

03

Влияние числа Рейнольдса на распределение пульсационной составляющей вихря скорости по сечению плоского канала

© Ю.Г. Чесноков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
198013 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: ygchesnokov@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 24 июля 2017 г. В окончательной редакции 25 сентября 2018 г.)

На основе анализа данных, полученных различными авторами методом прямого численного моделирования течения жидкости в плоском канале, изучено влияние числа Рейнольдса на распределение среднеквадратичных значений проекций пульсационной составляющей вихря скорости по сечению плоского канала.

DOI: 10.21883/JTF.2019.03.47167.2444

Введение

Важнейшей характеристикой турбулентного потока является наличие завихренности. Однако экспериментальное измерение проекций вихря скорости представляет собой весьма сложную проблему [1]. Такого рода измерения проводились как для турбулентных течений в плоском канале [2], так и для турбулентных течений в пограничном слое [3–6]. Как отмечается в работе [7], измерения не являются достаточно точными, чтобы выявить влияние числа Рейнольдса на распределение завихренности по сечению канала. В особенности это относится к области вблизи твердой стенки. Наиболее детальную информацию можно получить при помощи данных, полученных методом прямого численного моделирования турбулентного течения в плоском канале [8–16]. Результаты прямого численного моделирования, полученные различными авторами, использовались в работах [17–19] для изучения влияния числа Рейнольдса на различные статистические характеристики течений. Если первоначально расчеты могли осуществляться лишь при небольших значениях числа Рейнольдса, то в работах [14–16] значение этого параметра (рассчитанное по средней скорости и эквивалентному диаметру канала) достигает примерно 50 000.

Будем рассматривать турбулентное течение в плоском канале с полушириной канала h . Введем в рассмотрение декартову систему координат (x, y, z) , ось x которой направлена по оси канала, ось y по нормали к стенке, а ось z по нормали к плоскости течения. Через ω_x , ω_y и ω_z обозначим среднеквадратичные значения проекций пульсационной составляющей вихря скорости на оси x , y и z соответственно. Через ω обозначим среднеквадратичное значение модуля вектора пульсационной составляющей скорости: $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$. Величину $\omega^2/2$ иногда называют энтропией. Введенные в рассмотрение величины могут зависеть от расстояния y до стенки, напряжения трения на стенке τ , физических характеристик жидкости (плотности ρ и вязкости μ) и полуширины канала h . Обозначим через $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$ так называемую

динамическую скорость жидкости, а через $l_\tau = \nu/u_\tau$ — динамическую длину. Здесь $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости. Если в качестве масштабов длины и скорости использовать динамическую длину и динамическую скорость, то соответствующие безразмерные переменные обычно называют внутренними и обозначают при помощи надстрочного индекса „плюс“. Из соображений размерности вытекает, что во внутренних переменных безразмерные величины ω_x^+ , ω_y^+ и ω_z^+ будут зависеть только от двух безразмерных параметров, например, y^+ и $Re_\tau = u_\tau h/\nu = h^+$ — числа Рейнольдса, рассчитанного по динамической скорости жидкости и полуширине канала. Эту величину называют также числом Кармана. Обычно считают, что в окрестности стенки полуширина канала оказывает малое влияние на закономерности течения. Тогда в этой области во внутренних переменных зависимости статистических характеристик турбулентности от y^+ должны быть универсальными, т.е. не зависеть от числа Re_τ . Однако, как показывают результаты прямого численного моделирования [8–16], значения величин ω_x^+ и ω_z^+ при фиксированном значении y^+ с ростом Re_τ увеличиваются. Как показывает рис. 1, в пределах так называемого вязкого подслоя и буферной зоны зависимость ω^2 от Re_τ проявляется весьма сильно.

В работе [7] во внутренней области (при сравнительно малых y^+) для величин ω_x^2 и ω_z^2 и предлагается использовать асимптотические разложения, содержащие два слагаемых. Малым параметром является отношение u_τ/U_0 . Здесь U_0 — скорость на оси канала. В переменных стенки главные члены разложений пропорциональны U_0/u_τ , а вторые слагаемые обращаются в нуль на стенке. Если это так, то при $y^+ = 0$ величина $u_\tau \omega^{+2}/U_0$ не должна зависеть от числа Рейнольдса Re_τ . Однако, как показывает рис. 2, наблюдается быстрое увеличение этой величины при сравнительно небольших значениях Re_τ . При больших значениях этого параметра имеются расхождения между результатами работы [15] и работ [14,16]. Согласно последним двум работам, ука-

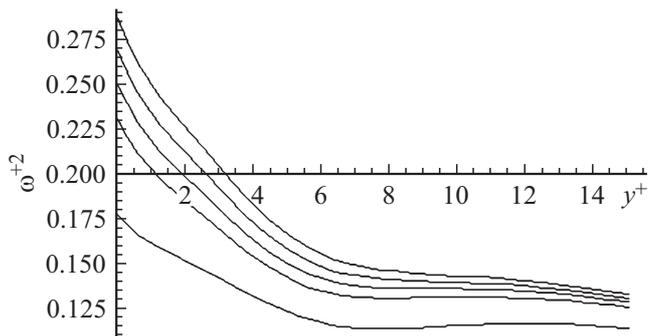


Рис. 1. Зависимости ω^{+2} от y^+ при различных значениях h^+ , построенные по результатам работы [16]. Значения h^+ равны 182, 543, 1001, 1995 и 5186. Чем больше h^+ , тем выше располагается соответствующая кривая.

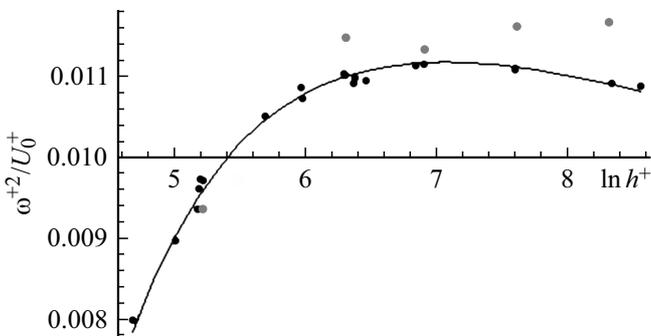


Рис. 2. Зависимость ω^{+2}/U_0^+ от $\ln h^+$. Черные точки построены по результатам работ [8-14,16], серые — по результатам работы [15]. Кривая построена по формулам (1) и (2).

занная величина достигает максимального значения примерно при $h^+ = 1000$, а затем медленно убывает. Значения $u_\tau \omega^{+2}/U_0$, полученные по данным [15], оказываются более высокими. Отметим, что величина $U_0^+ = U_0/u_\tau$ с ростом h^+ увеличивается по логарифмическому закону. В работе [20] для ее расчета предложена следующая формула:

$$U_0^+ = \frac{1.000}{\ln h^+ - 3.886} + 3.964 + 2.632 \ln h^+. \quad (1)$$

Сплошная линия на рис. 2 построена при помощи аппроксимационной формулы

$$\omega^{+2} = 0.411 - \frac{0.8546}{\ln h^+ - 1.57} \quad (2)$$

и формулы (1). Коэффициенты в формуле (2) определены путем аппроксимации данных прямого численного моделирования, полученных в [8-14,16].

Во внешней области в качестве масштаба длины используют полуширину канала h . При фиксированном значении $Y = y/h$ величины ω_x^+ , ω_y^+ и ω_z^+ с ростом Re_τ убывают. Следует отметить, что во внешней области эти величины сравнительно слабо различаются между собой

(см., например, [3]). На основании данных работ [10,11] в [7] найдено, что при $y = 0.1$ величины ω_i^+ (где i принимает значения x , y и z) убывают примерно как $1/Re_\tau$. Об этом же свидетельствуют и экспериментальные данные (см., например, [21]). Анализ данных работ [8-16] показывает, что имеются определенные отклонения от указанных закономерностей.

Цель настоящей работы заключается в изучении закономерностей распределения проекций пульсационной составляющей вихря скорости в зависимости от расстояния до стенки как во внутренней, так и во внешней областях течения.

Зависимость модуля пульсационной составляющей вихря скорости от расстояния до стенки во внешней области

В той области, где справедлива логарифмическая формула для распределения скорости, вид зависимости ω^{+2} от Y можно установить при помощи соображений, высказанных еще в книге Ландау и Лифшица [22]. Как отмечается в этой книге, пульсационная скорость — величина порядка u_τ и поэтому с логарифмической точностью мала по сравнению с осредненным значением скорости U . Поэтому в уравнении баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций диссипация энергии ε в единице объема жидкости примерно равна слагаемому, описывающему обмен энергией между осредненным и пульсационным движением:

$$\varepsilon = -\overline{uv} \frac{dU}{dy}.$$

Здесь u и v — проекции пульсационной скорости на оси x и y соответственно, черта над величиной обозначает операцию осреднения. В первом приближении в так называемом логарифмическом пограничном слое $-\overline{uv} = u_\tau^2$, а $dU/dy = u_\tau/(\kappa y)$. Здесь κ — так называемая постоянная Кармана. Для однородной турбулентности $\varepsilon = \nu \omega^2$. С хорошей степенью точности это соотношение будет выполняться и в логарифмическом пограничном слое. Поэтому $\omega^2 = u_\tau^3/(\kappa \nu y)$. В безразмерной форме эта формула записывается так:

$$h^+ \omega^{+2} = \frac{1}{\kappa Y}. \quad (3)$$

Как вытекает из этого соотношения, при фиксированном Y величина $h^+ \omega^{+2}$ не зависит от h^+ . Рис. 3 показывает, что независимость $h^+ \omega^{+2}$ от h^+ в первом приближении имеет место не только в логарифмическом пограничном слое, но и во всей внешней области вплоть до оси канала. Прямая линия построена по формуле (3), где принято значение постоянной Кармана 0.4. Зависимость $h^+ \omega^{+2}$ от h^+ наблюдается, но сравнительно слабая, т.е. кривые располагаются близко одна от

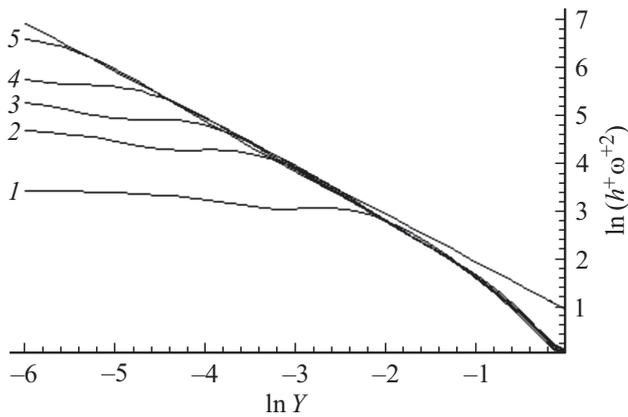


Рис. 3. Зависимости $\ln(h^+\omega^{+2})$ от $\ln Y$ при различных значениях h^+ . Кривые построены по результатам работы [16]. Кривые 1–5 построены при значениях h^+ 182, 543, 1001, 1995 и 5186 соответственно. Прямая линия представляет собой зависимость (3) в логарифмических координатах при $\kappa = 0.4$.

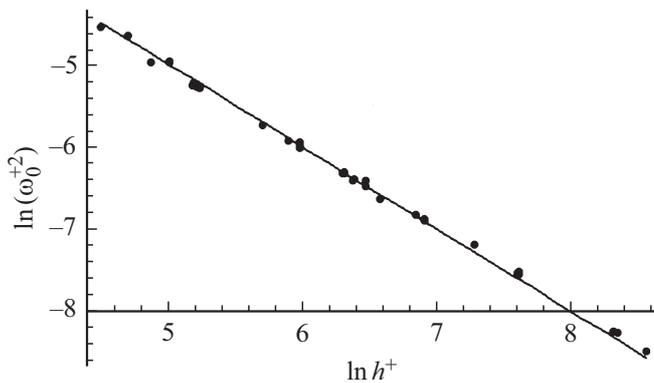


Рис. 4. Зависимость $\ln(\omega_0^{+2})$ от $\ln h^+$. Точки построены по результатам работ [8–16], прямая — по формуле (4).

другой. Эта закономерность нарушается вблизи стенки. Разумеется, отклонения начинаются при тем больших значениях Y , чем меньше h^+ .

Соотношение (3) не может выполняться в окрестности оси канала. Слагаемое в уравнении баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций, которое описывает обмен энергией между осредненным движением и турбулентными пульсациями, на оси канала обращается в нуль и в окрестности оси является малым. В этой области главные слагаемые — диссипация энергии в единице объема и слагаемое, описывающее перенос энергии за счет пульсаций давления. Заметим, что в силу симметрии производная по Y от ω^{+2} на оси канала должна обращаться в нуль. Поэтому формулу (3) следует модифицировать таким образом, чтобы это условие выполнялось. Кроме того, при $Y = 1$ значение $h^+\omega^{+2}$ отличается от $1/\kappa$. Обозначим значение ω^+ на оси канала через ω_0^+ . Как видно из рис. 4, зависимость ω_0^{+2} от h^+ в логарифмических координатах близка к линейной и

неплохо описывается при помощи формулы

$$\omega_0^{+2} = \frac{1}{h^+}. \tag{4}$$

Можно предложить и более громоздкое соотношение, которое лучше описывает результаты работ [8–16], например, такого вида:

$$\ln \omega_0^{+2} = -0.345 + \frac{0.0564}{\ln h^+ - 3.94} - 0.949 \ln h^+.$$

В силу симметрии вблизи оси канала при малых значениях $1 - Y$ должно выполняться соотношение

$$h^+(\omega^{+2} - \omega_0^{+2}) = a(1 - Y)^2. \tag{5}$$

Анализ результатов работ [8–16] показывает, что коэффициент пропорциональности a в этом равенстве является функцией h^+ . Он увеличивается при сравнительно малых значениях h^+ , достигает максимума примерно при $h^+ = 1000$ и затем медленно убывает. Среднее значение этой величины равно 7.54. В результате вместо соотношения (3) можно предложить следующую формулу:

$$h^+\omega^{+2} = \frac{2.5}{Y} - 1.5Y + 2.5 \ln Y + 6.3(1 - Y)^2.$$

При малых значениях Y эта формула переходит в (3), а при малых значениях $1 - Y$ согласуется с формулами (4) и (5).

Так как $h^+\omega^{+2}$, вообще говоря, зависит от h^+ , лучшее приближение можно получить, если использовать следующее выражение:

$$h^+(\omega^{+2} - \omega_0^{+2}) = b \left(\frac{1}{Y} - 1 + \ln Y \right) + c(1 - Y)^2,$$

где коэффициенты b и c рассматриваются как функции h^+ . При помощи данных работ [8–14,16] для них можно предложить следующие формулы:

$$b = 2.404 + \frac{115.2}{h^+},$$

$$c = 5.557 + \frac{427.3}{h^+} - \frac{127.8 \ln h^+}{h^+}.$$

Рассмотрим среднее по сечению канала значение квадрата модуля пульсационной составляющей вихря скорости ω_m^{+2} . Эта величина определяется при помощи следующего равенства:

$$\omega_m^{+2} = \int_0^1 \omega^{+2} dY.$$

Величина $h^+\omega_m^{+2}$ при увеличении h^+ числа заметно увеличивается. Для расчета ω_m^{+2} можно предложить следующее равенство:

$$\ln \omega_m^{+2} = 2.718 - \frac{4.3}{\ln h^+ - 1.822} - 0.9257 \ln h^+.$$

Распределение пульсационной составляющей вихря скорости в окрестности стенки

Если во внешней области среднеквадратичные значения проекций пульсационной составляющей вихря скорости слабо различаются между собой, то в окрестности стенки это не так. О преимущественной ориентации пульсационной составляющей вихря скорости можно судить по численным значениям величин: ω_x^2/ω^2 , ω_y^2/ω^2 и ω_z^2/ω^2 . Так, величина ω_x^2/ω^2 представляет собой среднее значение квадрата косинуса угла, который образует пульсационная составляющая вихря скорости с осью x и т.п. На стенке величина ω_y обращается в нуль и мала в окрестности стенки. Как ясно из рис. 5, наибольшее численное значение вблизи стенки имеет величина ω_z^2/ω^2 . Вблизи стенки эта характеристика увеличивается с ростом y^+ и достигает максимального значения в вязком подслое на небольшом расстоянии p_{1z}^+ от стенки. Эта величина слабо зависит от h^+ . При помощи данных работ [8–14,16] можно получить формулу для ее расчета

$$p_{1z}^+ = 2.676 + \frac{6.351}{h^+} - \frac{41.98 \ln h^+}{h^+} + \frac{6.856(\ln h^+)^2}{h^+}.$$

При дальнейшем увеличении y^+ величина ω_z^2/ω^2 уменьшается и на некотором расстоянии до стенки p_{2z}^+ принимает наименьшее значение. Это расстояние также зависит от h^+ . Значения p_{2z}^+ , определенные по данным работ [8–14,16], сильно различаются. В среднем эта величина составляет примерно 85. Во внешней области ω_z^2/ω^2 не остается постоянной, но сравнительно медленно увеличивается.

Обозначим через α_0 значение ω_z^2/ω^2 на стенке канала, через α_1 максимальное значение этой величины, а через α_2 — минимальное. Первые две характеристики уменьшаются при увеличении числа Рейнольдса и могут

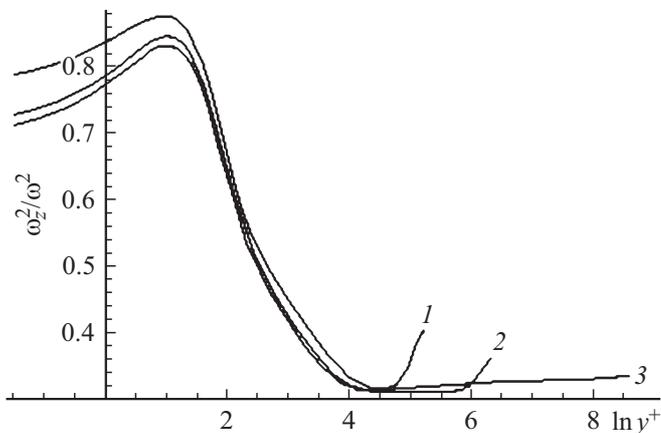


Рис. 5. Зависимости ω_z^2/ω^2 от $\ln y^+$. Кривые 1–3 построены при значениях h^+ 182, 543 и 5186 соответственно по результатам работы [16].

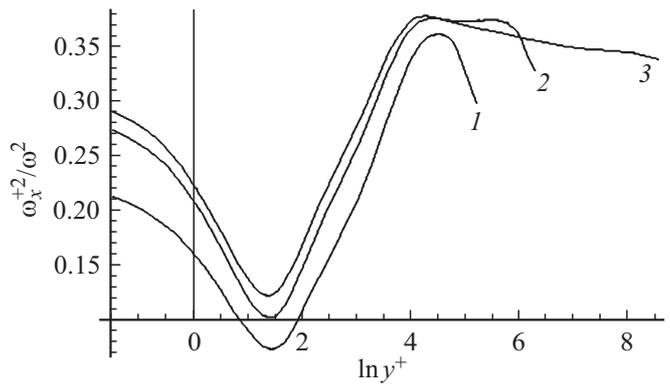


Рис. 6. Зависимости ω_x^2/ω^2 от $\ln y^+$. Кривые 1–3 построены при значениях h^+ 182, 543 и 5186 соответственно по результатам работы [16].

быть найдены по формулам

$$\alpha_0 = 0.699 - \frac{54.06}{h^+} + \frac{30.14 \ln h^+}{h^+} - \frac{3.325(\ln h^+)^2}{h^+},$$

$$\alpha_1 = 0.8289 + \frac{6.024}{h^+} + \frac{0.3999 \ln h^+}{h^+}, \quad (6)$$

Зависимость α_2 от h^+ по данным работ [8–14,16] не является монотонной. Аппроксимационная формула имеет вид

$$\alpha_2 = 0.313 + \frac{3566}{h^{+1.87}} + \frac{2155 \ln h^+}{h^{+1.87}}.$$

Величина ω_x^2/ω^2 в пределах вязкого подслоя убывает, достигает минимального значения, затем увеличивается и достигает максимума (рис. 6). Во внешней области наблюдается медленное уменьшение этой характеристики. Как координаты точек, где достигаются экстремумы, так и сами экстремальные значения зависят от h^+ . Координата p_{1x}^+ точки, где достигается минимум, с ростом h^+ слегка уменьшается и может быть вычислена по формуле:

$$p_{1x}^+ = 3.516 + \frac{3.284}{\ln h^+}.$$

Расстояние p_{2x}^+ до стенки, где достигается максимальное значение, можно рассчитать при помощи следующего соотношения:

$$p_{2x}^+ = 72.89 + \frac{51.83}{\exp\left[3.08(\ln h^+ - 5.68)^2\right]} - \frac{3.205 \ln h^+}{\exp\left[3.08(\ln h^+ - 5.68)^2\right]}$$

Обозначим через β_0 значение ω_x^2/ω^2 на стенке канала, через β_1 — минимальное значение этой величины, а через β_2 — максимальное. Все эти характеристики h^+

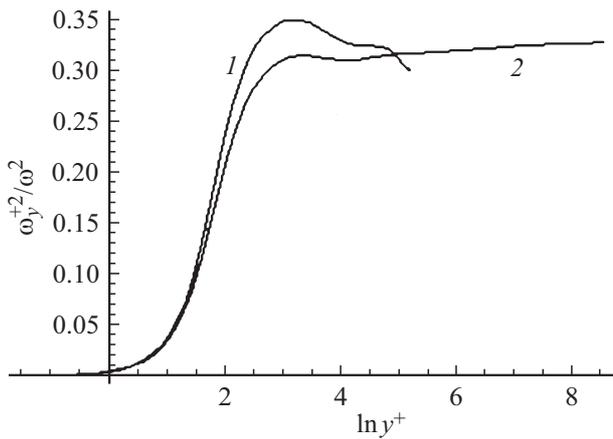


Рис. 7. Зависимости ω_y^2/ω^2 от $\ln y^+$. Кривые 1 и 2 построены при значениях $h^+ = 182$ и 5186 соответственно по результатам работы [16].

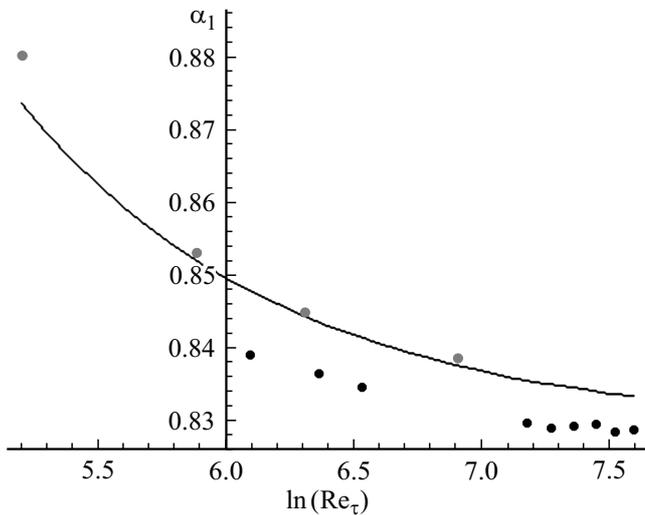


Рис. 8. Зависимость α_1 от Re_τ для течения в трубе и пограничном слое без градиента давления. Светлые точки построены по результатам работы [23], черные — по результатам работ [24,25], кривая — по формуле (6).

с ростом h^+ увеличиваются и могут быть рассчитаны по формулам

$$\beta_0 = 0.3135 - \frac{29.3}{h^+} + \frac{2.832 \ln h^+}{h^+},$$

$$\beta_1 = 0.133 - \frac{14.32}{(\ln h^+)^{3.32}},$$

$$\beta_3 = 0.377 - \frac{6083}{h^{+2.47}}.$$

Вблизи стенки величина ω_y^2/ω^2 зависит от h^+ весьма слабо за исключением сравнительно малых значений h^+ . Поэтому на рис. 7 показаны только два графика. При малых расстояниях до стенки рассматриваемая величина увеличивается и на некотором расстоянии до стенки p_y^+

достигается локальный максимум. Это расстояние и величина локального максимума γ могут быть вычислены по формулам

$$p_y^+ = 31.14 - \frac{231.1}{(\ln h^+)^{2.18}},$$

$$\gamma = 0.3132 + \frac{8.628}{h^+} - \frac{0.407 \ln h^+}{h^+}.$$

Можно ожидать, что для турбулентных течений вблизи твердой стенки другого типа, например, турбулентного течения в трубе и турбулентного течения в пограничном слое без градиента давления, в окрестности стенки результаты должны иметь сходный характер. Однако, как показывает рис. 8, имеются определенные количественные различия. Здесь в качестве определяющего линейного размера при расчете Re_τ для течения в трубе используется радиус трубы, для течения в пограничном слое — его толщина. В роли ω_z для течения в трубе выступает тангенциальная составляющая вихря скорости. При построении рисунка использовались результаты прямого численного моделирования, полученные в работах [23–25]. В качестве иллюстрации здесь построена зависимость определенной выше величины α_1 от критерия Рейнольдса Re_τ , рассчитанного по динамической скорости. Результаты, полученные для течения в трубе в работе [23], хорошо согласуются с формулой (6). Однако для течения в пограничном слое [24,25] эта характеристика принимает заметно меньшие значения.

Заключение

Полученные в работе результаты показывают, что имеется существенная анизотропия распределения пульсационной составляющей вихря скорости в области течения вблизи стенки, однако эта анизотропия сосредоточена в сравнительно узкой области. В первом приближении расстояния до стенки, где сильно различаются проекции вихря скорости, в переменных стенки не превосходят 100. Соответственно толщина этой области, отнесенная к полуширине канала, при увеличении числа Рейнольдса Re_τ уменьшается обратно пропорционально этому числу. Получены формулы для расчета некоторых характеристик распределения завихренности. Их можно использовать в следующем диапазоне значений числа Рейнольдса: $109 < Re_\tau < 5186$.

Список литературы

- [1] Wallace J.M., Foss J. // Annu. Rev. Fluid. Mech. 1995. Vol. 27. P. 469–514.
- [2] Kastrinakis E.G., Eckelmann H. // J. Fluid. Mech. 1983. Vol. 137. P. 165–186.
- [3] Balint J.-L., Wallace J.M., Vukoslavčević P. // J. Fluid. Mech. 1991. Vol. 228. P. 53–86.
- [4] Rajagopalan S., Antonia R.A. // Exp. Fluid. 1993. Vol. 14. P. 142–144.

- [5] *Honkan A., Andreopoulos Y.* // J. Fluid. Mech. 1997. Vol. 350. P. 29–96.
- [6] *Agui J.M., Andreopoulos Y.* // Exp. Fluid. 2003. Vol. 34. P. 192–205.
- [7] *Panton R.L.* // Phys. Fluid. 2009. Vol. 21. P. 115104.
- [8] *Moser R.D., Kim J., Mansour N.N.* // Phys. Fluid. 1999. Vol. 11. N 4. P. 943–945.
- [9] *Iwamoto K., Suzuki S., Kasagi N.* // Int. J. Heat Fluid. Flow. 2002. Vol. 23. P. 678–689.
- [10] *Hoyas S., Jiménez J.* // Phys. Fluid. 2006. Vol. 18. P. 011702.
- [11] *Hoyas S., Jiménez J.* // Phys. Fluid. 2008. Vol. 20. P. 101511.
- [12] *Wreman A.W., Kuerten J.G.M.* // Phys. Fluid. 2014. Vol. 26. P. 015102.
- [13] *Wreman A.W., Kuerten J.G.M.* // Phys. Fluid. 2014. Vol. 26. P. 085103.
- [14] *Lozano-Duran A., Jiménez J.* // Phys. Fluid. 2014. Vol. 26. P. 011702.
- [15] *Bernardini M., Pirozzoli S., Orlandi P.* // J. Fluid. Mech. 2014. Vol. 742. P. 171–191.
- [16] *Lee M., Moser R.D.* // J. Fluid. Mech. 2015. Vol. 774. P. 395–415.
- [17] *Buschmann M., Gad-el-Hak M.* // Physica D. 2010. Vol. 239. P. 1288–1295.
- [18] *Чесноков Ю.Г.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 33–39.
- [19] *Чесноков Ю.Г.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 1. С. 30–34.
- [20] *Чесноков Ю.Г.* // Изв. СПбГТИ (ТУ). 2016. № 36. С. 104–107.
- [21] *Antonia R.A., Rajagopalan S., Zhu Y.* // Exp. Fluid. 1996. Vol. 20. P. 393–394.
- [22] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1955. 788 с.
- [23] *El Khouri G.K., Schlatter P., Noorani A., Fischer P.F., Brethouwer G., Johanson A.V.* // Flow Turbul. Combust. 2013. Vol. 91. P. 475–495.
- [24] *Jiménez J., Hoyas S., Simens M.P., Mizuno Y.* // J. Fluid. Mech. 2010. Vol. 657. P. 335–360.
- [25] *Sillero J.A., Jiménez J., Moser R.D.* // Phys. Fluid. 2013. Vol. 25. P. 105102.