

03

## Картины рассеяния ортогонально поляризованных компонент света для статистически вращательно-инвариантных мозаичных двулучепреломляющих слоев

© Д.Д. Яковлев, Д.А. Яковлев<sup>†</sup>

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

<sup>†</sup> e-mail: yakovlevday@gmail.com

Поступила в редакцию 27.10.2018 г.

В окончательной редакции 27.10.2018 г.

Принята к публикации 06.11.2018 г.

С помощью метода двухточечных обобщенных матриц Мюллера и приближения фазового экрана исследуется связь формы угловых спектров линейно поляризованных компонент света, рассеянного на случайно-неоднородных слоях двулучепреломляющих материалов, с корреляционными структурными характеристиками слоев. Для статистически вращательно-инвариантных слоев выявлены условия наблюдения трех типов картин рассеяния линейно поляризованных компонент: инвариантных относительно азимутального поворота на  $180^\circ$ , инвариантных относительно азимутального поворота на  $90^\circ$  и обладающих круговой симметрией. Для мозаичных двулучепреломляющих слоев, состоящих из однородных фрагментов с разной азимутальной ориентацией оптической оси, установлена связь между корреляционными структурными свойствами слоя и видом картин рассеяния поляризованных компонент. В частности, определены условия наблюдения четырехлепестковых картин рассеяния в скрещенных и параллельных поляризаторах и найдена структурная характеристика, отвечающая за ориентацию четырехлистников рассеяния относительно направления поляризации падающего света. Сделанные выводы подтверждены экспериментальными данными и результатами численного моделирования.

DOI: 10.21883/OS.2019.03.47374.314-18

### 1. Введение

Особый класс задач теории рассеяния составляют задачи о рассеянии света на слоях двулучепреломляющих случайно-неоднородных сред. Знание особенностей рассеяния света на таких слоях важно, например, при изучении жидкокристаллических [1] и полимерных материалов [2–4]. Уже давно была обнаружена возможность характеризовать жидкокристаллические и полимерные материалы и изучать процессы структурообразования в таких материалах с помощью метода малоуглового рассеяния поляризованного света [2,5]. В наиболее простом и наиболее часто используемом варианте этого метода информация об исследуемом слое извлекается из пары дифрактограмм  $V_v$  и  $H_v$ , получаемых при нормальном освещении слоя коллимированным пучком квазимонохроматического линейно поляризованного света после пропускания рассеянного слоя света через линейный анализатор при параллельной ( $V_v$ ) и перпендикулярной ( $H_v$ ) ориентации его оси пропускания относительно направления поляризации падающего на слой света [2,5].

Часто условия эксперимента делают адекватной постановку задачи о рассеянии света на слое жидкого кристалла (ЖК) или полимерной пленке как задачи о дифракции светового пучка на слое локально одноосной среды с независимыми от пространственных координат главными показателями преломления и почти всюду плавно меняющейся в пространстве ориентацией ло-

кальной оптической оси, причем это изменение носит случайный характер при движении вдоль направлений, параллельных границам слоя, и почти регулярный и одинаковый для разных участков слоя характер при движении в направлении, перпендикулярном границам слоя. Слой, рассматриваемый в данной задаче, можно представить себе как мозаику, составленную из фрагментов (доменов) с почти одинаковой внутренней структурой, но разной азимутальной ориентацией деталей этой структуры. Такие слои мы будем называть квазиэквидоменными, а слои, состоящие из фрагментов с идентичной внутренней структурой — эквидоменными. При решении оптических задач в приближении фазового экрана оптически эквидоменным можно назвать слой, матрица Джонса локального пропускания которого как функция координат в плоскости экрана может быть выражена следующим образом:

$$\mathbf{T}(x, y) = \mathbf{R}(-\varphi(x, y))\mathbf{T}_{\text{dom}}\mathbf{R}(\varphi(x, y)),$$

где

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$\varphi(x, y)$  — угол азимутальной ориентации домена (структуры домена) и  $\mathbf{T}_{\text{dom}}$  — матрица пропускания домена-прототипа в его собственной системе координат (матрица пропускания любого из доменов при  $\varphi(x, y) = 0$ ). Часто используемым в теоретических рассуждениях

вариантом эквидоменного слоя является локально одноосный слой с пространственным распределением локальной оптической оси вида

$$\mathbf{c}(x, y, z) = \begin{pmatrix} c_x(x, y, z) \\ c_y(x, y, z) \\ c_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(x, y)) \\ \sin(\varphi(x, y)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\varphi(x, y)$  — угол азимутальной ориентации локальной оптической оси; ось  $z$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$  перпендикулярна границам слоя. В этом случае локальная оптическая ось во всех точках слоя параллельна границам слоя, и ее ориентация не зависит от  $z$  (рис. 1). Такие слои мы будем условно называть простыми мозаичными двулучепреломляющими (SMB, simple mosaic birefringent) слоями. SMB-слои часто используются в качестве оптических моделей слоев низкомолекулярных ЖК и ЖК-полимеров с так называемой шпирен-текстурой [6,7]. Для таких ЖК-слоев характерно отсутствие какого-либо преимущественного направления ориентации локальных оптических осей, и они обладают статистической вращательной инвариантностью, которая оптически выражается в следующем. Если осветить слой линейно поляризованным квазимонохроматическим пучком и выделить с помощью анализатора какую-либо из ортогонально поляризованных компонент прошедшего света, то после азимутального поворота слоя на произвольный угол картина рассеяния будет в среднем, за исключением мелкомасштабных деталей (спеклов), такой же, как и до поворота (рис. 2). Для статистически вращательно-инвариантных слоев, структура которых близка к (1), в эксперименте чаще всего наблюдаются картины рассеяния,  $H_V$  и  $V_V$ , двух типов: обладающие круговой симметрией (рис. 3, *a*) [4] и четырехлепестковые (рис. 3, *b, c*) [2–5]. Среди четырехлепестковых картин рассеяния наиболее часто встречаются дифрактограммы  $\times$ -типа (лепестки направлены под углами  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ$  и  $315^\circ$  относительно оси, указывающей направление поляризации падающего света) и  $+$ -типа (два лепестка направлены параллельно указанной оси и два — перпендикулярно ей), причем они встречаются как в сочетании  $\{H_V$ -дифрактограмма  $\times$ -типа,  $V_V$ -дифрактограмма  $+$ -типа} (рис. 3, *b*) [5,8–10], так и в сочетании  $\{H_V$ -дифрактограмма  $+$ -типа,  $V_V$ -дифрактограмма  $\times$ -типа} (рис. 3, *c*) [3,5,11,12].

Для установления связи между структурными свойствами мозаичных двулучепреломляющих слоев и видом картин рассеяния  $H_V$  и  $V_V$  чаще всего используются подходы, опирающиеся на приближение Релея-Ганса-Дебая [2,5]. Это приближение применимо к слоям со структурой (1) только при выполнении условия  $\Delta n/d \ll 1$  [13], где  $\Delta n$  — разность главных показателей преломления материала слоя,  $d$  — толщина слоя и  $\lambda$  — длина волны падающего излучения в вакууме. Во многих случаях, когда приближение Релея-Ганса-Дебая неприменимо, оправданным является использование приближения фазового экрана [14–16] (приближение

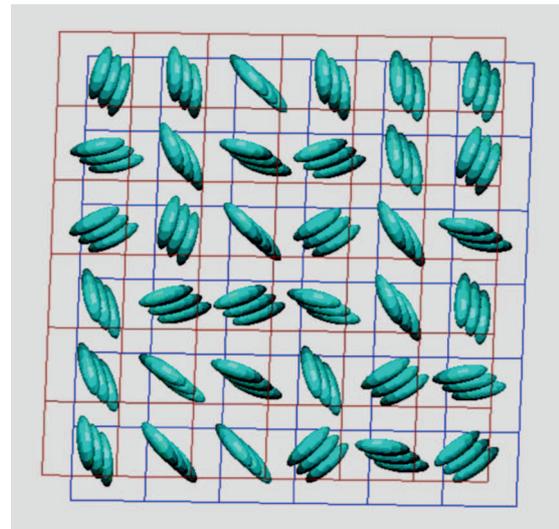


Рис. 1. Структура простого мозаичного двулучепреломляющего (SMB) слоя. Длинные оси эллипсоидов показывают ориентацию локальной оптической оси.

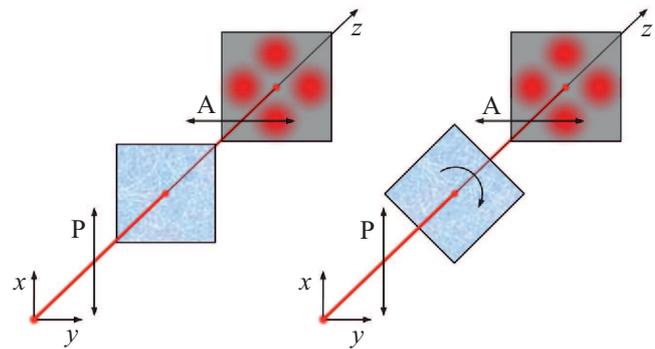


Рис. 2. Оптическая статистическая вращательная инвариантность случайно-неоднородного двулучепреломляющего слоя. Стрелки показывают ориентацию оси пропускания поляризатора (P) и анализатора (A).

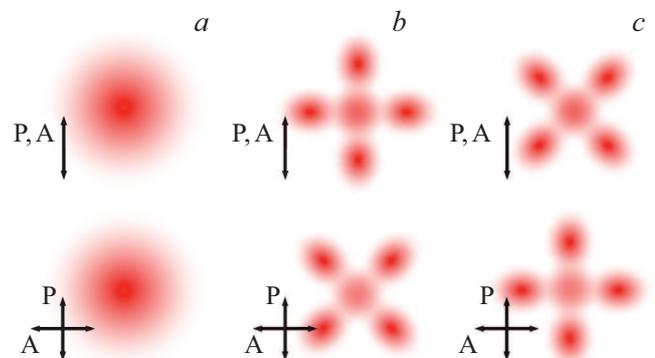


Рис. 3. Типичные картины рассеяния  $V_V$  и  $H_V$  для статистически вращательно-инвариантных мозаичных двулучепреломляющих слоев: (a) обладающие круговой симметрией, (b, c) — четырехлепестковые.

прямых лучей [17]). Численное моделирование показывает, что приближение фазового экрана способно обеспечить хорошую точность оценки параметров рассеяния слоев со структурой (1) с толщиной до  $10\lambda$  и  $\Delta n = 0.2$  (типичное значение  $\Delta n$  для низкомолекулярных ЖК), если на расстояниях порядка длины волны изменение угла  $\varphi$  не превышает  $15^\circ$ . Важным достоинством приближения фазового экрана является возможность учесть не только свойства локальных неоднородностей среды, но и кооперативные эффекты, играющие важную роль в рассеянии света на эквидоменных и квазиэквидоменных слоях [18].

Основной целью настоящей работы является установление связи между видом картин рассеяния  $H_V$  и  $V_V$  и корреляционными структурными свойствами статистически вращательно-инвариантных слоев со структурой (1) в рамках приближения фазового экрана. Для этого мы используем метод двухточечных обобщенных матриц Мюллера [19], разработанный в рамках единой теории когерентности и поляризации случайных электромагнитных пучков Э. Вольфа [20]. В разд. 2–4 исследуются общие свойства рассеяния света на статистически вращательно-инвариантных квазиэквидоменных слоях. В разд. 5 для слоев со структурой (1) устанавливается связь между корреляционными свойствами поля  $\varphi(x, y)$  и видом картин рассеяния  $H_V$  и  $V_V$ . Полученные теоретические результаты подтверждаются экспериментальными данными (разд. 6) и результатами численного моделирования (разд. 7).

## 2. Обобщенные матрицы Мюллера для рассеянной и нерассеянной компонент прошедшего света

Пусть однородно поляризованный коллимированный пучок падает в нормальном направлении на плоский бесконечно протяженный амплитудно-фазовый экран, находящийся в плоскости  $z = 0$  декартовой системы координат  $(x, y, z)$ . Для описания спектральных и корреляционных свойств падающего и прошедшего полей мы будем использовать обобщенные векторы Стокса [21]  $\mathbf{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{J}(\mathbf{r}_1, \omega) \otimes \mathbf{J}^*(\mathbf{r}_2, \omega))$ , где  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$  — вектор Джонса, характеризующий типичный элемент статистического ансамбля реализаций спектральной компоненты флуктуирующего электрического поля с угловой частотой  $\omega$  в точке  $\mathbf{r}$ , угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций поля,

$$\mathbf{L} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix},$$

$\otimes$  — символ кронекеровского умножения матриц. В дальнейшем мы опускаем аргумент  $\omega$  у всех функций и записываем обобщенные векторы Стокса в плоскости

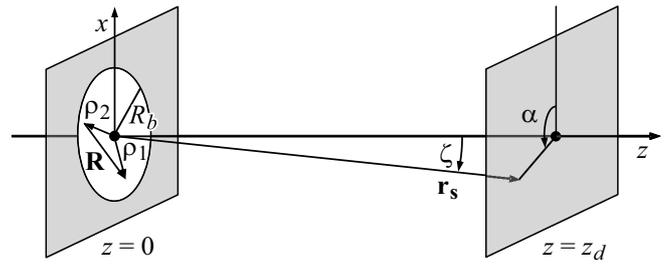


Рис. 4. Рассматриваемая геометрия эксперимента.

$z = 0$  как функции от  $\rho_1 = (x_1, y_1)$  и  $\rho_2 = (x_2, y_2)$ . Представим обобщенный вектор Стокса падающего пучка  $\mathbf{S}_i(\rho_1, \rho_2)$  в плоскости  $z = 0$  непосредственно перед экраном в виде

$$\mathbf{S}_i(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \rho_2) \mathbf{S}_{P-i}, \quad (2)$$

где  $g(\rho_1, \rho_2)$  — скалярная функция, удовлетворяющая условию  $\int g(\rho, \rho) d^2\rho = 1$  и  $\mathbf{S}_{P-i}$  — интегральный вектор Стокса [22] падающего пучка (вектор Стокса спектральной плотности мощности пучка, характеризующий пучок как целое). Здесь и далее считаем, что все векторы состояния и матричные операторы представлены в системе координат  $(x, y, z)$ . Обобщенный вектор Стокса поля в плоскости  $z = 0$  непосредственно за экраном может быть выражен следующим образом:

$$\mathbf{S}_o(\rho_1, \rho_2) = \mathbf{M}(\rho_1, \rho_2) \mathbf{S}_i(\rho_1, \rho_2), \quad (3)$$

где

$$\mathbf{M}(\rho_1, \rho_1) \equiv \mathbf{L}(\mathbf{T}(\rho_1) \otimes \mathbf{T}^*(\rho_2)) \mathbf{L}^{-1} \quad (4)$$

— обобщенная матрица Мюллера [19] и  $\mathbf{T}(\rho)$  — матрица Джонса локального пропускания фазового экрана.

Спектральные и поляризационные свойства прошедшего поля в дальней зоне ( $z_d \gg R_b$ , где  $R_b$  — радиус пучка,  $z_d$  — расстояние от экрана до плоскости детектирования, рис. 4) могут быть описаны с помощью одноточечного спектрального вектора Стокса  $\mathbf{S}_o^{(\infty)}(\mathbf{r}_s)$ , который может быть выражен через  $\mathbf{S}_o(\rho_1, \rho_2)$  следующим образом [23]:

$$\mathbf{S}_o^{(\infty)}(\mathbf{r}_s) = \frac{k^2}{(2\pi r_0)^2} \cos^2 \xi \iint \mathbf{S}_o(\rho_1, \rho_2) \times \exp[-iks_{\perp} \mathbf{R}] d^2\rho_1 d^2\rho_2, \quad (5)$$

где  $\mathbf{r}_s \equiv r_0 \mathbf{s}$  — радиус-вектор точки в плоскости  $z = z_d$ ,  $\mathbf{s}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{r}_s$ ,  $\xi$  — угол между  $\mathbf{s}$  и положительной осью  $z$ ,  $k \equiv 2\pi/\lambda$ ,  $\mathbf{s}_{\perp}$  — проекция вектора  $\mathbf{s}$  на плоскость  $z = 0$  и  $\mathbf{R} \equiv \rho_1 - \rho_2$  (рис. 4). Подстановка (2) и (3) в (5) и замена переменных  $\rho_1$  и  $\rho_2$  на  $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$  и  $\mathbf{R} = \rho_1 - \rho_2$  приводят

к следующему выражению:

$$\mathbf{S}_o^{(\infty)}(\mathbf{r}_s) = \frac{k^2}{(2\pi r_0)^2} \cos^2 \xi \left[ \int \exp(-iks_{\perp} \mathbf{R}) \times \left( \int \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) g(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) d^2 \boldsymbol{\rho}_0 \right) d^2 \mathbf{R} \right] \mathbf{S}_{P-i}. \quad (6)$$

В настоящей работе ограничиваемся рассмотрением рассеянной компоненты прошедшего света. Для того чтобы иметь возможность анализировать свойства рассеянной компоненты отдельно, сделаем некоторые допущения относительно структуры экрана. Будем считать, что экран является макроскопически однородным в масштабе  $R_{\text{hom}}$  и что свойства падающего поля на масштабе  $R_{\text{hom}}$  изменяются медленно. Уточним, что здесь имеется в виду. Обозначим среднее от  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R})$ , взятое по области  $\boldsymbol{\rho}_0 \in \Omega_{\boldsymbol{\rho}', R'}$ , где  $\Omega_{\boldsymbol{\rho}', R'}$  — круговая область с центром в  $\boldsymbol{\rho}'$  и радиусом  $R'$ , как  $\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) \rangle_{\boldsymbol{\rho}', R'}$ . Под макроскопической однородностью мы понимаем то, что при достаточно больших значениях  $R' \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) \rangle_{\boldsymbol{\rho}', R'}$  изменяется с изменением  $\boldsymbol{\rho}'$  незначительно, слегка флуктуируя вокруг значения  $\mathbf{M}_A(\mathbf{R}) \equiv \langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) \rangle_A$ . Здесь угловые скобки  $\langle \rangle_A$  означают усреднение по всей площади фазового экрана. Масштаб  $R_{\text{hom}}$  может быть определен как наименьшее значение  $R'$ , при котором, как и при любых ббльших  $R'$ , зависимостью  $\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) \rangle_{\boldsymbol{\rho}', R'}$  от  $\boldsymbol{\rho}'$  можно пренебречь, т.е. при любом  $\boldsymbol{\rho}'$

$$\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) \rangle_{\boldsymbol{\rho}', R_{\text{hom}}} \approx \mathbf{M}_A(\mathbf{R}), \quad (7)$$

и область  $\Omega_{\boldsymbol{\rho}', R_{\text{hom}}}$  может считаться репрезентативной. Скорость пространственного изменения параметров падающего пучка в нашем рассмотрении определяется функцией  $g(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R})$ . Ее, как функцию от  $\boldsymbol{\rho}_0$ , считаем медленной функцией в масштабе  $R_{\text{hom}}$ .

Сделанные предположения позволяют заменить матрицу  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R})$  на  $\langle \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{R}) \rangle_{\boldsymbol{\rho}_0, R_{\text{hom}}}$  при интегрировании по  $\boldsymbol{\rho}_0$  в (6) и воспользоваться соотношением (7), что приводит к следующему выражению:

$$\mathbf{S}_o^{(\infty)}(\mathbf{r}_s) \approx \frac{k^2}{(2\pi r_0)^2} \cos^2 \xi \times \left[ \int \mathbf{M}_A(\mathbf{R}) G(\mathbf{R}) \exp(-iks_{\perp} \mathbf{R}) d^2 \mathbf{R} \right] \mathbf{S}_{P-i}, \quad (8)$$

где

$$G(\mathbf{R}) \equiv \int g(\boldsymbol{\rho}_0, \mathbf{R}) d^2 \boldsymbol{\rho}_0.$$

Представим матрицу Джонса локального пропускания слоя в виде  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\rho}) = \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\rho})$ , где  $\tilde{\mathbf{T}} \equiv \langle \mathbf{T}(\boldsymbol{\rho}) \rangle_A$  и  $\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\rho}) \equiv \mathbf{T}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\mathbf{T}}$ . Тогда функцию  $\mathbf{M}_A(\mathbf{R})$  можно представить в виде суммы

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{R}) = \tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R}), \quad (9)$$

где

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{T}} \otimes \tilde{\mathbf{T}}^*) \mathbf{L}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) \equiv \langle \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\rho}_1) \otimes \tilde{\mathbf{T}}^*(\boldsymbol{\rho}_2)) \mathbf{L}^{-1} \rangle_A.$$

Из (8) и (9) видно, что нерассеянная компонента присутствует в прошедшем свете тогда и только тогда, когда  $\tilde{\mathbf{T}}$  не является нулевой матрицей. Одноточечный вектор Стокса этой компоненты может быть выражен как

$$\mathbf{S}_{\text{nonsc}}(\mathbf{r}_s) \approx \frac{k^2}{(2\pi r_0)^2} \cos^2 \xi \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{S}_{P-i} \times \int G(\mathbf{R}) \exp(-iks_{\perp} \mathbf{R}) d^2 \mathbf{R}.$$

Будем считать, что корреляции флуктуаций  $\tilde{\mathbf{T}}(\boldsymbol{\rho})$  являются существенными только при значениях  $\mathbf{R}$ , лежащих в пределах круга радиусом  $R_{\text{cor}}$  (радиус корреляции), и, следовательно, при любом  $\mathbf{R}$  с  $|\mathbf{R}| > R_{\text{cor}}$  отличием элементов  $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R})$  от нуля можно пренебречь. Сделанные предположения относительно свойств падающего пучка позволяют говорить о  $G(\mathbf{R})$  как о достаточно медленной функции в масштабе  $R_{\text{cor}}$ , чтобы предположить, что

$$G(\mathbf{R}) \approx G(\mathbf{0}) = 1 \quad (10)$$

для всех  $\mathbf{R}$  с  $|\mathbf{R}| < R_{\text{cor}}$ , где  $\mathbf{0} \equiv (0, 0)$ . Подставляя (9) в (8) и используя (10) при интегрировании, получаем следующую удобную оценку для одноточечного вектора Стокса рассеянной компоненты в дальней зоне:

$$\mathbf{S}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_s) \approx \frac{k^2}{(2\pi r_0)^2} \cos^2 \xi \left[ \int \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) \exp(-iks_{\perp} \mathbf{R}) d^2 \mathbf{R} \right] \mathbf{S}_{P-i}. \quad (11)$$

Это выражение возьмем в качестве основы в нашем анализе, рассматривая  $\mathbf{S}_{\text{sc}}(\mathbf{r}_s)$  как функцию от полярного угла рассеяния  $\xi$  и азимутального угла рассеяния  $\alpha$  (рис. 4).

### 3. Общий вид обобщенной матрицы Мюллера для статистически вращательно-инвариантных слоев

Сначала рассмотрим, как преобразуется функция  $\mathbf{M}_A(\mathbf{R})$  при азимутальном повороте фазового экрана вокруг оси  $z$  на произвольный угол  $\theta$ . Допустим, что до поворота экрана произвольно взятые радиусы-векторы  $\boldsymbol{\rho}_1$  и  $\boldsymbol{\rho}_2$  указывали на точки  $A_1$  и  $A_2$  экрана. Длину разностного вектора  $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2$  обозначим  $R$ , а угол, который составляет вектор  $\mathbf{R}$  с осью  $x$ , обозначим  $\beta$  (рис. 5, а). После поворота экрана эти же радиусы-векторы  $\boldsymbol{\rho}_1$  и  $\boldsymbol{\rho}_2$  будут указывать на точки  $B_1$  и  $B_2$  экрана, на которые до поворота указывали радиусы-векторы  $\boldsymbol{\rho}_{1B}$  и  $\boldsymbol{\rho}_{2B}$  (рис. 5). Вектор  $\mathbf{R}_B = \boldsymbol{\rho}_{1B} - \boldsymbol{\rho}_{2B}$  имеет длину  $R$  и составляет угол  $\beta - \theta$  с осью  $x$ . Элементарные фрагменты фазового экрана, соответствующие точкам  $B_1$  и  $B_2$ , также оказываются повернутыми на угол  $\theta$ . Отсюда следует соотношение

$$\mathbf{M}_{AR}(R, \beta) = \hat{\mathbf{R}}(-\theta) \mathbf{M}_{BR}(R, \beta - \theta) \hat{\mathbf{R}}(\theta), \quad (12)$$

где  $\mathbf{M}_{AR}$  и  $\mathbf{M}_{BR}$  — значения матрицы  $\mathbf{M}_A$  до и после поворота экрана (аргументы у  $\mathbf{M}_{AR}$  и  $\mathbf{M}_{BR}$  определяют

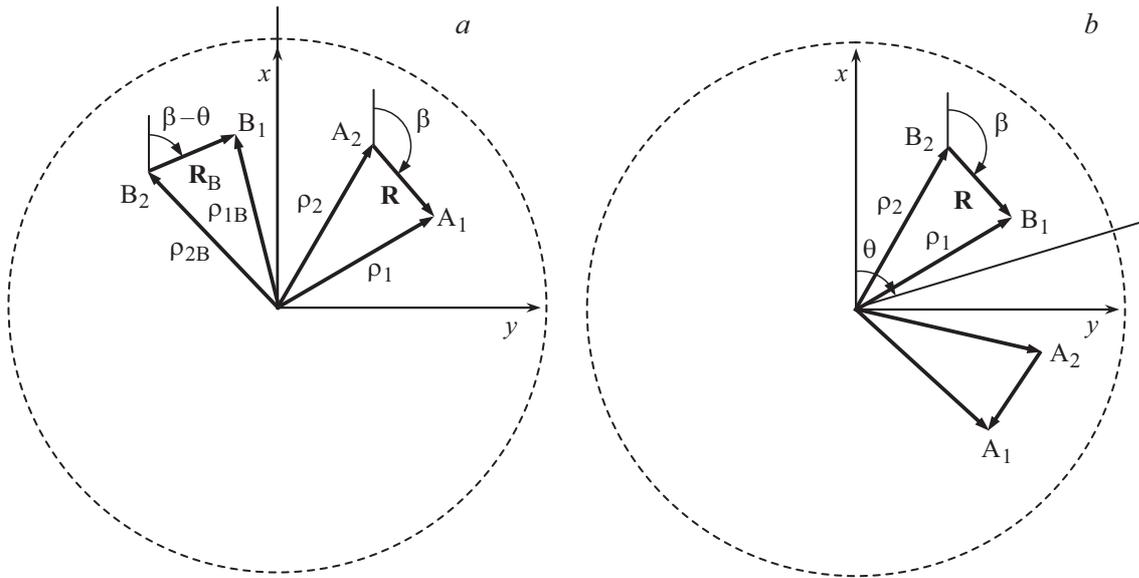


Рис. 5. К соотношению (12). Положение точек  $A_1, A_2, B_1, B_2$  на фазовом экране до (а) и после (б) поворота фазового экрана.

векторы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_B$ , а  $\hat{\mathbf{R}}(\theta)$  — матрица поворота вида

$$\hat{\mathbf{R}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если фазовый экран является статистически вращательно-инвариантным, то при любом значении угла поворота  $\theta$  должно выполняться равенство

$$\mathbf{M}_{AR}(R, \beta) = \mathbf{M}_{BR}(R, \beta). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что функция  $\mathbf{M}_A(R, \beta)$  в этом случае должна отвечать условию

$$\mathbf{M}_A(R, \beta' - \theta) = \hat{\mathbf{R}}(\theta)\mathbf{M}_A(R, \beta')\hat{\mathbf{R}}(-\theta) \quad (14)$$

при любых значениях  $\beta'$  и  $\theta$ . Поскольку зависимость элементов матрицы  $\mathbf{M}_A = [m_{ij}]$  от  $\beta$  должна быть периодической с периодом  $2\pi$ , каждый из этих элементов можно представить в виде ряда Фурье:

$$m_{ij}(R, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^{(ij)}(R) \cos l\beta + s_l^{(ij)}(R) \sin l\beta. \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), можно увидеть, что матрица  $\mathbf{M}_A(R, \beta)$  удовлетворяет условию (14) тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\mathbf{M}_A(R, \beta) = \mathbf{M}_R(R) + \mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta) + \mathbf{M}_{4\beta}(R, \beta), \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_R(R) = \begin{pmatrix} a_{11}(R) & 0 & 0 & a_{41}(R) \\ 0 & a_{22}(R) & a_{23}(R) & 0 \\ 0 & -a_{23}(R) & a_{22}(R) & 0 \\ a_{14}(R) & 0 & 0 & a_{44}(R) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}(R, \beta) & b_{13}(R, \beta) & 0 \\ b_{21}(R, \beta) & 0 & 0 & b_{24}(R, \beta) \\ b_{31}(R, \beta) & 0 & 0 & b_{34}(R, \beta) \\ 0 & b_{42}(R, \beta) & b_{43}(R, \beta) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{4\beta}(R, \beta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}(R, \beta) & b_{23}(R, \beta) & 0 \\ 0 & b_{23}(R, \beta) & -b_{22}(R, \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{12}(R, \beta) = s_D(R) \sin 2\beta + c_D(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{13}(R, \beta) = c_D(R) \sin 2\beta - s_D(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{21}(R, \beta) = s_P(R) \sin 2\beta + c_P(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{31}(R, \beta) = c_P(R) \sin 2\beta - s_P(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{24}(R, \beta) = s_V(R) \sin 2\beta + c_V(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{34}(R, \beta) = c_V(R) \sin 2\beta - s_V(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{42}(R, \beta) = s_H(R) \sin 2\beta + c_H(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{43}(R, \beta) = c_H(R) \sin 2\beta - s_H(R) \cos 2\beta,$$

$$b_{22}(R, \beta) = c_B(R) \cos 4\beta + s_B(R) \sin 4\beta,$$

$$b_{23}(R, \beta) = c_B(R) \sin 4\beta - s_B(R) \cos 4\beta,$$

где  $a_{11}, a_{14}, a_{22}, a_{23}, a_{41}, a_{44}, s_D, c_D, c_P, s_P, c_V, s_V, c_H, s_H, c_B$  и  $s_B$  не зависят от  $\beta$ . Выражение (16) определяет общий вид обобщенной матрицы Мюллера пропускающего статистически вращательно-инвариантного слоя.

#### 4. Угловая зависимость матрицы рассеяния

Перепишем выражение (11) следующим образом:

$$\mathbf{S}_{sc}(\xi, \alpha) = \mathbf{M}_{far}(\xi, \alpha) \mathbf{S}_{P-i},$$

где

$$\mathbf{M}_{far}(\xi, \alpha) = \frac{k^2}{2\pi r_0^2} \cos^2 \xi \left[ \int \tilde{\mathbf{M}}(R, \beta) \times \exp(-ik \sin \xi R \cos(\beta - \alpha)) R d\xi dR \right].$$

Исходя из последнего выражения найдем общую форму угловой зависимости матрицы рассеяния  $\mathbf{M}_{far}$  для вращательно-инвариантных экранов. Если матрица  $\mathbf{M}_A(R, \beta)$  имеет вид (16), матрица  $\tilde{\mathbf{M}}(R, \beta)$  также может быть представлена в форме (16). С учетом этого, воспользовавшись математическим свойством

$$\iint f(R) \begin{Bmatrix} \sin l\beta \\ \cos l\beta \end{Bmatrix} \exp(-ik \sin \xi R \cos(\beta - \alpha)) R d\xi dR = F(\xi) \begin{Bmatrix} \sin l\alpha \\ \cos l\alpha \end{Bmatrix}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где  $f(R)$  — произвольная функция от  $R$  и  $F(\xi)$  — функция только от  $\xi$  [24], находим, что функция  $\mathbf{M}_{far}(\xi, \alpha)$  в рассматриваемом случае может быть представлена в виде

$$\mathbf{M}_{far}(\xi, \alpha) = \mathbf{M}_\xi(\xi) + \mathbf{M}_{2\alpha}(\xi, \alpha) + \mathbf{M}_{4\alpha}(\xi, \alpha), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{M}_\xi(\xi) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(\xi) & 0 & 0 & \tilde{a}_{41}(\xi) \\ 0 & \tilde{a}_{22}(\xi) & \tilde{a}_{23}(\xi) & 0 \\ 0 & -\tilde{a}_{23}(\xi) & \tilde{a}_{22}(\xi) & 0 \\ \tilde{a}_{14}(\xi) & 0 & 0 & \tilde{a}_{44}(\xi) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{2\alpha}(\xi, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}_{DC}(\xi, \alpha) & \tilde{b}_{DS}(\xi, \alpha) & 0 \\ \tilde{b}_{PC}(\xi, \alpha) & 0 & 0 & \tilde{b}_{VC}(\xi, \alpha) \\ \tilde{b}_{PS}(\xi, \alpha) & 0 & 0 & \tilde{b}_{VS}(\xi, \alpha) \\ 0 & \tilde{b}_{HC}(\xi, \alpha) & \tilde{b}_{HS}(\xi, \alpha) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{4\alpha}(\xi, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{BC}(\xi, \alpha) & \tilde{b}_{BS}(\xi, \alpha) & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{BC}(\xi, \alpha) & \tilde{b}_{BS}(\xi, \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{DC}(\xi, \alpha) &= b_D(\xi) \cos(2\alpha - \gamma_D(\xi)), \\ \tilde{b}_{DS}(\xi, \alpha) &= b_D(\xi) \sin(2\alpha - \gamma_D(\xi)), \\ \tilde{b}_{PC}(\xi, \alpha) &= b_P(\xi) \cos(2\alpha - \gamma_P(\xi)), \\ \tilde{b}_{PS}(\xi, \alpha) &= b_P(\xi) \sin(2\alpha - \gamma_P(\xi)), \\ \tilde{b}_{HC}(\xi, \alpha) &= b_H(\xi) \cos(2\alpha - \gamma_H(\xi)), \end{aligned}$$

$$\tilde{b}_{HS}(\xi, \alpha) = b_H(\xi) \sin(2\alpha - \gamma_H(\xi)),$$

$$\tilde{b}_{BC} = b_B(\xi) \cos(4\alpha - \gamma_B(\xi)),$$

$$\tilde{b}_{BS}(\xi, \alpha) = b_B(\xi) \sin(4\alpha - \gamma_B(\xi)).$$

Выражение (17) определяет общие ограничения на вид функции  $\mathbf{M}_{far}(\xi, \alpha)$  для статистически вращательно-инвариантных слоев.

Из (17) следует, что в общем случае любая из картин рассеяния,  $H_v$  или  $V_v$ , для статистически вращательно-инвариантных фазовых экранов в среднем представляет собой наложение трех картин рассеяния: инвариантной относительно азимутального поворота на  $180^\circ$  (определяемой функцией  $\mathbf{M}_{2\alpha}(\xi, \alpha)$ ), инвариантной относительно азимутального поворота на  $90^\circ$  ( $\mathbf{M}_{4\alpha}(\xi, \alpha)$ ) и обладающей круговой симметрией ( $\mathbf{M}_\xi(\xi, \alpha)$ ). Аналогичный вывод о симметрии картин рассеяния был сделан в работе [11] в результате анализа, опирающегося на приближение Релея-Ганса-Дебая. Функции  $\mathbf{M}_{2\alpha}(\xi, \alpha)$  и  $\mathbf{M}_{4\alpha}(\xi, \alpha)$ , отвечающие за картины рассеяния, не обладающие круговой симметрией, имеют ненулевые значения, если имеют ненулевые значения функции  $\mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta)$  и  $\mathbf{M}_{4\beta}(R, \beta)$  соответственно. Таким образом, картина рассеяния будет обладать круговой симметрией, если функции  $\mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta)$  и  $\mathbf{M}_{4\beta}(R, \beta)$  не имеют ненулевых значений. Если функция  $\mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta)$  не имеет ненулевых значений, а функция  $\mathbf{M}_{4\beta}(R, \beta)$  имеет ненулевые значения, то картина рассеяния будет инвариантной относительно азимутального поворота на  $90^\circ$ , но не будет обладать круговой симметрией. Если функция  $\mathbf{M}_{2\beta}(R, \beta)$  имеет ненулевые значения, то картина рассеяния будет инвариантной только относительно азимутального поворота на  $180^\circ$ . Отметим также, что, согласно (17), в случае падения циркулярно поляризованного света при отсутствии поляризационно-селективных элементов или наличии циркулярного поляризатора за экраном картина рассеяния будет всегда обладать круговой симметрией.

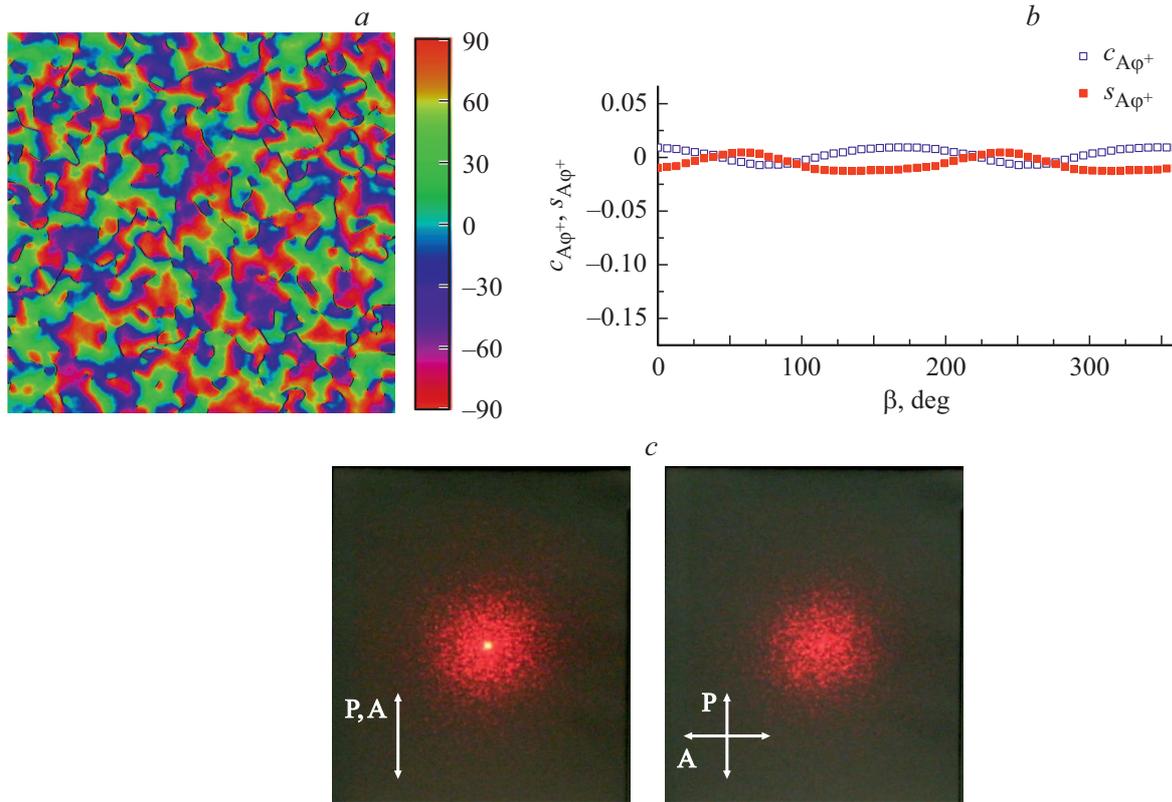
#### 5. Симметрия картин рассеяния и статистические структурные свойства SMB-слоев

Найдем общий вид матрицы  $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R})$  для статистически вращательно-инвариантных непоглощающих SMB-слоев (1). В приближении прямых лучей матрицы  $\tilde{\mathbf{T}}$  и  $\tilde{\mathbf{T}}(\rho)$  для такого SMB-слоя могут быть выражены [18] в виде

$$\tilde{\mathbf{T}} = K \cos \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\rho) = iK \sin \delta \begin{pmatrix} \cos 2\varphi(\rho) & \sin 2\varphi(\rho) \\ \sin 2\varphi(\rho) & -\cos 2\varphi(\rho) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где  $\delta = \pi \Delta n d / \lambda$ ,  $K$  — скалярный комплексный коэффициент, учитывающий поляризационно-независимые потери и средний фазовый сдвиг. Согласно (4), (9) и



**Рис. 6.** Экспериментальные данные для образца нематического ЖК-слоя с мелкодоменной шпирен-текстурой. (а) Пространственное распределение угла  $\varphi$  для одной из областей образца. Здесь (и далее на аналогичных картах) ось  $x$  направлена вправо, положительное направление отсчета угла  $\varphi$  — по часовой стрелке. Ширина области  $500\ \mu\text{m}$ . Черным обозначены исключенные области вблизи дисклинаций и спейсеров. (б) Рассчитанные значения  $c_{A\varphi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\varphi+}(R, \beta)$  при  $R = 10\ \mu\text{m}$ . (с) Экспериментальные картины рассеяния  $V_v$  и  $H_v$ . Ширина поля в угловой мере составляет около  $12^\circ$ .

(18), функция  $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R})$  такого слоя может быть выражена следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{R}) = K^2 \times \sin^2 \delta \begin{pmatrix} c_{A\varphi-}(\mathbf{R}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{A\varphi+}(\mathbf{R}) & s_{A\varphi+}(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & s_{A\varphi+}(\mathbf{R}) & -c_{A\varphi+}(\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{A\varphi-}(\mathbf{R}) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где  $c_{A\varphi-}(\mathbf{R})$ ,  $c_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  и  $s_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  — корреляционные характеристики поля  $\varphi(\boldsymbol{\rho})$ :

$$c_{A\varphi-}(\mathbf{R}) = \left\langle \cos 2 \left[ \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mathbf{R}}{2} \right) - \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) \right] \right\rangle_A,$$

$$c_{A\varphi+}(\mathbf{R}) = \left\langle \cos 2 \left[ \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mathbf{R}}{2} \right) + \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) \right] \right\rangle_A,$$

$$s_{A\varphi+}(\mathbf{R}) = \left\langle \sin 2 \left[ \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mathbf{R}}{2} \right) + \varphi \left( \boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\mathbf{R}}{2} \right) \right] \right\rangle_A.$$

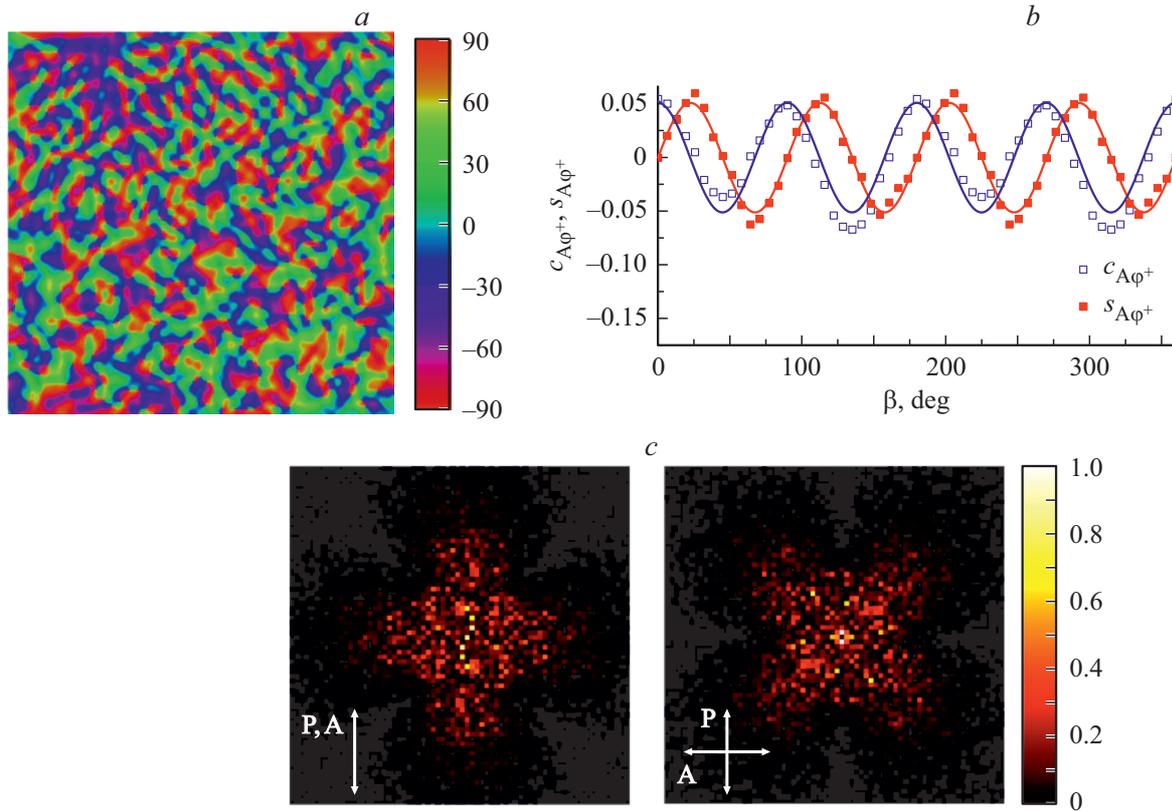
Сравнение (19) и (16) показывает, что статистическая вращательная инвариантность слоя предполагает следу-

ющую форму этих функций:

$$c_{A\varphi-}(\mathbf{R}) = a(R), \quad c_{A\varphi+}(\mathbf{R}) = c(R) \cos 4(\beta - \chi(R)),$$

$$s_{A\varphi+}(\mathbf{R}) = c(R) \sin 4(\beta - \chi(R)), \tag{20}$$

т.е. значение  $c_{A\varphi-}$  не зависит от направления вектора  $\mathbf{R}$ , а  $c_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  и  $s_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  являются периодическими функциями от угла направления этого вектора  $\beta$  с периодом  $\pi/2$ . Из (16)–(20) видно, что величина  $\delta$  определяет распределение спектральной плотности мощности прошедшего поля между рассеянной и нерассеянной компонентой. Если  $\delta = l\pi$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ), то в прошедшем свете будет присутствовать только нерассеянная компонента, а если  $\delta = \pi/2 + l\pi$ , то в прошедшем свете будет присутствовать только рассеянная компонента. Симметрия картин рассеяния и их угловые размеры не зависят от значения  $\delta$  и зависят только от вида функций  $c_{A\varphi-}(\mathbf{R})$ ,  $c_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  и  $s_{A\varphi+}(\mathbf{R})$ . Если значения функций  $c_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  и  $s_{A\varphi+}(\mathbf{R})$  при всех  $\mathbf{R}$  равны нулю,  $H_v$ - и  $V_v$ -дифрактограммы должны обладать круговой симметрией. В противном случае они не будут обладать круговой симметрией, но будут инвариантными относительно поворота на  $90^\circ$ . Если  $\chi$  не зависит от  $R$ , картины рассеяния  $H_v$  и  $V_v$  имеют вид четырехлистника, причем



**Рис. 7.** Результаты численного моделирования для SMB-слоя с  $\chi \approx 0^\circ$ . (a) Пространственное распределение угла  $\varphi(x, y)$ , ширина поля  $300 \mu\text{m}$ . (b) Значения функций  $c_{A\varphi^+}(R, \beta)$  и  $s_{A\varphi^+}(R, \beta)$  при  $R = 10 \mu\text{m}$ , точками показаны рассчитанные значения функций, а сплошными линиями — соответствующие аппроксимационные кривые вида (20). (c) Рассчитанные картины рассеяния  $V_v$  и  $H_v$  при  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ , ширина поля в угловой мере составляет  $8.5^\circ$ .

угол между плоскостью поляризации падающего света и направлением двух из четырех лепестков четырехлистника рассеяния составляет  $\chi$  на  $V_v$ -дифрактограмме и  $\chi + 45^\circ$  на  $H_v$ -дифрактограмме. Так, например, если  $\chi = 0^\circ$  при всех  $R$ , будет наблюдаться  $H_v$ -дифрактограмма  $\times$ -типа (четырехлистник рассеяния повернут на  $45^\circ$  по отношению к плоскости поляризации падающего света, рис. 3, b), а если при всех  $R$   $\chi = \pm 45^\circ$ , то  $H_v$ -дифрактограмма будет иметь  $+$ -форму (направления лепестков четырехлистника совпадают с направлениями осей пропускания поляризатора и анализатора, рис. 3, c). В этих двух случаях и  $H_v$ - и  $V_v$ -дифрактограммы будут симметричными относительно плоскости поляризации падающего света. В большинстве других случаев ни одна из плоскостей симметрии картин рассеяния  $H_v$  и  $V_v$  не будет параллельна плоскости поляризации падающего света, а если  $\chi$  изменяется с изменением  $R$ , плоскостей симметрии у картин рассеяния  $H_v$  и  $V_v$  может не быть вообще.

### 6. Экспериментальный пример

В настоящем разделе в качестве иллюстрации мы представляем данные структурного исследования

слоя низкомолекулярного нематического ЖК с мелкодоменной шпирен-текстурой, дающего  $H_v$ - и  $V_v$ -дифрактограммы, обладающие круговой симметрией. ЖК-ячейка была собрана из промышленных стеклянных пластин с ITO-покрытием (Merck). Случайная планарная ориентация ЖК обеспечивалась ненагертыми полиимидными слоями (полиимид PIA 3744, Chisso LIXON aligner). Полиимидные слои наносились на поверхность ITO-слоев методом центрифугирования. После нанесения полиимидные слои не подвергались какой-либо обработке, способной привести к появлению предпочтительного направления ориентации ЖК на поверхности полимера в макроскопическом масштабе. Толщина ЖК-слоя  $d$  составляла приблизительно  $5 \mu\text{m}$ . Она задавалась цилиндрическими стеклянными спейсерами, рассеянными между стеклянными пластинами. Ячейка была заполнена капиллярно нематическим ЖК-материалом E7 (Merck) в изотропной фазе. Заполнение в изотропной фазе предотвращало ориентацию потоком [25,26] и давало требуемую мелкодоменную структуру ЖК-слоя. Разность главных показателей преломления нематика E7 при комнатной температуре — а оптические измерения осуществлялись при комнатной температуре ( $22\text{--}24^\circ\text{C}$ ) — составляет около 0.22 для  $\lambda = 632.8 \text{ nm}$ . Структурные характеристики ЖК-слоя были определе-

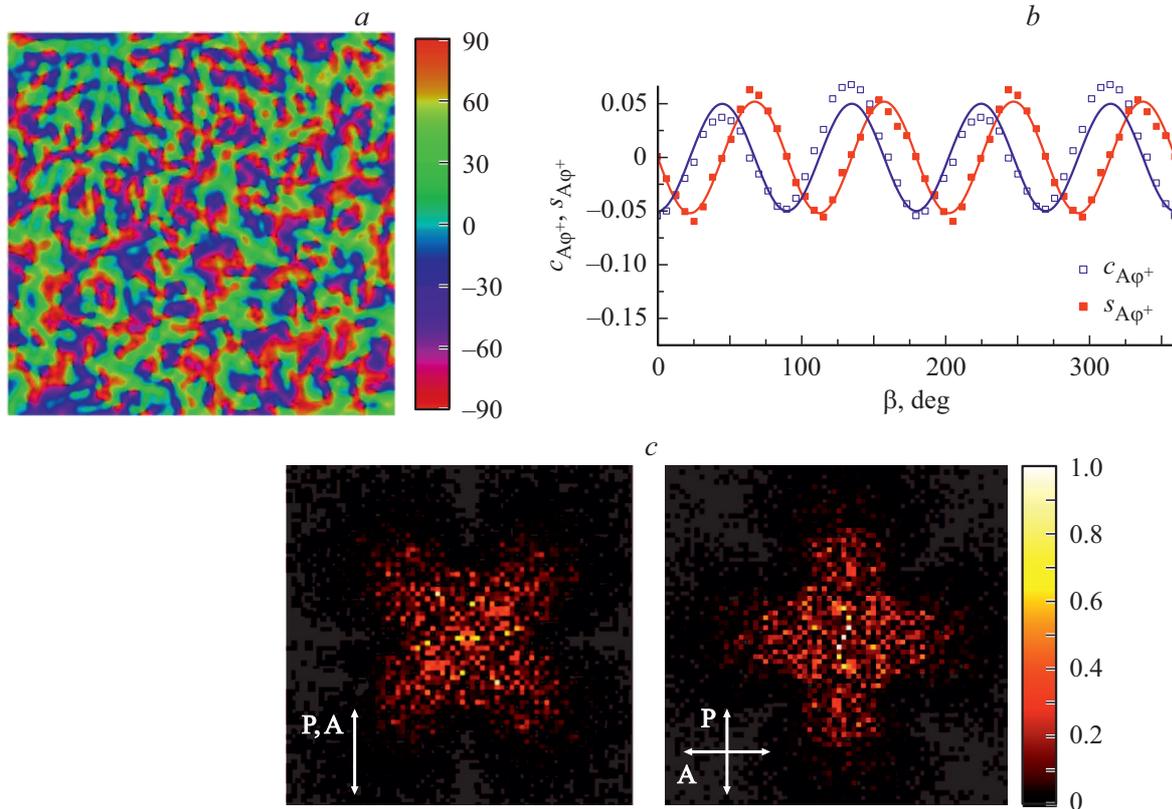


Рис. 8. Результаты численного моделирования для SMB-слоя с  $\chi \approx -45^\circ$ . Масштабы такие же, как на рис. 7. (b)  $R = 10 \mu\text{m}$ .

ны с помощью микроскопического поляризационного картографирования. Используемые нами метод и аппаратура микроскопического поляризационного картографирования описаны в [27]. Картографирование показало, что распределение локальной оптической оси (ЖК-директора) в ЖК-слое хорошо соответствует (1): подавляющую часть объема слоя занимают области, локальная оптическая ось в пределах которых лежит почти параллельно границам слоя, а угол закрученности структуры  $\Phi$  (угол азимутального поворота локальной оптической оси при движении в направлении  $z$  от фронтальной границы к задней) в среднем по площади слоя с большой точностью равен  $0^\circ$ , среднее квадратичное значение  $\Phi$  составляет около  $9^\circ$ . На рис. 6, *a* показана полученная карта угла азимутальной ориентации локальной оптической оси в центральной плоскости слоя для участка размером приблизительно  $500 \times 500 \mu\text{m}$ , этот угол был взят в качестве угла  $\varphi$ . Области в непосредственной близости от дисклинаций и спейсеров, в которых наблюдались наибольшие отклонения структуры ЖК-слоя от формы (1), при обработке карт  $\varphi(x, y)$  исключались из рассмотрения. Анализ таких карт для нескольких произвольно взятых участков слоя показал, что масштаб гомогенизации  $R_{\text{hom}}$  для данного слоя составляет порядка  $200 \mu\text{m}$ , поэтому размеры участка, показанного на рис. 6, *a*, являются достаточно большими, чтобы с хорошей точностью оценить зна-

чения функций  $c_{A\varphi-}(R, \beta)$ ,  $c_{A\varphi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\varphi+}(R, \beta)$ , рассчитывая их путем усреднения по площади этого участка. Значения рассчитанных таким образом функций  $c_{A\varphi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\varphi+}(R, \beta)$  оказались по абсолютной величине меньше 0.015 при всех  $R$  и  $\beta$  (рис. 6, *b*). Вариация  $c_{A\varphi-}(R, \beta)$  с  $\beta$  при любом фиксированном  $R$  была малой (например, при  $R = 10 \mu\text{m}$  значения  $c_{A\varphi-}(R, \beta)$  варьировались в пределах от 0.38 до 0.42). Таким образом, структура ЖК-слоя приближенно отвечает условиям (20), при этом  $c(R) \approx 0$  при всех  $R$ . Согласно выводам разд. 5, последнее должно приводить к круговой симметрии картин рассеяния  $H_v$  и  $V_v$ .

Экспериментальные  $H_v$ - и  $V_v$ -дифрактограммы для этого образца показаны рис. 6, *c*. В качестве источника излучения использовался гелий-неоновый лазер с длиной волны 632.8 nm. Диаметр освещаемой области на ЖК-слое составлял порядка 1 mm. Для задания состояния поляризации падающего пучка и выделения рассматриваемой линейно поляризованной компоненты прошедшего света использовались пленочные поляризаторы. Как видно из рис. 6, *c*, экспериментальные картины рассеяния  $H_v$  и  $V_v$  для данного образца действительно обладают круговой симметрией (если пренебречь мелкомасштабной модуляцией, которая в нашем теоретическом рассмотрении „сглаживается“ за счет использования приближения (7)). Аналогичная форма

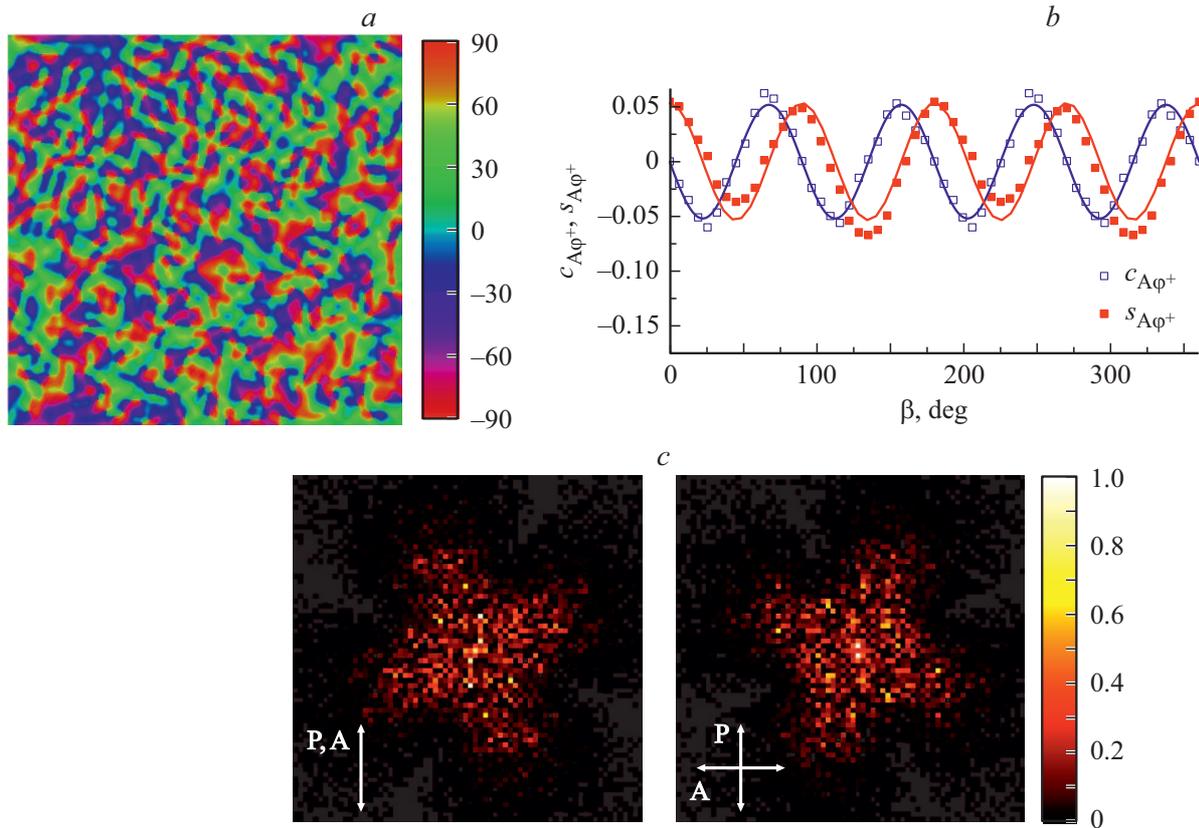


Рис. 9. Результаты численного моделирования для SMB-слоя с  $\chi \approx -22.5^\circ$ . Масштабы такие же, как на рис. 7. (b)  $R = 10 \mu\text{m}$ .

дифрактограмм наблюдалась и для изготовленной аналогичным образом ячейки с меньшей толщиной ЖК-слоя ( $d \approx 3 \mu\text{m}$ ). Для этой ячейки значения  $c_{A\phi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\phi+}(R, \beta)$  также были близки к нулю при всех  $R$  и  $\beta$ , а значения  $c_{A\phi-}(R, \beta)$  практически не изменялись с изменением  $\beta$  при любом фиксированном  $R$ .

### 7. Численные примеры

На рис. 7–9 представлены три численных примера, которые подтверждают справедливость выводов разд. 5 относительно слоев, дающих картины рассеяния без круговой симметрии. Показаны картины дифракции плоской волны на прямоугольном отверстии площадью  $300 \times 300 \mu\text{m}^2$ , затянутом SMB-экраном. Реализации функции  $\varphi(x, y)$  с различными корреляционными свойствами были сгенерированы численно. Во всех трех случаях

$$a(R) \approx \exp(-R^2/R_{\text{cor}}^2), \quad c(R) \approx CR^2 \exp(-R^2/R_x^2)$$

(см.(20)) при  $R_{\text{cor}} = 6 \mu\text{m}$ ,  $R_x = 10 \mu\text{m}$  и  $C = 3.4 \cdot 10^{-3}$ , а

$$\left| c_{A\phi-}(R, \beta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{A\phi-}(R, \beta') d\beta' \right| < 0.05$$

для всех  $R$  и  $\beta$ .  $c_{A\phi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\phi+}(R, \beta)$  равны нулю при  $R = 0$ , имеют максимальные по абсолютной величине значения при  $R \approx 10 \mu\text{m}$  и стремятся к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . В примере, показанном на рис. 7, функция  $\varphi(x, y)$  — обозначим ее  $\varphi_1(x, y)$  — такова, что для нее  $\chi$  при всех  $R$  близко к нулю (отклоняется от нуля не более чем на  $0.2^\circ$ ). Функции  $\varphi(x, y)$ , взятые в остальных двух примерах, рассчитывались по формуле  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_0$  с  $\varphi_0 = 45^\circ$  в примере на рис. 8 и  $\varphi_0 = 22.5^\circ$  в примере на рис. 9. При замене  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y)$  на  $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_0$  функции  $a(R)$  и  $c(R)$  не изменяются (20), а значение  $\chi$  уменьшается на  $\varphi_0$ . Таким образом, в примерах, показанных на рис. 8 и 9, при всех  $R$   $\chi \approx -45^\circ$  и  $\chi \approx -22.5^\circ$  соответственно. На рис. 7, b–9, b показаны значения  $c_{A\phi+}(R, \beta)$  и  $s_{A\phi+}(R, \beta)$  при  $R = 10 \mu\text{m}$  и разных значениях  $\beta$ , а также аппроксимирующие кривые вида  $A \cos(4\beta + \phi)$  и  $A \sin(4\beta + \phi)$  (20). Указанный выбор функций  $\varphi(x, y)$  был обусловлен желанием убедиться, что при ненулевом  $\chi$ , не зависящем от  $R$ , четырехлистники рассеяния действительно будут повернутыми относительно плоскости поляризации падающего света на угол  $\chi$  на  $V_v$ -дифрактограмме и на угол  $\chi + 45^\circ$  на  $H_v$ -дифрактограмме.

Угловые распределения интенсивности на картинах рассеяния  $V_v$  и  $H_v$ ,  $I_v(\xi, \alpha)$  и  $I_H(\xi, \alpha)$ , рассчитывались в

приближении Фраунгофера при  $\delta = \pi/2$  (18) по формулам

$$I_V(\xi, \alpha) = K_1 I_{\text{inc}} \left| \iint \cos 2\varphi(x, y) \times \exp(-ik \sin \xi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)) dx dy \right|^2,$$

$$I_H(\xi, \alpha) = K_1 I_{\text{inc}} \left| \iint \sin 2\varphi(x, y) \times \exp(-ik \sin \xi (x \cos \alpha + y \sin \alpha)) dx dy \right|^2,$$

где  $K_1 = |K|^2 k^2 \cos^2 \xi / (2\pi r_0)^2$ ,  $I_{\text{inc}}$  — интенсивность падающей волны. Для удобства сравнения на рисунках показаны значения  $I_V(\xi, \alpha)/I_{\text{max}}$  и  $I_H(\xi, \alpha)/I_{\text{max}}$ , где  $I_{\text{max}}$  — наибольшее из максимальных значений функций  $I_V(\xi, \alpha)$  и  $I_H(\xi, \alpha)$ . Рассчитанные картины рассеяния показаны на рис. 7, с–9, с. Как видно из рис. 7, с, в случае  $\chi \approx 0^\circ$  на  $V_V$ -дифрактограмме два лепестка четырехлистника рассеяния ориентированы параллельно плоскости поляризации падающего света и два — перпендикулярно ей (дифрактограмма +-типа), тогда как на  $H_V$ -дифрактограмме четырехлистник повернут на  $45^\circ$  относительно направления поляризации падающего света (дифрактограмма  $\times$ -типа). В случае  $\chi \approx -45^\circ$  (рис. 8, с), наоборот,  $H_V$ -дифрактограмма имеет +-форму, а  $V_V$ -дифрактограмма —  $\times$ -форму, т.е. можно говорить о повороте четырехлистников рассеяния на  $\pm 45^\circ$  относительно их положения в предыдущем случае. На рис. 9, с ( $\chi \approx -22.5^\circ$ ) четырехлистники рассеяния на дифрактограммах  $V_V$  и  $H_V$  повернуты относительно направления поляризации падающего света приблизительно на  $-22.5^\circ$  и  $22.5^\circ$  соответственно. Все это полностью согласуется с выводами разд. 5 о зависимости ориентации четырехлепестковых картин рассеяния от величины  $\chi$ .

## 8. Заключение

Таким образом, показано, что средняя обобщенная матрица Мюллера  $\mathbf{M}_A(\mathbf{R})$  квазиэквидоменных слоев должна иметь вид (16), и выявлены связанные с этим ограничения на вид картин рассеяния для таких слоев. Установлена форма функции  $\mathbf{M}_A(\mathbf{R})$ , при которой картины рассеяния  $H_V$  и  $V_V$  обладают круговой симметрией, а также форма, при которой эти картины рассеяния являются инвариантными относительно азимутального поворота на  $90^\circ$ . Для мозаичных двулучепреломляющих слоев, состоящих из однородных фрагментов с разной азимутальной ориентацией оптической оси, найдены статистические структурные свойства слоев, при которых картины рассеяния  $H_V$  и  $V_V$  будут обладать круговой симметрией, а также статистическая структурная характеристика, ответственная за ориентацию четырехлистников рассеяния относительно направления поляризации

падающего света на  $H_V$ - и  $V_V$ -дифрактограммах. Приведены экспериментальные данные и результаты численного моделирования, подтверждающие справедливость сделанных теоретических заключений.

Авторы благодарны А. А. Муравскому (ГНУ „Институт химии новых материалов НАН Беларуси“, Республика Беларусь, Минск) за подготовку образцов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта № 18-52-16025/18 и Минобрнауки РФ в рамках проекта № 3.1586.2017/4.6.

## Список литературы

- [1] Валков А.Ю., Романов В.П., Шалагинов А.Н. // УФН. 1994. Т. 164. № 2. С. 149. doi 10.3367/UFNr.0164.199402b.0149; Val'kov A.Yu., Romanov V.P., Shalaginov A.N. // Phys. Usp. 1994. V. 37. N 2. P. 139. doi 10.1070/PU1994v037n02ABEH000007
- [2] Fakirov S. Oriented Polymer Materials. Weinheim: Wiley VCH, 2002. 512 p.
- [3] Hashimoto T., Nakai A., Shiwaku T., Hasegawa T., Rojstaczer S., Stein R.S. // Macromolecules. 1989. V. 22. N 1. P. 422. doi 10.1021/ma00191a077
- [4] Silvestri R., Chapoy L.L. // Polymer. 1992. V. 33. N 14. P. 2891. doi 10.1016/0032-3861(92)90073-6.
- [5] Ханчич О.А. Анизотропные структуры в полимерах и их изучение методом малоуглового рассеяния поляризованного света. М.: Издательство МТИ, 2014. 124 с.
- [6] De Gennes P.G. The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Clarendon, 1974. 596 p. Перевод: Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М: Мир, 1977. 400 с.
- [7] Fridrikh S.V., Terentjev E.M. // Phys. Rev. E. 1999. V. 60 N 2. P. 1847. doi 1103/PhysRevE.60.1847
- [8] Keijzers A.E.M., Van Aartsen J.J., Prins W. // J. Am. Chem. Soc. 1968. V. 90. N 12. P. 3107. doi 10.1021/ja01014a024
- [9] Meeten G.H., Navard P. // J. Polym. Sci. B. 1988. V. 26. N 2. P. 413. doi 10.1002/polb.1988.090260214
- [10] Romo-Uribe A., Alvarado-Tenorio B., Romero-Guzmán M.E. // Rev. Latinoam. Metal. Mater. 2010. V. 30. N 1. P. 190.
- [11] Stein R.S., Erhardt P.F., Clough S.B., Adams C. // J. Appl. Phys. 1966. V. 37. N 11. P. 3980. doi 10.1063/1.1707965
- [12] Rojstaczer S., Stein R.S. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. Inc. Nonlin. Opt. 1988. V. 157. N 1. P. 293. doi 10.1080/00268948808080238
- [13] Clough S., Rhodes M.B., Stein R.S. // J. Polym. Sci., Polym. Symp. 1967. V. 18. N 1. P. 1.
- [14] Shirai T., Wolf E. // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21. N 10. P. 1907. doi 10.1364/JOSAA.21.001907
- [15] Savenkov S.N., Grygoruk V.I., Muttiyah R.S., Yushtin K.E., Oberemok Y., Yakubchak V.V. // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2009. V. 110. N 1. P. 30. doi 10.1016/j.jqsrt.2008.09.002
- [16] Nikolova L., Ramanujam P.S. Polarization Holography. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 239 p.
- [17] Yakovlev D.A., Chigrinov V.G., Kwok H.-S. Modeling and Optimization of LCD Optical Performance. Chichester: Wiley, 2015. 554 p.

- [18] Шерман М.М., Яковлев Д.А. // Опт. и спектр. 2010. Т. 109. № 2. С. 206. *Sherman M.M., Yakovlev D.A. // Opt. Spectrosc.* 2010. V. 109. N 2. P. 178. doi 10.1134/S0030400X10080059
- [19] Korotkova O., Wolf E. // *J. Mod. Opt.* 2005. V. 52. N 18. P. 2659. doi 10.1080/09500340500334038
- [20] Wolf E. // *Phys. Lett. A.* 2003. V. 312. N 5. P. 263. doi 10.1016/S0375-9601(03)00684-4
- [21] Korotkova O., Wolf E. // *Opt. Lett.* 2005. V. 30. N 2. P. 198. doi 10.1364/OL.30.000198
- [22] Korotkova O. // *J. Opt. A.* 2008. V. 10. N 2. P. 025003-1. doi 10.1088/1464-4258/10/2/025003
- [23] Korotkova O., Hoover B.G., Gamiz V.L., Wolf E. // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2005. V. 22. N 11. P. 2547. doi 10.1364/JOSAA.22.002547
- [24] Cornacchio J.V., Soni R.P. // *J. Res. Natl. Bur. Stand. B.* 1965. V. 69. N 3. P. 173.
- [25] Yokoyama H., Kobayashi S., Kamei H. // *J. Appl. Phys.* 1984. V. 56. N 10. P. 2645. doi 10.1063/1.333796
- [26] Mi X.-D., Yang D.-K. // *Phys. Rev. E.* 1988. V. 58. N 2. P. 1992. doi 10.1103/PhysRevE.58.1992
- [27] Yakovlev D.D., Shvachkina M.E., Sherman M.M., Spivak A.V., Pravdin A.B., Yakovlev D.A. // *J. Biomed. Opt.* 2016. V. 21. N 7. P. 071111-1. doi 10.1117/1.JBO.21.7.071111