10,19

Об адиабатическом нагружении анизотропных материалов

© В.Л. Гиляров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: Vladimir.Hilarov@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 8 октября 2018 г.)

Изложено термодинамическое описание термоупругого эффекта в анизотропных материалах. Приведены простые примеры применения этого аппарата.

DOI: 10.21883/FTT.2019.03.47250.272

Термоупругий эффект — изменение температуры при адиабатическом упругом деформировании твердых тел известен очень давно (описан Кельвином в 1853 г.), но до недавнего времени он не привлекал внимание исследователей, поскольку изменения температуры при упругом деформировании чрезвычайно малы. Однако в связи с развитием технологии инфракрасного фононного детектирования эти температурные изменения оказалось возможным надежно измерить, что привело к появлению коммерческих сенсоров для анализа упругих напряжений по изменению температуры [1].

Тероупругий эффект в изотропных средах хорошо описывается известной формулой Кельвина

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\alpha}{c}\,\sigma, \tag{1}$$

где α — объемный коэффициент теплового расширения, c — теплоемкость материала. В то же время многие реальные материалы (в частности полимерные) являются существенно анизотропными и формула (1), вообще говоря, к ним напрямую неприменима, хотя и часто используется. В связи с этим представляет интерес изучить термоупругий эффект в таких материалах.

Термоупругий эффект в анизотропных системах был рассмотрен в работе [2]. Однако в этой работе зависимость силовых констант от температуры была учтена дважды: непосредственно и опосредовано путем введения коэффициента теплового расширения. На самом деле достаточно один раз учесть зависимость силовых констант от деформации материала [3]. Тогда их зависимость от тепловой части деформации будет автоматически являться зависимостью от температуры.

Основным исходным соотношением для описания адиабатического нагружения служит сохранение энтропии в этом процессе

$$\frac{\partial S}{\partial T}\,dT + \sum_{ij} \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}\,\varepsilon_{ij} = 0. \tag{2}$$

Поскольку энтропия представляет собой производную от свободной энергии по температуре, то, используя определение для теплоемкости при постоянной деформации, можно представить производные в (2) в виде

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial \varepsilon_{ij}}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\varepsilon} = \frac{C_{\varepsilon}}{T}.$$

В линейной термоупругости вклад тепловых членов в свободную энергию может быть представлен [4] в виде

$$F_T = -\beta_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot \Delta T. \tag{4}$$

Тензор тепловых напряжений, исходя из (4) представляет собой

$$\sigma_{ij}^{T} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\beta_{ij}\Delta T. \tag{5}$$

Коэффициенты β_{ij} можно определить из задачи на свободное тепловое расширение материала. В этом случае внутренние напряжения в системе отсутствуют. Тогда тепловые напряжения в положении равновесия уравновешиваются упругими напряжениями в материале, чтобы суммарные напряжения были равны нулю, откуда имеем

$$\sigma_{ij} = \beta_{ij} \cdot \Delta T. \tag{6}$$

Таким образом, коэффициенты β_{ij} представляют собой температурные коэффициенты напряжения. Эти упругие напряжения вызывают упругие деформации в среде, которые могут быть найдены при помощи закона Гука для анизотропных сред, (см., например, [5]).

Далее рассматривается адиабатическое расширение тетрагонального кристалла, часто используемого в качестве модели полимерных кристаллов. При приложении механической нагрузки к граням такого кристалла он сохраняет свою форму, т.е отсутствуют сдвиговые компоненты тензора деформаций. Обобщение на случай материала с произвольной анизотропией очевидно и не составляет труда. Оно опущено из соображений громоздкости.

Для рассматриваемой задачи главные компоненты тензора деформаций определяются следующими формулами:

$$\varepsilon_x = \Delta T\left(\frac{\beta_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\beta_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\beta_z}{E_z}\right), \tag{7.1}$$

$$\varepsilon_y = \Delta T\left(\frac{\beta_y}{E_y} - \frac{\nu_{xy}\beta_x}{E_x} - \frac{\nu_{zy}\beta_z}{E_z}\right), \qquad (7.2)$$

$$\varepsilon_z = \Delta T\left(\frac{\beta_z}{E_z} - \frac{\nu_{xz}\beta_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\beta_y}{E_y}\right). \qquad (7.3)$$

Здесь коэффициенты Пуассона ν_{ij} описывают деформацию по оси j при приложении нагрузки по оси i, $\beta_i \equiv \beta_{ii}$, $\varepsilon_i \equiv \varepsilon_{ii}$. Сравнивая деформации (7) с определением деформаций, возникающих при тепловом расширении $\varepsilon_i = \alpha_i \Delta T$ ($\alpha_i \equiv \alpha_{ii}$ — линейные коэффициенты теплового расширения) получаем линейную систему уравнений для коэффициентов β_i. Найдя β_i из полученной системы уравнений, можно найти из (2) изменения температуры при заданном внешнем напряжении или деформации. Следует отметить, что деформации в (2) и (7) имеют разную физическую природу. В (2) эти деформации вызываются внешней нагрузкой, в то время, как в (7) деформации порождены свободным тепловым расширением.

Рассмотрим далее случай осевой симметрии относительно оси z, когда

$$\nu_{yx} = \nu_{xy}, \quad \nu_{zx} = \nu_{zy}, \quad \nu_{xz} = \nu_{yz},$$

$$E_x = E_y \neq E_z, \quad \beta_x = \beta_y \neq \beta_z.$$

При этом для коэффициентов β в продольном (z) и перпендикулярном оси z направлении (r) имеем

$$\beta_r = E_r \frac{\alpha_r + \alpha_z \nu_{zr}}{1 - \nu_r - 2\nu_{rz}\nu_{zr}},$$

$$\beta_z = E_z \frac{\alpha_z(1-\nu_r) + 2\alpha_r \nu_{rz}}{1 - \nu_r - 2\nu_{rz}\nu_{zr}}.$$

Коэффициенты Пуассона в этих выражениях связаны соотношением: $\nu_{zr}/E_z = \nu_{rz}/E_r$, $\nu_r \equiv \nu_{rr}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Заданное напряжение σ приложено по оси симметрии z.

Тогда

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_z}, \quad \varepsilon_r = -\frac{\sigma\nu_{zr}}{E_r}.$$

Из (2) находим, что изменение температуры в этом случае составляет

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\sigma}{C_\varepsilon E_z}(\beta_z - 2\beta_r\nu_{zr}). \qquad (9)$$

2. Заданное напряжение σ приложено перпендикулярно оси симметрии, например, по оси x.

Тогда

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E_r}, \ \varepsilon_y = -\frac{\sigma\nu_{rr}}{E_r}, \ \varepsilon_z = -\frac{\sigma\nu_{rz}}{E_z}.$$

Температурное изменение при этом составляет

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\sigma}{C_\varepsilon E_r}\big(\beta_r(1-\nu_{rr}) - \beta_z\nu_{rz}\big). \qquad (10)$$

Видно, что изменение температуры в этом случае иное, нежели описываемое формулой (9). Выражения в скобках (9) и (10) определяют знак термоупругого эффекта, так что в зависимости от величины механических констант изменения температуры могут быть как положительными, так и отрицательными при одном и том же знаке внешнего приложенного к системе механического напряжения. В обоих случаях термоупругий эффект не описывается простой формулой Кельвина (1).

3. Гидростатическое расширение изотропной среды. В этом случае все главные компоненты тензора деформации равны между собой, а их сумма определяет изменение объема при деформировании. Из (2) находим, что

$$\frac{dT}{T}C_V + \beta\frac{dV}{V} = 0.$$

Коэффициент β находим из (7)

$$\beta = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)}.$$

Вводя модуль всестороннего сжатия $K = E/3(1-2\nu)$, и учитывая, что относительное изменение объема при гидростатическом растяжении равно $dV/V = \sigma/K$, для температурного изменения находим

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\sigma}{C_V}3\alpha. \qquad (11)$$

Поскольку величина 3α представляет собой объемный коэффициент расширения, формула (11) есть не что иное, как формула Кельвина.

4. Одноосное расширение изотропного материала. В этом случае при приложении нагрузки, например, по оси z, имеем

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E}, \ \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma}{E}.$$

Изменение температуры составляет

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\alpha\sigma}{C_\varepsilon}.$$

т. е. представляет собой аналог формулы Кельвина, где вместо объемного стоит линейный коэффициент теплового расширения.

В заключение можно отметить, что в статье изложен простой термодинамический аппарат для расчета термоупругого эффекта в анизотропных средах и приведены примеры его применения. Показано, что в анизотропном случае термоупругий эффект не описывается простой формулой Кельвина. Настоящую работу автор хотел бы посвятить памяти А.И. Слуцкера, с которым его связывало многолетнее сотрудничество, в частности по микроскопическому обоснованию термоупругого эффекта в твердых телах.

Список литературы

[1] R.J. Greene, E.A. Patterson, R.E. Rowlands. Thermoelastic stress analysis. In: Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics. (2008). P. 743.
[2] R.T. Potter, L.J. Greeves. Proc. SPIE–Int. Soc. Opt. Eng. **817**, 134 (1987).
[3] В.Л. Гиляров, А.И. Слуцкер, В.П. Володин, Л.А. Лайус. ФТТ **40**. 1548 (1998).
[4] Л.И. Седов. Механика сплошной среды. Наука, М. (1970). Т. 2. 568 с.
[5] С.Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела. Наука, М. (1977). 416 с.

Редактор Т.Н. Василевская