсного воздействия. Разработка таких технологий невозможна без создания теоретических нелинейных моделей и их верификации по накопленным экспериментальным данным. В частности, согласно общим положениям механики сплошных сред, моделирование деформационного поведения твердых тел при лазерной обработке обязательно должно одновременно учитывать и геометрическую, и физическую нелинейность связей напряжений, деформаций и температуры. Нелинейные модели более тонко отражают взаимодействие полей остаточных внутренних напряжений и деформаций с акустическими волнами, возникающими в материале наряду с локальной областью максимального поглощения энергии лазерного или ионизирующего излучения. Известно [4], что такие волны создают „эффекты дальнодействия“, которые могут приводить к существенным изменениям геометрии поверхности конструкции. Цель настоящей работы заключается в выявлении причин указанных деформационных эффектов для последующей разработки оптимальных воздействий, позволяющих получать детали с необходимыми свойствами и требуемой геометрией. Для этого определим механизмы перераспределения необратимых деформаций, а также укажем степень влияния предварительного пластического поля на последующие упругие процессы в рамках нелинейной градиентной модели больших упругопластических деформаций [5], активно развивающейся в настоящее время.

Основное предположение модели [5] — разделение левого тензора деформаций Альманзи $\mathbf{A}$ на упругую ($\mathbf{E}$) и пластическую ($\mathbf{P}$) части согласно представлению

$$2\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}^{-1\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{V}^{-2} = \mathbf{I} - (\mathbf{I}-\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{I}-2\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{I}-\mathbf{E}),$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{R}^i = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{r}_i = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a^i}\right|_t, \quad \mathbf{R}_i = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a^i}\right|_T,$$

$$\mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}_j = \delta^i_j, \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}, \tag{1}$$

где $\mathbf{\Phi}$ — базовый тензор-градиент деформаций ($\otimes$ — операция внешнего тензорного произведения); $\mathbf{V}$ — левый тензор искажений; $\mathbf{I}$ — метрический тензор; $\mathbf{E}$ — базовый тензор для упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^2/2$; $\mathbf{r}(a^i, t)$ — радиус-вектор точки среды в евклидовом пространстве; a^i — координаты Лагранжа; моментам $t \geq 0$ и $T < 0$ соответствуют актуальная и свободная конфигурации. Представление (1) позволяет учесть взаимодействия $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ на различных стадиях деформирования. При этом ставим основную цель — указать механизм изменения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ в среде, где в момент $t = 0$ существуют предварительные статические деформации $\mathbf{E}^\circ \neq 0$ и $\mathbf{P}^\circ \neq 0$, а при $t \geq 0$ происходит дополнительное упругое деформирование. Для этого определим промежуточную конфигурацию $\mathbf{r}^\circ = \mathbf{r}(a^i, T_0)$ и связанные с ней тензоры-градиенты деформаций $\mathbf{F}$ и $\mathbf{\Psi}$

$$\mathbf{r}^\circ_i = \frac{\partial \mathbf{r}^\circ}{\partial a^i} = \left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a^i}\right|_{T_0}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{r}^\circ_i \otimes \mathbf{R}^i, \quad \mathbf{\Psi} = \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}^{\circ i},$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^\circ\big(\mathbf{r} - \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)\big),$$

$$\mathbf{\Psi}^{-1\mathrm{T}} = \mathbf{I} - \nabla \otimes \mathbf{h}, \quad \mathbf{H} = \nabla \otimes \mathbf{h} = h^j_{,i} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_j,$$

$$h^j_{,i} = \frac{\partial h^j}{\partial a^i} + \Gamma^j_{ik} h^k,$$

$$\mathbf{I} - 2\mathbf{A} = \mathbf{\Psi}^{-1\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{A}^\circ) \cdot \mathbf{\Psi}^{-1}. \tag{2}$$

В (2) $T_0 \geq t = 0$ — момент вовлечения точки среды вместе с ее локальной окрестностью в новый упругий процесс. Поскольку актуальная конфигурация среды выбрана в качестве основной, $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ — дополнительные перемещения, создаваемые упругим процессом при $t \geq T_0$, $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{h}(\mathbf{r}, t))$ — поле ранее созданных квазистатических перемещений. Из (2) для тензора Альманзи $\mathbf{A}$ с учетом его промежуточного значения $\mathbf{A}^\circ$ получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{P} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \\
&+ \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T}) - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\circ - \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} \\
&+ \mathbf{P}^\circ - \mathbf{P}^\circ \cdot (\mathbf{E}^\circ + \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{E}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T}) - (\mathbf{E}^\circ + \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^\circ) \cdot \mathbf{P}^\circ \\
&+ \mathbf{D}^\circ + \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{E}^\circ - \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}^\circ + \mathbf{E}^\circ \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{D}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} \\
&+ \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^\circ \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{E}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} \\
&+ \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}^\circ \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{D}^\circ = \mathbf{E}^\circ \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{E}^\circ$, $\mathbf{E}^\circ = \mathbf{E}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{h}(\mathbf{r}, t))$, $\mathbf{P}^\circ = \mathbf{P}^\circ(\mathbf{r} - \mathbf{h}(\mathbf{r},t))$.

Если изменение тензора $\mathbf{P}$ в упругом процессе связано только с его жестким поворотом, то

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot \mathbf{C}^\mathrm{T}, \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^\mathrm{T} = \mathbf{C}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{W}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и утверждая, что упругая деформация $\boldsymbol{\varepsilon}$ зависит от своего начального значения $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ и поля $\mathbf{H}$ и не зависит от уровня предварительных значений $\mathbf{P}^\circ$, для тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{W}$ и $\mathbf{C}$ нетрудно получить

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E}^2}{2} = \boldsymbol{\varepsilon}^\circ + \frac{1}{2}\big(\mathbf{H} \cdot (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}^\circ) \\
+ (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}^\circ) \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} - \mathbf{H} \cdot (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}^\circ) \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T}\big), \\
\mathbf{W} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}^\circ + \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^\circ - \mathbf{H}), \\
\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{W} = (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ).
\end{gathered} \tag{5}$$

Тензор $\mathbf{C}$ в (5) является ортогональным ($\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^\mathrm{T} = \mathbf{C}^\mathrm{T} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}$), поэтому задает жесткое вращение $\mathbf{P}^\circ$. Соотношения (4), (5) обращают (3) в тождество. Нетрудно проверить, что, предполагая только жесткое вращение $\mathbf{P}^\circ$, из связи (2) между $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Psi}^{-1}$ и $\mathbf{A}^\circ$ получим представление (5) для тензора $\mathbf{C}$. Далее условие ортогональности $\mathbf{C}$ определяет связь $\boldsymbol{\varepsilon}$ с $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$ через первую формулу (5). Таким образом, исходное утверждение для $\boldsymbol{\varepsilon}$ доказано. Для исключения возможности существования другого решения задачи (иной связи $\boldsymbol{\varepsilon}$ с $\boldsymbol{\varepsilon}^\circ$, $\mathbf{P}^\circ$, $\mathbf{H}$) проведем доказательство в обратную сторону. Из (2) следует

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} - 2\mathbf{A} &= (\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}) \\
&= \mathbf{\Psi}^{-1\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot \mathbf{\Psi}^{-1} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^\mathrm{T}) \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^\circ) \cdot \mathbf{C}^\mathrm{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^\circ) \cdot \mathbf{C}^\mathrm{T} &= (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{P}^\circ) \\
&\times (\mathbf{I} - \mathbf{E}^\circ) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{H}^\mathrm{T}) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1},
\end{aligned} \tag{6}$$

что позволяет определить тензор $\mathbf{C}$ через $\mathbf{E}^\circ$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$. Условие ортогональности $\mathbf{C}$ приводит к исходному предположению (5) для тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ и тем самым завершает наше доказательство.

Далее рассмотрим особенности движения упругих ударных волн в среде с предварительными пластическими деформациями. Для этого отметим, что в модели [5] тензор напряжений $\mathbf{T}$ Эйлера–Коши для изотропной среды связан с деформациями $\mathbf{E}, \mathbf{P}$ через квазипотенциальное соотношение

$$\mathbf{T} = \rho\rho_0^{-1} U_{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho\rho_0^{-1} U_{\mathbf{E}} (\mathbf{I} - \mathbf{E}), \tag{7}$$

где упругий потенциал U — функция инвариантов тензора упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$; $U_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ и $U_{\mathbf{E}}$ — ее тензорные производные; $\rho\rho_0^{-1}$ — изменение плотности среды, которое может зависеть от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ для пластически сжимаемого материала и только от $\mathbf{E}$ для пластически несжимаемой среды. Если предварительное состояние среды квазистатическое, то поле вектора скорости $\mathbf{v}$ зависит только от динамической компоненты $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$. Из (7) следует, что на переднем фронте упругих ударных волн динамические условия совместности [6] не зависят от пластических деформаций $\mathbf{P}$. Поэтому возможные скорости и типы ударных волн (как и методы вычисления динамического поля $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$) можно искать в работах, посвященных динамике нелинейно-упругих сред (например, [6,7]). Перераспределение пластических деформаций $\mathbf{P}^\circ$ и их поворот могут быть вычислены по найденному полю $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$, что является исключительно удобным при реализации численных схем. Для вычисления поворотов тензора $\mathbf{P}^\circ$ дополнительным важным свойством является возможность появления скачков компонент $\mathbf{P}$ на передних фронтах упругих ударных волн:

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot (\mathbf{C}^\mathrm{T})^+ + \mathbf{C}^+ \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot [\mathbf{C}^\mathrm{T}] - [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{P}^\circ \cdot [\mathbf{C}^\mathrm{T}],$$

$$[\mathbf{C}] = \mathbf{C}^+ - \mathbf{C}^-,$$

причем скачкообразный поворот $[\mathbf{C}]$ вычисляется через $[\mathbf{E}]$, $[\mathbf{H}]$, согласно (5).

Относительно влияния пластических деформаций на упругие процессы отметим следующее. С одной стороны, пластические деформации не входят в краевые условия динамической задачи и их наличие в скалярном

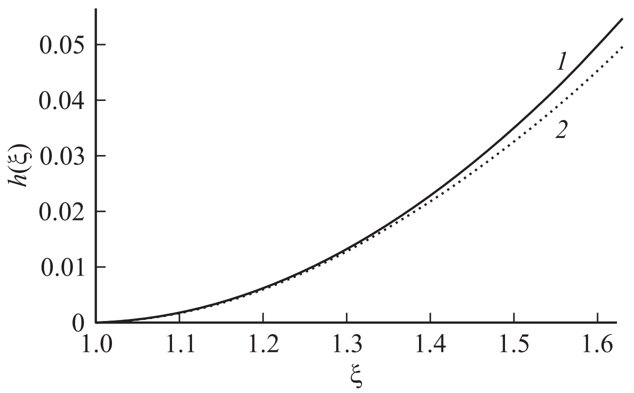

Рис. 1. Мгновенное распределение поля $h(\xi)$ в прифронтовой окрестности упругой ударной волны ($\xi = 1$) в момент $T_1 = 10^{-6}$ s. *1* — численное решение, *2* — аналитическое приближение.

множителе $\rho\rho_0^{-1}$ формулы (7) зависит от модели пластичности. С другой стороны, пластические деформации косвенно влияют на интегрирование уравнений движения относительно вектора $\mathbf{h}$ и упругих деформаций $\mathbf{E}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ из-за наличия в этих уравнениях $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}$. В общем случае компоненты $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}$ не удовлетворяют условиям совместности деформаций и определяемое с их участием поле $\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$ не имеет аналога в решениях чисто упругих задач. Если граница деформируемого материала заранее неизвестна, то ненулевой тензор $\mathbf{P}^{\circ}$ окажет влияние и на ее вычисление.

Проиллюстрируем применение изложенных общих соотношений на максимально простом примере движения сферической продольной упругой ударной волны сжатия от границы сферического дефекта. Полагаем, что в области $r \geq r_0 + l(t)$ $(r_0 \neq 0,\ l(t) \geq 0,\ l(0) = 0)$ до момента $t = 0$ при $e^{\circ}_{rr} = e^{\circ}_{\phi\phi} = e^{\circ}_{\theta\theta} = 0$ имеются ненулевые p°_{rr} и $p^{\circ}_{\phi\phi} = p^{\circ}_{\theta\theta}$. Дополнительно считаем, что $\rho\rho_0^{-1}\big|_{t\leq 0} = K_0 = \mathrm{const} < 1$ (предварительное статическое растяжение) и ударная волна движется с постоянной скоростью $G = \mathrm{const}$. Сохраняя в (7) только линейные слагаемые по компонентам $\mathbf{E}$ и переходя в безразмерное пространство $\xi = r^{-1}(r_0 + Gt)$, получаем уравнение движения в форме нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения относительно $h(\xi) = r^{-1}h_r(r, t)$

$$h''\{\xi^2 - \big(1 + h'(1)\big)(1 - h)^4(1 - h + \xi h')^{-2}\} = 2\xi h',$$

$$h(1) = 0, \quad h'(1) = \tau > 0, \quad \xi \geq 1, \quad \tau \ll 1. \qquad (8)$$

Решение уравнения (8) в прифронтовой области ударной волны ($\xi = 1$, рис. 1) может быть равноправным образом получено как численно, так и аналитически методом малого параметра в растянутых координатах $x = \tau^{-1}(\xi - 1)$, $x \geq 0$, $g = \tau^{-2}h$, $g'(0) = 1$. На рис. 2 представлено соответствующее такому решению перераспределение предварительных пластических деформаций за упругой ударной волной в момент $T_1 > 0$

$$p_{rr}(r, T_1) = (1 - K_0^2 w^{-4/3})/2, \;\; p_{\phi\phi}(r, T_1) = (1 - w^{2/3})/2,$$

$$w(r, T_1) = K_0 + r_0^3\big(r - h_r(r, T_1)\big)^{-3}\big((1 - u^{\circ}r_0^{-1})^3 - K_0\big),$$

$$u^{\circ} = u_r^{\circ}\big|_{r=r_0}.$$

Из рис. 2 следует, что для рассмотренного максимально простого типа краевой задачи (когда $\mathbf{P}$ не испытывает поворота и перераспределяется только за счет нового упругого перемещения среды) наиболее существенные изменения начального поля p°_{rr}, $p^{\circ}_{\phi\phi} = p^{\circ}_{\theta\theta}$ происходят в области больших градиентов предварительных пластических деформаций в окрестности $r = r_0$. При этом для каждой точки пространства, вовлеченной в упругий процесс, уровень p_{rr} возрастает относительно p°_{rr}, а уровень $p_{\phi\phi}$ заметно снижается относительно исходного $p^{\circ}_{\phi\phi}$. Данный эффект невозможно учесть в рамках линейной упругопластичности. Одновременно заметим, что если бы упругопластическая начальная область была ограничена с двух сторон ($r_0 \leq r \leq r^*$), то ее новое положение было бы $r_0 + l(t) \leq r \leq r^* + u^*(t)$.

Таким образом, по сравнению с данными работы [8], где изменения пластических деформаций в рамках модели [5] вычислялись для квазистатических задач с привлечением дополнительных предположений (несжимаемость среды, анализ малости и т.д.), полученное

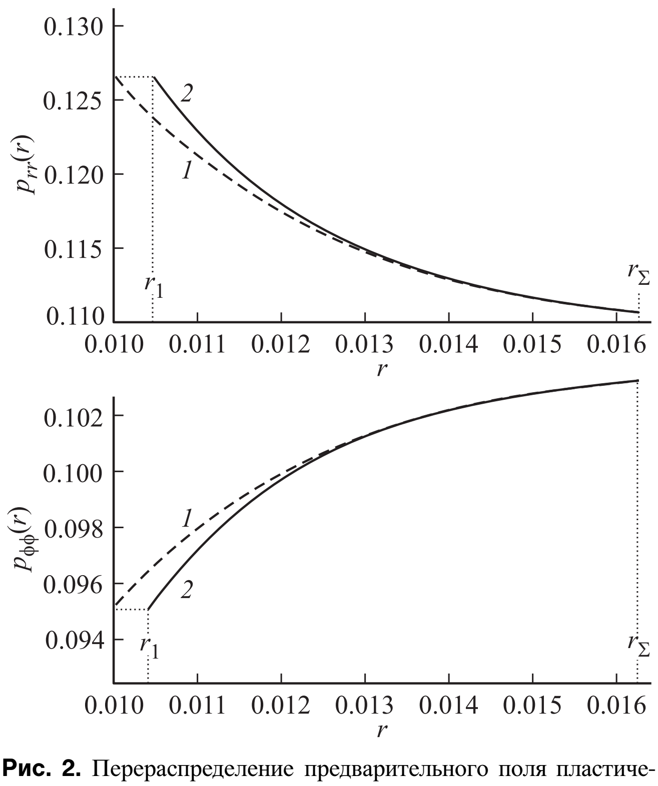

Рис. 2. Перераспределение предварительного поля пластических деформаций: *1* — начальные p°_{rr}, $p^{\circ}_{\phi\phi} = p^{\circ}_{\theta\theta}$ в момент $t = 0$, *2* — актуальные p_{rr}, $p_{\phi\phi} = p_{\theta\theta}$ в момент $T_1 = 10^{-6}$ s. r_1, r_Σ — мгновенные координаты подвижной границы сферического дефекта и фронта ударной волны соответственно.

представление (3)–(6) обладает существенными преимуществами: 1) это строгий универсальный алгоритм описания произвольной кинематики материала при любых методах его обработки; 2) здесь нет необходимости (как и следовало ожидать для упругих процессов) обращаться к скоростным характеристикам среды (скорости деформаций), так как решение проводится на уровне тензоров деформаций; 3) из (3)–(6) можно получить важные качественные выводы для упругой динамики упругопластической среды.

Работа выполнена в рамках госбюджетной темы № АААА-А17-117040450015-0 и при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (постановление П218, договор № 02.G25.31.0116 от 14.08.2014 г. между ОАО «Центр судоремонта „Дальзавод“» и Министерством образования и науки РФ).

Список литературы

[1] *Шибков А.А., Золотов А.Е., Гасанов М.Ф., Желтов М.А., Проскуряков К.А.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 24. С. 70–76.
[2] *Песчанская Н.Н., Смолянский А.С., Шведов А.С.* // ФТТ. 2009. Т. 51. В. 6. С. 1218–1222.
[3] *Заярный Д.А., Ионин А.А., Кудряшов С.И., Макаров С.В., Кучмижак А.А., Витрик О.Б., Кульчин Ю.Н.* // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 103. В. 12. С. 846–850.
[4] *Овчинников В.В., Гущина Н.В., Романов И.Ю., Кайгородова Л.И., Григорьев А.Н., Павленко А.В., Плохой В.В.* // Изв. вузов. Физика. 2016. Т. 59. № 10. С. 3–8.
[5] *Быковцев Г.И., Шитиков А.В.* // ДАН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
[6] *Бленд Д.Р.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
[7] *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998. 412 с.
[8] *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Большие необратимые деформации и упругое последействие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с.