01.3

Мультистабильность и сложные колебательные режимы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки

М.И. Балакин[1], *Н.М. Рыскин*[2,3]

[1] Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А, Саратов, Россия
[2] Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия
[3] Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: balakinmaxim@gmail.com

Поступило в Редакцию 8 октября 2018 г.
В окончательной редакции 8 октября 2018 г.
Принято к публикации 25 декабря 2018 г.

Проведено исследование особенностей формирования мультистабильности в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки. Определены характерные сценарии рождения и эволюции мультистабильных состояний. Выявлено влияние неизохронности на сценарии перехода к хаосу.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.06.47497.17551

Нелинейная динамика систем с запаздыванием в настоящее время является предметом активных исследований, поскольку подобные системы играют большую роль во многих областях науки и техники: радиофизике, механике, кибернетике, нелинейной оптике, биологии, медицине, экономике (см., например, [1,2]). В частности, в последнее время привлекла внимание задача о воздействии запаздывающего сигнала, отраженного от удаленной нагрузки, на динамику различных микроволновых электронных генераторов, в том числе гиротронов [3–5]. Как известно, наличие запаздывания приводит к появлению нескольких устойчивых стационарных состояний, т. е. к мультистабильности и гистерезису [6]. Эффекты мультистабильности могут носить паразитный характер, приводя к скачкообразным переключениям между режимами генерации на различных модах при флуктуациях управляющих параметров. С другой стороны, наличие мультистабильности можно использовать, например, для кодирования и передачи информации [7]. Отражения также могут приводить к появлению автомодуляционных и хаотических режимов генерации [8].

Типичным примером автоколебательной системы с запаздыванием является генератор ван дер Поля–Дуффинга с отражением от удаленной нагрузки

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\alpha - x^2\right)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x + \gamma x^3 = \omega_0^2 k x(t-\tau), \qquad (1)$$

который может служить простейшей моделью доплеровского автодина [9]. В уравнении (1) x — динамическая переменная, α — управляющий параметр, характеризующий превышение порога генерации, ω_0 — собственная частота малых колебаний, γ — параметр неизохронности, k — коэффициент отражения, τ — время запаздывания. В [9] показано, что при увеличении параметров k и τ режим периодических автоколебаний теряет устойчивость и возникают квазипериодические колебания, а затем каскад бифуркаций удвоения тора, завершающийся возникновением хаоса. Однако представляется, что наличие мультистабильности должно существенно повлиять на картину сложных колебательных режимов. В настоящей работе выявлены бифуркационные механизмы формирования мультистабильности в генераторе с запаздывающим отражением, что важно с точки зрения управления переходами между сосуществующими колебательными модами и подавления нежелательных колебаний.

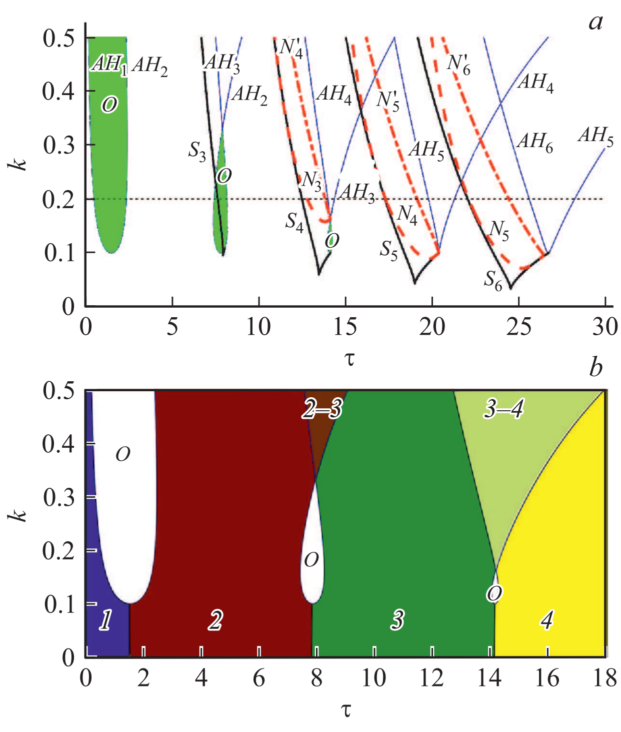

Рис. 1. *a* — бифуркационная диаграмма на плоскости параметров $\tau - k$; *b* — общая структура зон генерации: *O* — область устойчивости состояния равновесия в начале координат, *2–3* и *3–4* — перекрытие зон генерации различных мод (области мультистабильности).

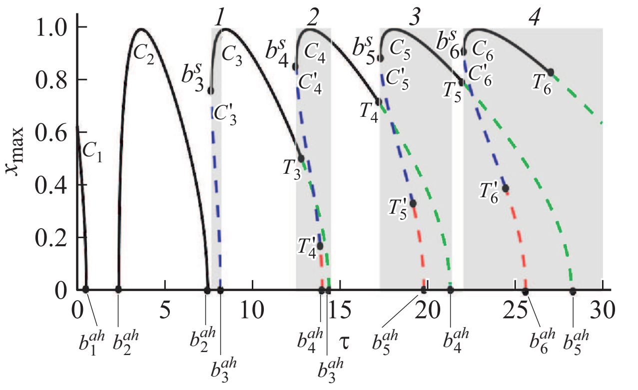

Рис. 2. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма в зависимости от запаздывания τ. $k = 0.2$.

На рис. 1, *a* приведена структура плоскости параметров $\tau - k$, построенная с помощью пакета бифуркационного анализа DDE-BIFTOOL [10]. Значения остальных параметров следующие: $\alpha = 0.1$, $\omega_0 = 1.0$, $\gamma = 1.0$. При этом в генераторе без отражений реализуется режим квазигармонических автоколебаний. В целом всю диаграмму можно разделить на отдельные листы, соответствующие режимам генерации различных собственных мод (рис. 1, *b*). Границы этих листов формируются отрезками линий бифуркации Андронова–Хопфа AH_n и касательных бифуркаций S_n (здесь $n = 1, 2, \ldots,$ моды пронумерованы в соответствии с рис. 1, *b*). При пересечении линий AH_n происходит рождение предельного цикла из состояния равновесия в начале координат, а при пересечении линий S_n — рождение устойчивого и неустойчивого предельных циклов из сгущения фазовых траекторий. Таким образом, если увеличивать коэффициент отражения, при пересечении какой-либо из данных линий происходит возбуждение периодических колебаний на соответствующей собственной моде. В области перекрытия листов, соответствующих различным модам, наблюдаются мультистабильность и формирование сложных колебательных режимов. Области устойчивости неподвижной точки обозначены символом O.

Таким образом, внутри каждого из листов существует устойчивый предельный цикл, претерпевающий различные бифуркации при вариации управляющих параметров. При увеличении коэффициента отражения он теряет устойчивость и наблюдается возбуждение квазипериодических колебаний в результате суперкритической бифуркации Неймарка–Сакера (штриховые линии N_n). Штрихпунктирными линиями N'_n отмечены субкритические бифуркации Неймарка–Сакера неустойчивых циклов.

Более подробно эту картину иллюстрирует представленная на рис. 2 бифуркационная диаграмма, на которой отложены максимумы переменной x в зависимости от τ при $k = 0.2$ (вдоль горизонтальной пунктирной линии на рис. 1, *a*). Сплошными линиями показаны устойчивые режимы, штриховыми — неустойчивые. Точки b^s_n соответствуют пересечениям линий касательной бифуркации S_n. Видно, что при этом рождается пара предельных циклов: устойчивый C_n и неустойчивый C'_n. Точки b^{ah}_n отвечают пересечениям линий суб- или суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа AH_n, при этом происходит рождение циклов из неподвижной точки. Точки T_n (T'_n) соответствуют бифуркациям рождения устойчивого (неустойчивого) тора из устойчивого (неустойчивого) цикла. Мультистабильность имеет место в областях, отмеченных серым на рис. 2, причем наблюдается сосуществование устойчивой неподвижной точки и предельного цикла (область *1*), двух устойчивых предельных циклов (область *2*), устойчивого предельного цикла и устойчивого тора (области *2–4*), двух устойчивых торов (область *4*). Таким образом, обнаруженная картина поведения оказывается значительно более сложной, чем представлялось ранее [9].

При увеличении коэффициента отражения будет наблюдаться мультистабильность квазипериодических и хаотических режимов, соответствующих различным собственным модам. Более того, как показало численное моделирование, переходы к хаосу могут происходить по различным сценариям. Наряду с описанным в [9] переходом через последовательность удвоений торов наблюдается сценарий разрушения квазипериодического движения Рюэля–Такенса. То, какой именно из двух сценариев реализуется, зависит от параметра неизохронности γ. На рис. 3 построены границы рождения квазипериодических колебаний и перехода к хаосу на плоскости параметров $\gamma - k$ при $\tau = 20$. Удвоения двухчастотных торов наблюдаются только при достаточно больших γ (кружки на рис. 3), тогда как при меньших γ происходит рождение трехчастотного тора и его последующее разрушение (квадраты на рис. 3).

Отметим, что пороговые значения растут при уменьшении неизохронности. Более того, при $\gamma < 1.2$ граница перехода к хаосу сдвигается в область $k > 1$, рассматривать которую не имеет смысла, поскольку k представляет собой коэффициент отражения. Это может быть причиной того, что в работах [4–6] хаотические режимы не наблюдались.

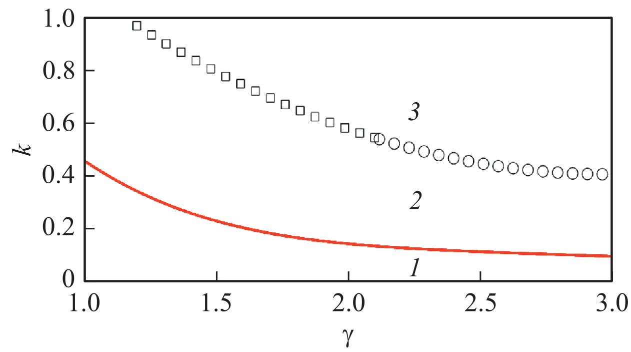

Рис. 3. Характерные области генерации на плоскости параметров $\gamma - k$. *1* — периодические колебания, *2* — квазипериодические колебания, *3* — хаотические колебания.

Таким образом, в настоящей работе изучена картина нелинейной динамики генератора с запаздывающим отражением от нагрузки, которая в значительной мере определяется многомодовым характером данной системы. При увеличении коэффициента отражения k рождение предельных циклов, соответствующих колебаниям различных мод, происходит либо в результате касательной бифуркации, либо в результате бифуркации Андронова–Хопфа. Дальнейшее увеличение k приводит к возникновению квазипериодических и хаотических колебаний. В областях перекрытия зон генерации различных мод присутствует мультистабильность. Области мультистабильности расширяются с ростом времени задержки, причем в зависимости от параметров в них может наблюдаться сосуществование различных устойчивых режимов (периодических, квазипериодических или хаотических). Обнаружено, что сценарий перехода к хаосу (разрушение трехмерного тора или последовательность удвоений тора) определяется параметром неизохронности γ. Порог перехода к хаосу увеличивается с уменьшением этого параметра, а при достаточно малых γ хаотическая динамика вообще исчезает.

Выявлено влияние величины обратной связи и неизохронности на переходы к хаосу.

Авторы благодарны М.И. Петелину и Ю.В. Новожиловой за стимулирующие дискуссии.

Список литературы

[1] *Erneux T., Javaloyes J., Wolfrum M., Yanchuk S.* // Chaos. 2017. V. 27. P. 114201.

[2] Time delay systems: theory, numerics, applications, and experiments / Eds T. Insperger, T. Ersal, G. Orosz. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 362 p.

[3] *Глявин М.Ю., Денисов Г.Г., Кулыгин М.Л., Новожилова Ю.В.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 13. С. 25–32.

[4] *Kharchev N., Cappa A., Malakhov D., Martinez J., Konchekov E., Tolkachev A., Borzosekov V., Sarksyan K., Petelin M.* // J. Infrared Millimeter Terahertz Waves. 2015. V. 36. N 12. P. 1145–1156.

[5] *Khutoryan E.M., Idehara T., Melnikova M.M., Ryskin N.M., Dumbrajs O.* // J. Infrared Millimeter Terahertz Waves. 2017. V. 38. N 7. P. 824–837.

[6] *Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. В. 9. С. 16–22.

[7] *Shigaev A.M., Dmitriev B.S., Zharkov Y.D., Ryskin N.M.* // IEEE Trans. Electron Dev. 2005. V. 51. N 5. P. 790–797.

[8] *Розенталь Р.М., Гинзбург Н.С., Зайцев Н.И., Иляков Е.В., Кулагин И.С.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. В. 1. С. 82–85.

[9] *Landa P.S.* Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems. Dordrecht: Springer, 2013. 500 p.

[10] *Engelborghs K., Luzyanina T., Roose D.* // ACM Trans. Math. Soft. 2002. V. 28. N 1. P. 1–21.