Оптика и спектроскопия, 2019, том 126, вып. 3

03

Смещенные параксиальные пучки Бесселя–Гаусса. I

© А.Б. Плаченов

МИРЭА — Российский технологический университет,
119454 Москва, Россия

e-mail: a_plachenov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2018 г.
В окончательной редакции 06.10.2018 г.
Принята к публикации 06.11.2018 г.

Рассмотрено новое семейство локализованных решений параболического (параксиального волнового) уравнения, обобщающее известные пучки Бесселя–Гаусса и включающее в качестве подсемейств асимметрические и некоаксиальные пучки Бесселя–Гаусса. Найден фурье-спектр таких решений, получено их разложение по несмещенным пучкам Бесселя–Гаусса.

DOI: 10.21883/OS.2019.03.47372.274-18

1. Введение

С тех пор как в 1987 г. Гори, Гуаттари и Падовани опубликовали статью [1], в которой описывались пучки Бесселя–Гаусса (БГ) нулевого порядка, интерес к этой теме не ослабевает. Предпринимаются усилия по обобщению таких решений. В частности, здесь можно назвать работы Багини и соавторов [2], Котляра и соавторов [3,4], Хуанга, Женга и Ли [5], а также Киселева и Плаченова [6]. В настоящей работе будет показано, что предложенные в цитированных статьях решения являются частными случаями более широкого семейства, которое, в свою очередь, оказывается подсемейством обнаруженного Киселевым [7,8] и несколько позже Гутьерресом-Вегой и Бандресом [9] семейства решений Гельмгольца–Гаусса (после некоторой модификации последнего).

2. Моды Гельмгольца–Гаусса и, в частности, Бесселя–Гаусса

Параксиальным волновым уравнением [10] (или параболическим уравнением [11–13]) называется уравнение вида

$$2ikU_z + U_{xx} + U_{yy} = 0, \tag{1}$$

где k — вещественный параметр (волновое число), z — продольная, а x и y — поперечные координаты. Осесимметрической фундаментальной модой [7,8] уравнения (1) (или осесимметрическим гауссовым пучком [10,14]) называется решение вида

$$G = \frac{A}{q(z)} \exp\left\{ik\frac{x^2+y^2}{2q(z)}\right\}, \tag{2}$$

где A — константа,

$$q(z) = z - iz_R = |q|e^{-i\psi}, \tag{3}$$

$z_R > 0$ — длина Релея [14], $|q| = \sqrt{z^2+z_R^2}$,

$$\psi = -\arg q = \operatorname{arcctg}\frac{z}{z_R} \tag{4}$$

уменьшается от π до нуля, когда z растет от минус до плюс бесконечности, величина $\frac{\pi}{2} - \psi = \operatorname{arctg}\frac{z}{z_R}$ носит название фазы Гуи [10].

Под высшими модами понимаются решения (1), имеющие вид

$$U = HG, \tag{5}$$

где G — функция (2), а H — некоторая функция (вообще говоря, комплексная), именуемая далее, следуя Киселеву [7], амплитудой. В работе [7] было установлено, что уравнению (1) удовлетворяют функции вида (5), в которых

$$H = \exp\left\{\frac{iK^2}{2kq(z)}\right\}\Psi(X,Y), \tag{6}$$

где K — некоторая константа (вещественная или комплексная),

$$X = x/q(z), \qquad Y = y/q(z), \tag{7}$$

а функция $\Psi(X,Y)$ — любое решение уравнения Гельмгольца

$$\Psi_{XX} + \Psi_{YY} + K^2\Psi = 0. \tag{8}$$

Решения с такими амплитудами были названы в [7] модами Гельмгольца–Гаусса (превращающимися при $K = 0$ в моды Лапласа–Гаусса).

Важным частным случаем таких решений являются моды Бесселя–Гаусса (БГ), в которых с точностью до постоянного множителя

$$\Psi_m = J_m(KR)\exp\{im\Phi\}. \tag{9}$$

Здесь m — целое число, J_m — функция Бесселя первого рода, R и Φ — полярные координаты на плоскости XY:

$$X = R\cos\Phi, \qquad Y = R\sin\Phi.$$

Значение R комплексно: $R = r/q(z)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус на плоскости xy, а угол Φ вещественный и совпадает с обычным полярным углом. Тогда выражение для моды БГ принимает вид

$$U_m = \frac{A}{q(z)} \exp\left\{ \frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)} + im\Phi \right\} J_m\left(\frac{Kr}{q(z)}\right). \tag{10}$$

Выражение для пучков БГ нулевого порядка было найдено в работе [1]. Авторы рассмотрели поле, представляющееся при $z = 0$ в виде

$$U|_{z=0} = AJ_0(\beta r)\exp[-(r/w_0)^2],$$

где A, $\beta > 0$ и $w_0 > 0$ — некоторые константы, и вычислили соответствующее решение уравнения (1) с помощью интеграла Френеля. В результате была получена функция вида (10), в которой $m = 0$, $z_R = kw_0^2/2$, $K = -ik\beta w_0^2/2$. В этой же работе было указано, что такое решение может быть получено как суперпозиция гауссовых пучков, оси которых образуют коническую поверхность, причем параметры β, k и угол θ между осью z и образующими этой поверхности связаны равенством $\beta = k\sin\theta$.

Выражения для пучков БГ в случае ненулевых значений m были получены в работе [2]. Авторы разложили функцию, описывающую наклонный гауссов пучок, в ряд Фурье по полярному углу Φ и назвали слагаемые этого ряда пучками БГ. Следует отметить, что полученные в [2] выражения, строго говоря, не удовлетворяют точно уравнению (1), поскольку использованная в работе функция, описывающая наклонный гауссов пучок, включает некоторые поправки к параксиальному приближению. Если, однако, в этих выражениях всюду заменить единицей косинус угла наклона пучка, то после некоторых преобразований придем к формуле (10) для пучков БГ порядка m в случае чисто мнимого (точнее, мнимоотрицательного) K (такие пучки мы вслед за авторами рассматриваемой работы будем именовать обычными). В случае вещественных K выражения для пучков БГ произвольного порядка были получены в этой же работе [2] с помощью разложения в ряд Фурье выражения уже не для наклонного, а для смещенного в поперечном направлении гауссова пучка. Поскольку величина $q(0) = -iz_R$ чисто мнимая, вещественным значениям K соответствует начальное (при $z = 0$) распределение с функцией Бесселя от чисто мнимого аргумента (с точностью до числового множителя — так называемой модифицированной функцией Бесселя), поэтому соответствующие решения были названы модифицированными пучками БГ. Наконец, была проделана та же операция для наклонного гауссова пучка со смещением. Функции, возникающие при таком разложении и названные авторами обобщенными пучками БГ, приводятся к виду (10) с некоторым комплексным K (после исключения непараксиальных поправок). Таким образом, все типы пучков, полученных в работе [2], в параксиальном приближении описываются одной и той же формулой (10) и отличаются друг от друга значением параметра K.

Формула, описывающая параксиальное приближение для обычного пучка БГ произвольного порядка, приведена в статье Пальмы и соавторов [15]. В этой работе пучки БГ интерпретируются как суперпозиция гауссовых пучков, оси которых расположены на конической или цилиндрической (в случае модифицированных пучков) поверхности, причем для обычного пучка вершина конуса совпадает с началом координат, а для обобщенного смещена вдоль оси z на некоторое расстояние.

Упомянем также статью Ли, Ли и Вольфа [16], в которой формулы для мод БГ ищутся, как и в работе [1], с помощью интеграла Френеля. Следует, однако, отметить, что полученные выражения содержат сингулярности при $z \to 0$.

Лаконичная форма записи (10), объединяющая все три типа пучков, впервые появилась, по-видимому, в работе [7].

Отметим два обобщения пучков БГ.

Первое обобщение — это асимметрические (или в другой терминологии элегантные) пучки БГ [3,4]. Это решения уравнения (1), являющиеся суперпозицией обычных пучков БГ и имеющие вид

$$U = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!} U_{m+p}, \tag{11}$$

где U_{m+p} определяется согласно (10), $m \geq 0$ — целое, $c \geq 0$. В работах [3,4] показано, что выражение (11) представляется в виде конечного произведения элементарных функций и функции Бесселя J_m от аргумента специального вида.

Второе обобщение — некоаксиальные пучки БГ [5], которые в плоскости $z = 0$ имеют вид

$$U|_{z=0} = \exp\left[-\frac{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}{w_0^2} + im\Phi \right] J_m(\beta r), \tag{12}$$

где β, a_x, a_y и w_0 — произвольные вещественные числа. Функция (12) отличается от начального распределения для (10) (с соответствующими параметрами) множителем, пропорциональным $\exp\left(\frac{2a_x x + 2a_y y}{w_0^2}\right)$. Это приводит к появлению при $z \neq 0$ в соответствующем решении уравнения (1) дополнительного осциллирующего множителя и к линейному по z чисто мнимому сдвигу аргументов x и y.

Следует отметить, что такое решение, строго говоря, не относится к классу функций (2)–(8), однако приводится к нему сдвигом начала координат. Если такой сдвиг нежелателен, можно переопределить понятие фундаментальной моды и под G понимать функцию

$$G = \frac{A}{q(z)} \exp\left\{ ik\frac{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2}{2q(z)} \right\}, \tag{13}$$

частным случаем которой (при $a_x = a_y = 0$) является (2). Под высшими модами снова можно понимать решения вида (5), а под модами Гельмгольца–Гаусса — функции с амплитудами (6), (8), где теперь нужно вместо (7) положить

$$X = (x - a_x)/q(z), \qquad Y = (y - a_y)/q(z). \tag{14}$$

Некоаксиальные пучки БГ являются модами Гельмгольца–Гаусса, понимаемыми в таком слегка модифицированном смысле.

Таким образом, для построения пучков БГ и их обобщений могут использоваться различные подходы. В дальнейших построениях будем опираться на представление (5), (6), которое позволит получить новый класс решений уравнения (1), включающий описанные выше семейства в качестве частных случаев.

3. Смещенные моды Бесселя–Гаусса

Переходим к построению новых решений уравнения (1), относящихся к классу мод Гельмгольца–Гаусса (5)–(8). Перепишем (9) в координатах X, Y (7), причем сделаем это двумя способами. Первый основан на интегральном представлении функции Бесселя [17,18]:

$$J_m(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\{im\phi - i\gamma\sin\phi\}\, d\phi. \tag{15}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Psi_m &= J_m(KR)\exp\{im\Phi\}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{im\phi - iKR\sin\phi\}\,d\phi\,\exp\{im\Phi\}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{im(\phi+\Phi) - iKR\sin\phi\}\,d\phi\,.\end{aligned}$$

Перейдем к новой переменной интегрирования $t = \phi + \Phi$, причем промежуток интегрирования можно оставить тем же в силу 2π-периодичности подынтегральной функции. Преобразуем показатель экспоненты:

$$\begin{aligned}im(\phi+\Phi) - iKR\sin\phi &= imt - iKR\sin(t-\Phi)\\ &= imt - iKR\sin t\cos\Phi + iKR\cos t\sin\Phi\\ &= imt - iK(X\sin t - Y\cos t),\end{aligned}$$

и получим формулу

$$\Psi_m(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{imt - iK(X\sin t - Y\cos t)\}\,dt, \tag{16}$$

которая определяет Ψ_m как аналитическую функцию переменных X и Y, регулярную при всех комплексных значениях своих аргументов. Интеграл (16), очевидно, удовлетворяет уравнению (8), поскольку этому уравнению удовлетворяет подынтегральная функция.

Из (16), между прочим, вытекает, что при произвольных комплексных X, Y значения $\Psi_m(X,Y)$ являются коэффициентами разложения функции $\exp\{-iK(X\sin t - Y\cos t)\}$ в ряд Фурье по переменной t:

$$\begin{aligned}&\exp\{-iK(X\sin t - Y\cos t)\}\\ &\quad= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Psi_m(X,Y)\exp(-imt)\\ &\quad= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\Psi_{-m}(X,Y)\exp(imt).\end{aligned} \tag{17}$$

Второй способ основан на формулах

$$\exp\{i\Phi\} = \frac{X+iY}{R} = \frac{R}{X-iY}\,,$$

справедливых при $R \neq 0$. Подставляя эти формулы в (9) (первую при положительных, а вторую при отрицательных значениях m), получаем

$$\Psi_m(X,Y) = \frac{J_m(KR)}{R^{|m|}}(X + iY\,\mathrm{sign}\, m)^{|m|}, \tag{18}$$

где $R = \sqrt{X^2+Y^2}$. Здесь $\mathrm{sign}\, m = m/|m|$ при $m \neq 0$, $\mathrm{sign}\, 0 = 0$. Чтобы равенство (18) оставалось справедливым при $m = 0$, нулевую степень любого выражения считаем тождественно равной единице — в том числе и в случае, когда основание обращается в 0.

Очевидно, при $R \neq 0$ выражение (18) определяет ту же функцию, что и (16), а при $R = 0$ первый сомножитель следует заменить его предельным значением, равным $\frac{1}{|m|!}\left(\frac{K\mathrm{sign}\, m}{2}\right)^{|m|}$ [17,18]. Несмотря на наличие квадратного корня, эта функция, рассматриваемая как функция независимых комплексных переменных X и Y, не имеет точек ветвления: первый сомножитель в (18) четен относительно своего аргумента KR, поэтому выбор ветви квадратного корня не влияет на значение функции.

Выполним теперь в (16) и (18) сдвиг: $X \mapsto X' = X - X_0$, $Y \mapsto Y' = Y - Y_0$, где X_0 и Y_0 — произвольные постоянные (вообще говоря, комплексные). Функции

$$\Psi_m(X',Y') = \frac{J_m(KR')}{R'^{|m|}}(X' + iY'\mathrm{sign}\, m)^{|m|}\,, \tag{19}$$

где

$$R' = \sqrt{X'^2+Y'^2} = \sqrt{(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2}\,, \tag{20}$$

по-прежнему удовлетворяют уравнению (8) и регулярны при всех комплексных значениях X, Y. Отметим, что похожая конструкция при $m \geq 0$ и вещественных K была использована Котляром и соавторами [19–21] при построении смещенных недифрагирующих пучков

Бесселя (при этом значения X_0 и Y_0 предполагались комплексными, а в роли X и Y выступали декартовы координаты x и y).

Выбрав в качестве второго сомножителя в (6) выражение (19) и подставив в (5), получаем следующие решения уравнения (1):

$$U'_m = \frac{A}{q(z)}\exp\left\{\frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)}\right\}\Psi_m(X - X_0, Y - Y_0)$$
$$= \frac{A}{q(z)}\exp\left\{\frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)}\right\}$$
$$\times J_m\left(K\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}\right)$$
$$\times\left[\frac{(X - X_0) + i(Y - Y_0)\operatorname{sign} m}{\sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2}}\right]^{|m|}. \tag{21}$$

Перейдя к исходным переменным x, y, после некоторых преобразований находим

$$U'_m = \frac{A}{q(z)}\exp\left\{\frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)}\right\}$$
$$\times J_m\left(\frac{K\sqrt{(x - q(z)X_0)^2 + (y - q(z)Y_0)^2}}{q(z)}\right)$$
$$\times\left[\frac{(x - x_*) + i(y - y_*)\operatorname{sign} m}{\sqrt{(x - q(z)X_0)^2 + (y - q(z)Y_0)^2}}\right]^{|m|}, \tag{22}$$

где

$$x_* = (\operatorname{Re} X_0 - \operatorname{Im} Y_0 \operatorname{sign} m)z + (\operatorname{Im} X_0 + \operatorname{Re} Y_0 \operatorname{sign} m)z_R\,,$$
$$y_* = (\operatorname{Im} X_0 \operatorname{sign} m + \operatorname{Re} Y_0)z + (-\operatorname{Re} X_0 \operatorname{sign} m + \operatorname{Im} Y_0)z_R\,.$$

Функции вида (21), (22) будем называть смещенными модами БГ. Для случая $m = 0$ такое решение рассматривалось в работе [6], см. также [22,23].

В случае фундаментальной моды вида (13) формула (21) остается справедливой, если в ней считать $r^2 = (x - a_x)^2 + (y - a_y)^2$, а X и Y определить согласно (14). В частности, положив

$$X_0 = -ia_x/z_R\,, \qquad Y_0 = -ia_y/z_R\,,$$

приходим с точностью до обозначений к выражению, описывающему при мнимоотрицательных K некоаксиальные пучки БГ, введенные в [5].

Отметим, что и в других решениях типа Гельмгольца–Гаусса, рассмотренных в работах [7–9], также можно выполнить аналогичные комплексные сдвиги аргументов.

4. Фурье–спектр смещенных пучков Бесселя–Гаусса

Фурье–спектр произвольного локализованного (при фиксированном z) решения уравнения (1) можно найти, воспользовавшись известным соотношением между спектральной функцией и асимптотикой этого решения при $z \to \infty$. Любое решение параболического уравнения (1) может быть записано в виде

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\hat{U}(k_x, k_y)$$
$$\times\exp\left\{i\left(k_x x + k_y y - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}z\right)\right\}dk_x\,dk_y,$$

где $\hat{U}(k_x, k_y)$ — значение спектральной функции при $z = 0$. Воспользовавшись методом стационарной фазы [18], получаем в случае гладкой функции $\hat{U}(k_x, k_y)$, что при $z \to \infty$

$$U(x, y, z) \sim \frac{2\pi k}{iz}\hat{U}\left(\frac{kx}{z}, \frac{ky}{z}\right)\exp\left\{\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z}\right\}.$$

Тогда

$$\hat{U}(k_x, k_y) = \lim_{z\to\infty}\frac{iz}{2\pi k}\exp\left\{-\frac{iz(k_x^2 + k_y^2)}{2k}\right\}$$
$$\times U\left(\frac{k_x}{k}z, \frac{k_y}{k}z, z\right).$$

Применив эту формулу к смещенному пучку БГ (21), получаем

$$\hat{U}'_m(k_x, k_y) = \frac{iA}{2\pi k}\exp\left\{-\frac{z_R}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right\}$$
$$\times\Psi_m\left(\frac{k_x}{k} - X_0, \frac{k_y}{k} - Y_0\right) = \frac{iA}{2\pi k}\exp\left\{-\frac{z_R}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right\}$$
$$\times\frac{J_m(K\hat{R})}{\hat{R}^{|m|}}(\hat{X} + i\hat{Y}\operatorname{sign} m)^{|m|},$$

где $\hat{X} = \frac{k_x}{k} - X_0$, $\hat{Y} = \frac{k_y}{k} - Y_0$, $\hat{R} = \sqrt{\hat{X}^2 + \hat{Y}^2}$.

Отсюда вытекает любопытный факт: фурье–образ произведения смещенного бесселевого множителя и гауссовой экспоненты оказывается функцией из того же самого класса.

5. Связь между смещенными и несмещенными пучками Бесселя–Гаусса

5.1. Случай общего положения

Покажем, как смещенные моды БГ могут быть представлены в виде суперпозиции несмещенных. Для этого понадобится формула, связывающая значения функций Ψ_m для различных значений аргументов и индексов.

Пусть $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, где $X_{1,2}$, $Y_{1,2}$ — произвольные комплексные числа. Очевидно, что

$$\exp\{-iK(X\sin t - Y\cos t)\}$$
$$= \exp\{-iK(X_1\sin t - Y_1\cos t)\}$$
$$\times\exp\{-iK(X_2\sin t - Y_2\cos t)\}\,.$$

Воспользовавшись формулами (17), получаем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Psi_m(X_1+X_2, Y_1+Y_2)\exp(-imt)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_1, Y_1)\exp(ipt) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Psi_k(X_2, Y_2)\exp(-ikt)$$

$$= \sum_{p,k=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_1, Y_1)\Psi_k(X_2, Y_2)\exp[-i(k-p)t]$$

$$= \sum_{p,m=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_1, Y_1)\Psi_{m+p}(X_2, Y_2)\exp(-imt)$$

(при последнем переходе сделана замена $m = k - p$, $k = m + p$). Отсюда вытекает формула

$$\Psi_m(X_1+X_2, Y_1+Y_2) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_1, Y_1)\Psi_{m+p}(X_2, Y_2), \tag{23}$$

являющаяся аналогом теоремы сложения для бесселевых функций первого рода [17,18]. Применительно к $X' = X - X_0$, $Y' = Y - Y_0$ эта формула дает

$$\Psi_m(X', Y') = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(-X_0, -Y_0)\Psi_{m+p}(X, Y)\,,$$

откуда после домножения на (2) получаем

$$U'_m = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(-X_0, -Y_0)U_{m+p}\,. \tag{24}$$

Таким образом, мы получили представление для смещенного пучка БГ в виде суперпозиции несмещенных. Отсюда, между прочим, следует, что волновое поле, отвечающее смещенным пучкам, представляется в виде суперпозиции гауссовых пучков, оси которых находятся на тех же конических (в случае вещественных K цилиндрических) поверхностях, что и для несмещенных.

Точно таким же образом можно получить представление для несмещенного пучка БГ в виде суперпозиции смещенных: $X = X' + X_0$, $Y = Y' + Y_0$, поэтому в силу (23)

$$\Psi_m(X, Y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_0, Y_0)\Psi_{m+p}(X', Y')$$

и

$$U_m = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Psi_{-p}(X_0, Y_0)U'_{m+p}.$$

5.2. Асимметричные пучки Бесселя-Гаусса и родственные им

Рассмотрим частный случай смещенного пучка БГ, в котором $X_0 = c/K$, $Y_0 = \pm iX_0 = \pm ic/K$, где c — произвольное комплексное число. В этом случае при вычислении $\Psi_{-p}(-X_0, -Y_0) = \Psi_{-p}(-c/K, \mp ic/K)$ следует учесть, что $R_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = 0$, поэтому первый сомножитель в формуле (19) нужно заменить его предельным значением:

$$\Psi_{-p}\left(-\frac{c}{K}, \mp i\frac{c}{K}\right)$$

$$= \frac{1}{|p|!}\left(-\frac{K\operatorname{sign} p}{2}\right)^{|p|}\left(-\frac{c}{K} \mp \frac{c}{K}\operatorname{sign} p\right)^{|p|}$$

$$= \frac{c^{|p|}}{|p|!}\left(\frac{1 \pm \operatorname{sign} p}{2}\right)^{|p|}.$$

При $Y_0 = iX_0$ это выражение обращается в нуль при отрицательных, а при $Y_0 = -iX_0$ – при положительных значениях p вследствие аннулирования последнего сомножителя. Тогда в силу (23)

$$\Psi_m\left(X - \frac{c}{K}, Y - i\frac{c}{K}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!}\Psi_{m+p}(X, Y), \tag{25}$$

$$\Psi_m\left(X - \frac{c}{K}, Y + i\frac{c}{K}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-c)^p}{p!}\Psi_{m-p}(X, Y) \tag{26}$$

(в формуле (26) сделана замена индекса суммирования $p \mapsto -p$).

Перейдем к случаю, рассмотренному в [3,4]. Как указано выше, в этих работах рассматривалась сумма (11), которая после вынесения общего множителя представляется в виде

$$U = \frac{A}{q(z)}\exp\left\{\frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)}\right\}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p}{p!}\Psi_{m+p}(X, Y). \tag{27}$$

Такие решения уравнения (1), при $c > 0$, $m \geq 0$ и мнимоотрицательных K, были названы асимметричными (или элегантными) пучками БГ. Сопоставляя (27) с (25), видим, что асимметричный пучок БГ (11) — это смещенный пучок (21) с $X_0 = c/K$, $Y_0 = ic/K$. При таких значениях параметров с учетом $m \geq 0$ выражения (21), (22) несколько упрощаются: $x_* = y_* = 0$,

$$(X - X_0) + i(Y - Y_0) = X + iY = q^{-1}(z)r\exp\{i\Phi\}\,,$$

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2$$

$$= q^{-2}(z)r^2 - 2(c/K)q^{-1}(z)r\exp\{i\Phi\}\,,$$

и формула (32) принимает вид

$$U'_m = \frac{A}{q(z)}\exp\left\{\frac{ikr^2}{2q(z)} + \frac{iK^2}{2kq(z)} + im\Phi\right\}$$

$$\times\left[\frac{r}{r - 2(c/K)q(z)\exp\{i\Phi\}}\right]^{m/2}$$

$$\times J_m\left(\frac{K\sqrt{r^2 - 2(c/K)q(z)r\exp\{i\Phi\}}}{q(z)}\right).$$

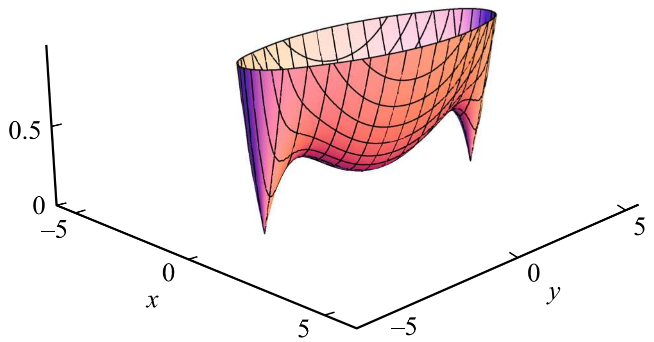

Рис. 1. График зависимости $\left|\Psi_0\left(\frac{x}{q(0)} - X_0, \frac{y}{q(0)} - Y_0\right)\right| = |J_0(KR')|$ от безразмерных координат x и y при $z = 0$ ($k = 1$, $q(0) = -i$, $K = 1$, $X_0 = 5$, $Y_0 = i$).

В случае мнимоотрицательного K эта функция с точностью до обозначений совпадает с выражением для асимметричного пучка БГ, полученным в [3,4]. В случае $m \leq 0$ аналогичную формулу можно получить, если взять $X_0 = c/K$, $Y_0 = -ic/K$.

5.3. Некоаксиальные пучки Бесселя-Гаусса

В случае некоаксиальных пучков БГ [5] величины $X_0 = -ia_x/z_R$, $Y_0 = -ia_y/z_R$ чисто мнимые, поэтому можно воспользоваться формулой (9), и тогда

$$\Psi_{-p}\left(\frac{ia_x}{z_R}, \frac{ia_y}{z_R}\right) = J_{-p}\left(\frac{iKa}{z_R}\right)\exp\{-ip\Phi_a\},$$

где $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ и Φ_a — полярные координаты вектора (a_x, a_y). Отметим, что для рассмотренного в [5] случая обычных пучков БГ величина K мнимоотрицательна, и $iK = |K|$.

6. Результаты численных расчетов

Приведем несколько рисунков, иллюстрирующих поведение исследуемых функций для случая $m = 0$, $X_0 = 5$, $Y_0 = i$, $z_R = 1$, $k = 1$, $K = 1$ (все величины — безразмерные).

На рис. 1 приведен график зависимости модуля функции $\Psi_0\left(\frac{x}{q(0)} - X_0, \frac{y}{q(0)} - Y_0\right) = J_0(KR')$ от поперечных координат x и y при $z = 0$. Этот модуль имеет локальный минимум в начале координат и быстро растет при увеличении $|y|$. Вдоль оси x рост первоначально более плавный, затем функция обращается в нуль в двух точках, в которых значение KR' совпадает с корнями функции Бесселя J_0, после чего происходит быстрый рост.

Рисунок 2 представляет модуль функции U_0' (21) — произведения Ψ_0 и гауссова множителя (2) — в том же сечении $z = 0$. Как видно, график этой функции имеет характерную двугорбую форму, которая в данном

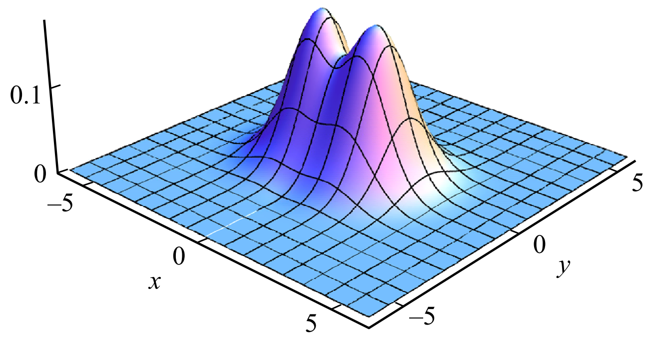

Рис. 2. График зависимости $|U_0'|$ от безразмерных координат x и y при $z = 0$ ($k = 1$, $q(0) = -i$, $K = 1$, $X_0 = 5$, $Y_0 = i$).

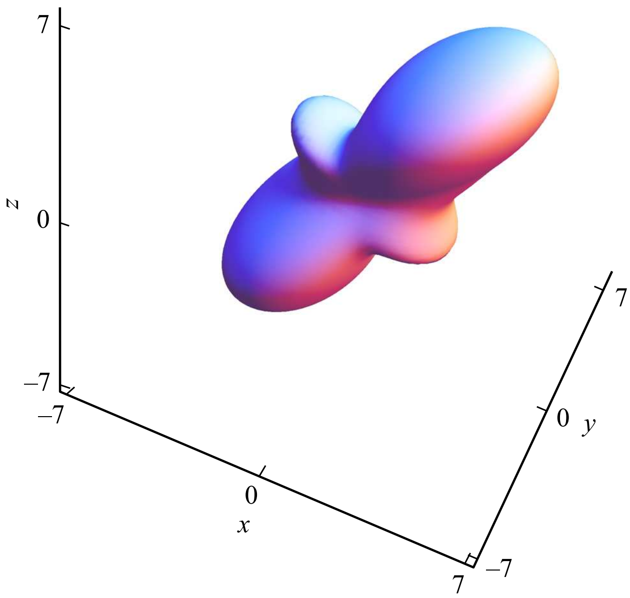

Рис. 3. Поверхность уровня $|U_0'| = 0.05$ ($k = 1$, $q(z) = z - i$, $K = 1$, $X_0 = 5$, $Y_0 = i$).

случае связана с оврагообразным профилем функции Ψ_0 в окрестности максимума гауссовой экспоненты.

Остальные рисунки представляют собой поверхности уровня функции $|U_0'|$ в трехмерном пространстве. На рис. 3, 4 поверхности состоят из одной компоненты достаточно сложной формы. На рис. 5, отвечающем значению $|U_0'|$, близкому к максимальному, поверхность состоит из двух компонент связности, локализованных в окрестности точек максимума.

Более подробно и систематично исследование зависимости функций (21) от многочисленных параметров, определяющих их поведение, будет представлено во второй части настоящей работы.

7. Заключение

В настоящей работе построено новое семейство локализованных решений параксиального волнового уравнения, имеющих явное аналитическое представление —

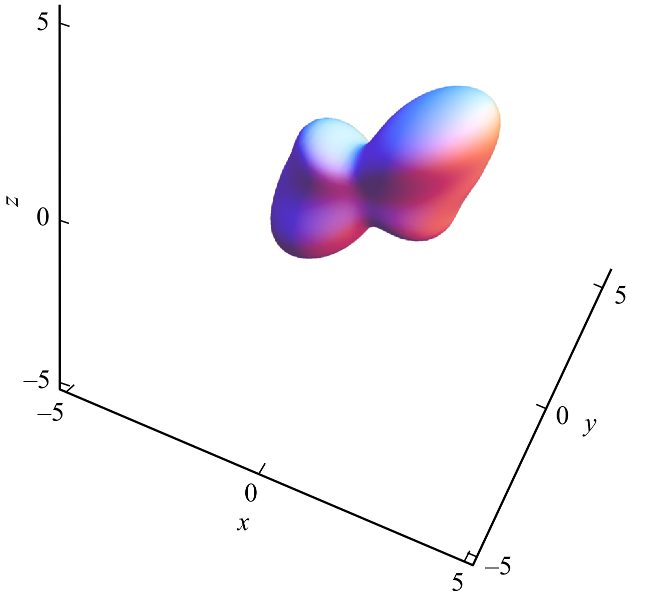

Рис. 4. Поверхность уровня $|U_0'| = 0.1$ $(k = 1,\ q(z) = z - i,\ K = 1,\ X_0 = 5,\ Y_0 = i)$.

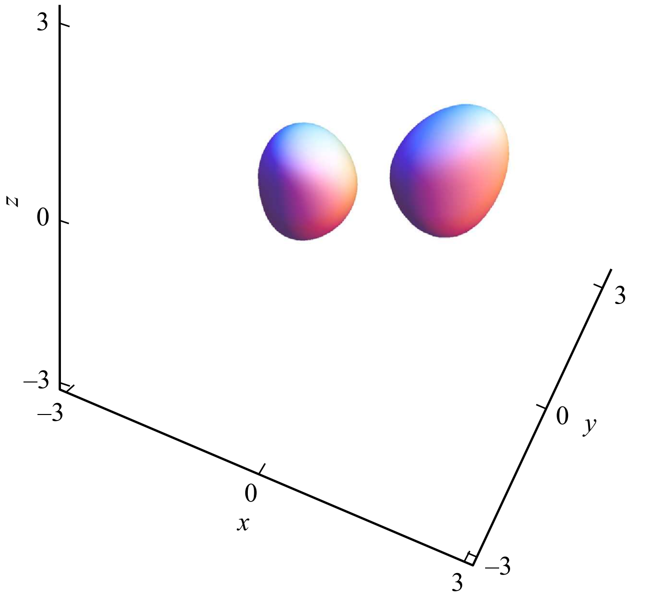

Рис. 5. Поверхность уровня $|U_0'| = 0.15$ $(k = 1,\ q(z) = z - i,\ K = 1,\ X_0 = 5,\ Y_0 = i)$.

смещенные пучки БГ. Установлено, что это семейство включает в себя некоторые решения, найденные ранее: обычные, модифицированные, обобщенные, асимметричные и некоаксиальные пучки БГ. Получены формулы для фурье–спектра смещенного пучка БГ, а также представление для такого решения в виде ряда по несмещенным пучкам.

Автор намерен продолжить исследование свойств полученных функций. Будут представлены формулы для орбитального углового момента смещенных пучков БГ. Будет также получена удобная параметризация рассматриваемого класса решений, подробно исследовано поведение выражения KR', стоящего в аргументе функции Бесселя, и на основе такого исследования будет описана эволюция оптических вихрей, возникающих в изучаемых решениях. Аналитические построения планируется проиллюстрировать результатами численных расчетов.

В качестве дальнейших обобщений могут быть рассмотрены смещенные пучки Гельмгольца–Гаусса небесселева типа, получаемые из известных решений [9] с помощью аналогичных комплексных сдвигов на плоскости XY. Другое направление предполагаемых обобщений — рассмотрение наклонных пучков Бесселя–Гаусса и Гельмгольца–Гаусса, в которых, в свою очередь, также можно выполнить комплексный сдвиг аргумента. Возможно также обобщение рассматриваемых решений на среды с квадратичной зависимостью показателя преломления от поперечных координат, как, например, это сделано в работе [6].

Предполагается также на основе полученных решений уравнения (1) выполнить построение точных решений волнового уравнения — непараксиальных движущихся пучков, подобных построенным в [24], а также построение интегрального представления для точных решений уравнений Гельмгольца, имеющих ту же коротковолновую асимптотику, что и произведение функции (21) на осциллирующий множитель $\exp(ikz)$ — подобно тому, как это сделано в работе [25] применительно к астигматическим гауссовым пучкам.

Автор выражает глубокую признательность И. А. Со за проведение численных расчетов и построение графиков, использованных в разд. 6 настоящей работы, и А. П. Киселеву за полезные и содержательные обсуждения.

Список литературы

[1] *Gori F., Guattari G., Padovani C.* // Opt. Commun. 1987. V. 64. N 6. P. 491. doi 10.1016/0030-4018(87)90276-8
[2] *Bagini V., Frecca F., Santarsiero M., Schettini G., Schirripa Spagnolo G.* // J. of Mod. Opt. 1996. V. 43. N 6. P. 1155. doi 10.1080/09500349608232794
[3] *Котляр В.В., Ковалёв А.А., Скиданов Р.В., Сойфер В.А.* // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38. № 2. С. 162.
[4] *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Soifer V.A.* // JOSA A. 2014. V. 31. N 9. P. 1977. doi 10.1364/JOSAA.31.001977
[5] *Huang C., Zheng Y., Li H.* // JOSA A. 2016. V. 33. N 4. P. 508. doi 10.1364/JOSAA.33.000508
[6] *Kiselev A.P., Plachenov A.B.* // JOSA A. 2016. V. 33. N 4. P. 663. doi 10.1364/JOSAA.33.000663
[7] *Киселев А.П.* // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. № 4. С. 553; *Kiselev A.P.* // Opt. Spectrosc. 2004. V. 96. N 4. P. 479. doi 10.1134/1.1719131
[8] *Киселев А.П.* // Опт. и спектр. 2007. Т. 102. № 4. С. 661; *Kiselev A.P.* // Opt. Spectrosc. 2007. V. 102. N 4. P. 603. doi 10.1134/S0030400X07040200
[9] *Gutiérrez-Vega J.C., Bandres M.A.* // JOSA A. 2005. V. 22. N 2. P. 289. doi 10.1364/JOSAA.22.000289

[10] *Siegman A.E.* Lasers. Mill Valley, California: University Science Books, 1986. 1285 p.

[11] *Леонтович М.А., Фок В.А.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 7. С. 557.

[12] *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970. 520 с.; *Fock V.A.* Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems. Frankfurt: Pergamon Press, 1965. 414 p.

[13] *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд–ва „Наука", 1972. 456 с.; *Babič V.M., Buldyrev V.S.* Short–Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic Methods. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991. 445 p.

[14] *Svelto O.* Principles of Lasers. 5th Edition. N.Y.: Springer Science + Business Media, LLC., 2010. 620 p.; Перевод: *Звелто О.* Принципы лазеров. М.: Мир, 1990. 560 с.

[15] *Palma C., Cincotti G., Guattari G., Santarsiero M.* // J. Mod. Opt. 1996. V. 43. N 11. P. 2269. doi 10.1080/09500349608232885

[16] *Li Y., Lee H., Wolf E.* // JOSA A. 2004. V. 21. N 4. P. 640. doi 10.1364/JOSAA.21.000640

[17] *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: The University press, 1922. 804 p.; Перевод: *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций, Ч. 1. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. 799 с.

[18] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, Т. 3, Ч. 2. СПб: БХВ-Петербург, 2010. 816 с.; *Smirnov V.I.* A Course of Higher Mathematics, V. III, Part II. Oxford: Pergamon/Addison-Wesley, 1964. 700 p.

[19] *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* // Opt. Lett. 2014. V. 39. N 8. P. 2395. doi 10.1364/OL.39.002395

[20] *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.A.* // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. N 5. 053840. doi 10.1103/PhysRevA.91.053840

[21] *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A.* // JOSA A. 2015. V. 32. N 6. P. 1046. doi 10.1364/JOSAA.32.001046

[22] *Плаченов А.Б., Дьякова Г.Н.* // Сб. тр. IX Межд. конф. „Фундаментальные проблемы оптики — 2016". СПб, 2016. С. 64.

[23] *Plachenov A.B., So I.A.* // Abstr. Int. conf. „2017 Days on Diffraction (DD)". SPb. 2017. P. 114.

[24] *Kiselev A.P., Plachenov A.B., Chamorro–Posada P.* // Phys. Rev. A. 2012. V. 85. 043835. doi 10.1103/PhysRevA.85.043835

[25] *Kiselev A.P., Plachenov A.B.* // Proc. Int. conf. „2018 Days on Diffraction (DD)". SPb. IEEE. 2018. P. 168.