06

# Световые пули в периодически неоднородной среде ориентированных углеродных нанотрубок в оптическом резонаторе

© М.Б. Белоненко, И.С. Двужилов¶, Ю.В. Двужилова, С.В. Борознин

Волгоградский государственный университет,
400062 Волгоград, Россия

¶ e-mail: dvuzhilov.ilya@volsu.ru

Поступила в редакцию 20.09.2018 г.
В окончательной редакции 23.11.2018 г.
Принята к публикации 04.12.2018 г.

Рассмотрена задача о динамике распространения трехмерных предельно коротких оптических импульсов в оптическом резонаторе в периодически неоднородной среде ориентированных углеродных нанотрубок. Численно показано, что такие импульсы демонстрируют устойчивое и стабильное распространение. Кроме того, показано, что, варьируя параметрами неоднородной среды, можно управлять скоростью распространения импульса, а также модифицировать его форму.

DOI: 10.21883/OS.2019.04.47519.279-18

## Введение

Неотъемлемый интерес в рамках нелинейной оптики, особо привлекающий исследователей, принадлежит световым пулям или предельно коротким оптическим импульсам. Такое к себе внимание они получили за уникальный характер и динамику распространения [1,2]. Исследование эволюции световых пуль показало неустойчивое распространение импульса в вакууме или в линейных средах, т. е. импульс уширяется в силу дисперсионных эффектов. Поэтому для устойчивого распространения необходима нелинейная среда, в которой эффекты, связанные с дисперсией, могли бы компенсироваться нелинейными эффектами [3–5]. Перспективным элементом, обладающим необычными свойствами в рамках нелинейной оптики, являются углеродные нанотрубки (УНТ). Простота их строения, уникальность свойств способствуют развитию исследований в области распространения оптических импульсов, разработке оптических приборов на их основе, но основным и немаловажным качеством, которым обладают углеродные нанотрубки, — это возможность их использования в качестве среды для образования световых пуль [6–10]. Интересным является то, что распространение оптических импульсов было рассмотрено в однородной среде УНТ, которая не позволяет управлять скоростью импульса. Для возможности управления параметрами импульса, такими как скорость и время задержки, необходимо провести дополнительную модуляцию показателя преломления среды.

Так, была предложена модель распространения светового импульса в неоднородной среде. Подобная среда дает возможность управлять не только скоростью распространения, но и, например, поперечной структурой [11–14]. Заметим, что на практике имеются затруднения в создании сред такого рода, включающих в себя УНТ и обладающих пространственно модулированным показателем преломления. Объективным выходом из данной ситуации будет получение сред, распределение УНТ в которых будет неоднородно, что приведет к возникновению пространственной модуляции показателя преломления и к возможному изменению скорости распространения оптического импульса и временем задержки импульса в такой среде.

Интерес вызывает и распространение трехмерного предельно короткого оптического импульса в неоднородной среде УНТ, притом помещенной внутрь оптического резонатора.

## Основные уравнения

Предполагаемая система будет смоделирована следующим образом: трехмерный предельно короткий оптический импульс распространяется в неоднородной среде УНТ типа zig-zag в оптическом резонаторе, причем электрическое поле направлено вдоль оси нанотрубок (рис. 1).

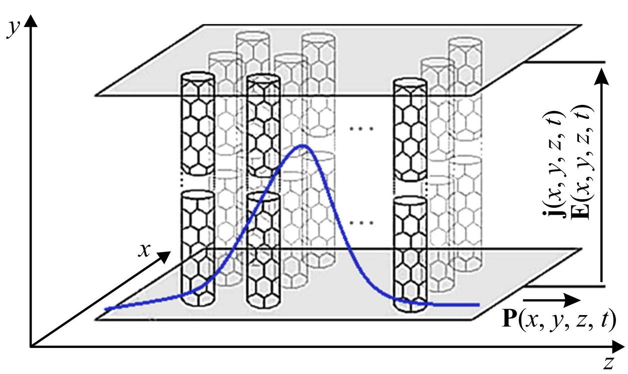


**Рис. 1.** Геометрия задачи. Ток $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ и электрическое поле импульса $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ направлены вдоль оси УНТ, вектор Пойнтинга — вдоль оси распространения импульса.

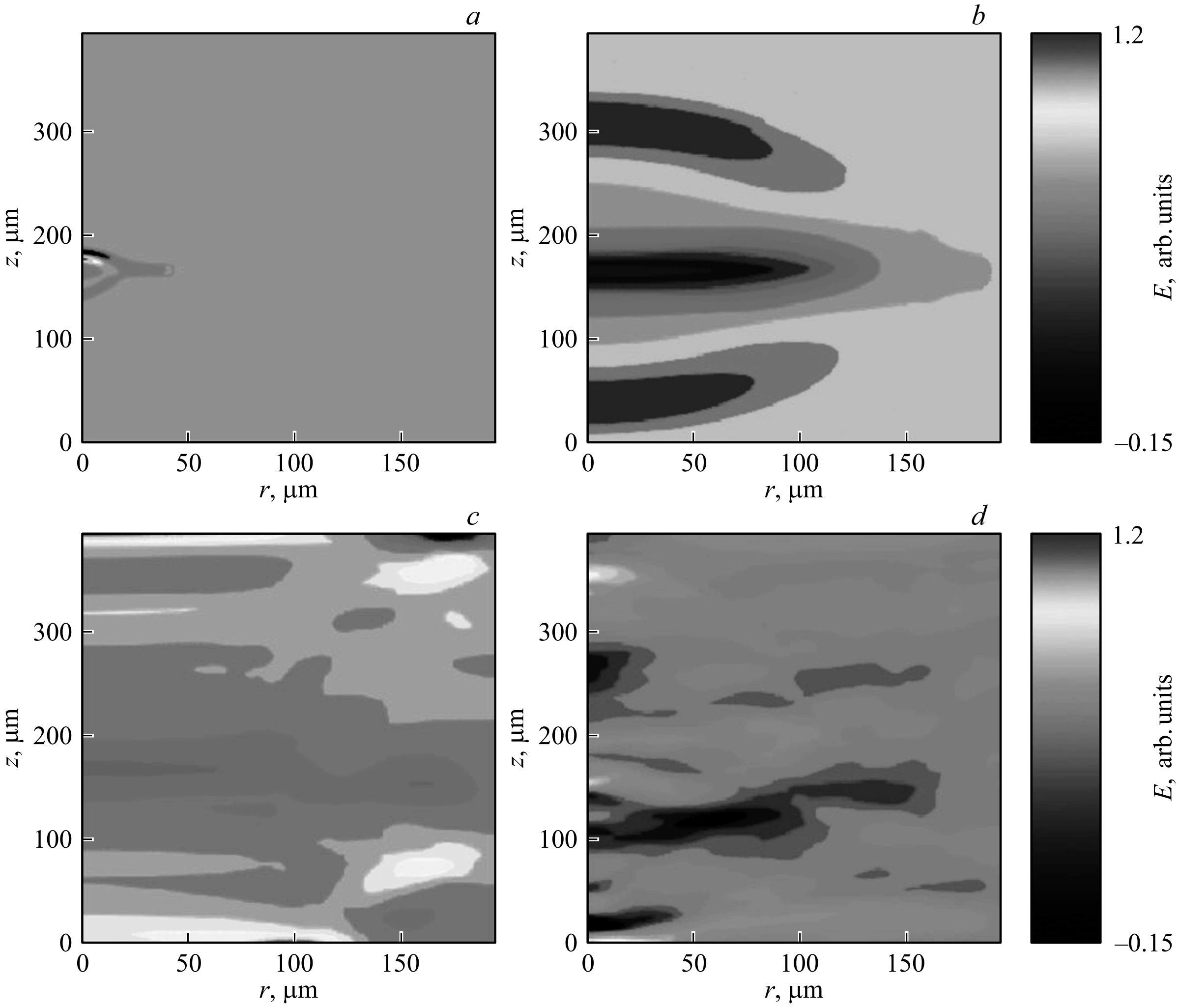


**Рис. 2.** Распространение световой пули в среде УНТ в оптическом резонаторе в различные моменты времени $t$: $a$ — $1.6 \cdot 10^{-12}$ s, $b$ — $16.6 \cdot 10^{-12}$ s, $c$ — $33.3 \cdot 10^{-12}$ s, $d$ — $76.6 \cdot 10^{-12}$ s.

Гамильтониан системы электронов можно записать в виде

$$H = \gamma \sum_{j\Delta\sigma} a^{+}_{j\sigma} a_{j+\Delta\sigma} + h.c.,$$

где $a^{+}_{j\sigma}, a_{j\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения электронов на узле $j$ со спином $\sigma$. $\gamma$ — интеграл перескока, определяемый перекрытием волновых функций электронов в соседних узлах.

При помощи фурье-преобразования

$$a^{+}_{n\sigma} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{j} a^{+}_{j\sigma} \exp(ijn),$$

$$a_{n\sigma} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{j} a_{j\sigma} \exp(-ijn), \tag{1}$$

которое диагонализирует гамильтониан $H$, легко получить спектр электронов, описывающий свойства электронной подсистемы в отсутствие кулоновского отталкивания $\varepsilon_s(p)$. Для углеродных нанотрубок типа zig-zag он имеет вид [15–19]

$$\varepsilon_s(p) = \pm\gamma \sqrt{1 + 4\cos(ap)\cos(\pi s/m) + 4\cos^2(\pi s/m)}, \tag{2}$$

где $s = 1, 2, \ldots, m$, нанотрубка имеет тип $(m, 0)$, $\gamma \approx 2.7$ eV, $a = 3b/2\hbar$, $b = 0.142$, $m$ — расстояние между соседними атомами углерода, $p$ — квазиимпульс.

Уравнения Максвелла можно записать в виде [20]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

где $\mathbf{E}$ — электрическое поле световой волны, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $t$ — время, $c$ — скорость света в среде, $\mathbf{P} = \mu\mathbf{E}$, где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, $\mu$ — коэффициент линейной восприимчивости, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а слагаемое, зависящее от угла поворота, стремится к нулю, так как предполагается цилиндрическая симметрия. В настоящей работе рассмотрена простейшая

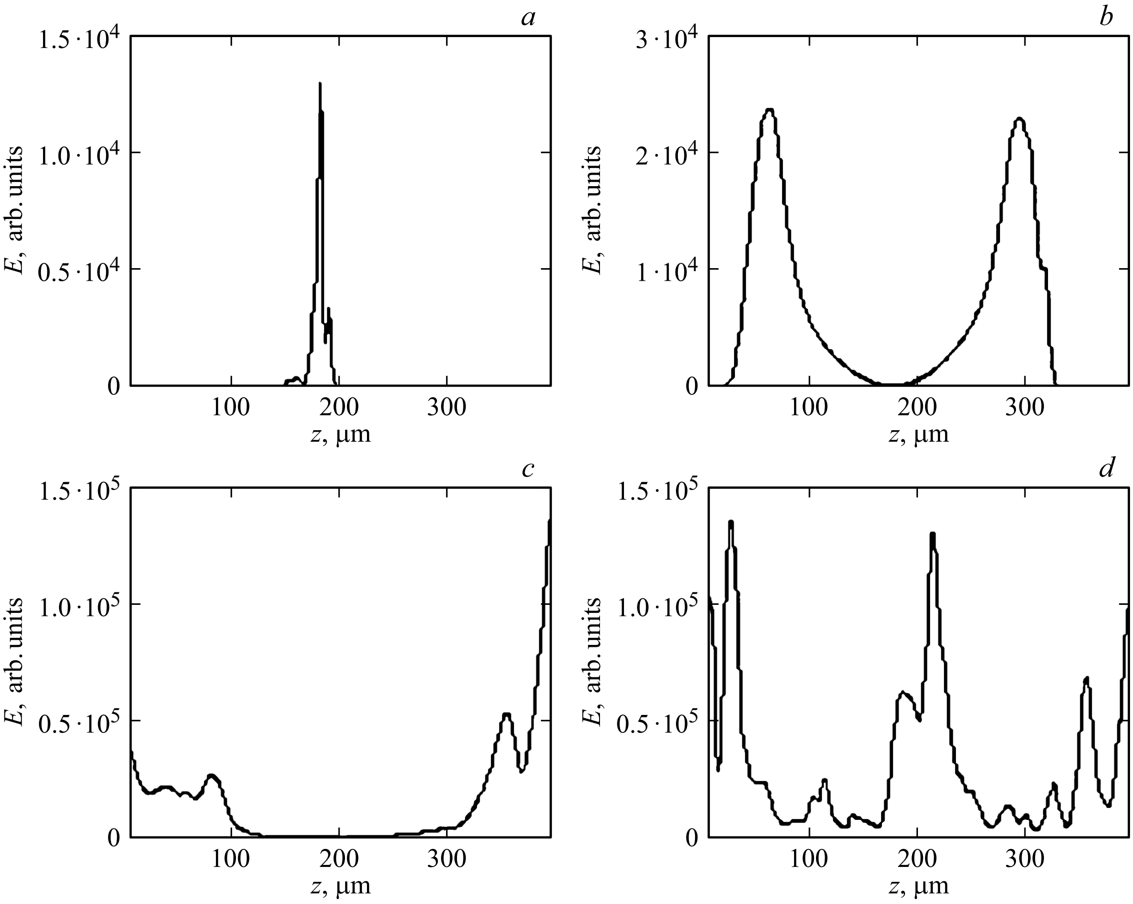


**Рис. 3.** Срезы, проходящие через определенную точку оси $z$ и показывающие всю энергию импульса, сосредоточенную в сечении резонатора, вдоль оси $z$ в различные моменты времени $t$: $a$ — $1.6 \cdot 10^{-12}$ s, $b$ — $16.6 \cdot 10^{-12}$ s, $c$ — $33.3 \cdot 10^{-12}$ s, $d$ — $76.6 \cdot 10^{-12}$ s.

модель линейной среды, в которой вектор поляризации параллелен вектору **E**.

Модифицируем уравнение (3), учитывая кулоновскую калибровку для описания распространения импульсов с широким спектром в нелинейной среде:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Интегрируя (3) один раз по времени, несложно убедиться в том, что обобщением уравнения (3) на случай линейной среды является уравнение вида

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}(1+4\pi\mu)\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = 0, \tag{4}$$

Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ считается имеющим вид $\mathbf{A}\big(0, A(r,z,t), 0\big)$, а плотность тока — соответственно $\mathbf{j}\big(0, j(\mathbf{r},z,t), 0\big)$.

Запишем стандартное выражение для плотности тока

$$j = en(z,r)\sum_{ps} v_s\left(p - \frac{e}{c}A(t)\right)\langle a^+_{ps}a_{ps}\rangle, \tag{5}$$

где $v_z = \partial\varepsilon_s(p)/\partial p$, а скобки означают усреднение с неравновесной матрицей плотности $\rho(t)$: $\langle B\rangle = \mathrm{Sp}\big(B(0)\rho(t)\big)$. Учитывая, что $[a^+_{ps}a_{ps}, H] = 0$, из уравнений движения для матрицы плотности сразу получаем $\langle a^+_{ps}a_{ps}\rangle = \langle a^+_{ps}a_{ps}\rangle_0$, где $\langle B\rangle_0 = \mathrm{Sp}\big(B(0)\rho(0)\big)$, $n(z,r)$ — плотность УНТ.

Учтем, что $\rho_0 = \exp(-H/kT)/\mathrm{Sp}\big(\exp(-H/kT)\big)$ ($k$ — постоянная Больцмана, $T$ — температура), и, разлагая $v_s(p)$ в ряд Фурье, получим

$$v_s\left(p - \frac{e}{c}A(t)\right) = \sum_k A_{ks}\left(\sin(kp)\cos\left(\frac{ke}{c}A(t)\right) - \cos(kp)\sin\left(\frac{ke}{c}A(t)\right)\right),$$

где

$$A_{ks} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} v_s(p)\sin(kp)dp$$

— убывающие с ростом индекса $k$ коэффициенты разложения.

Учитывая, что функция распределения $\rho(0)$ — четная функция квазиимпульса $p$, которая при усреднении с

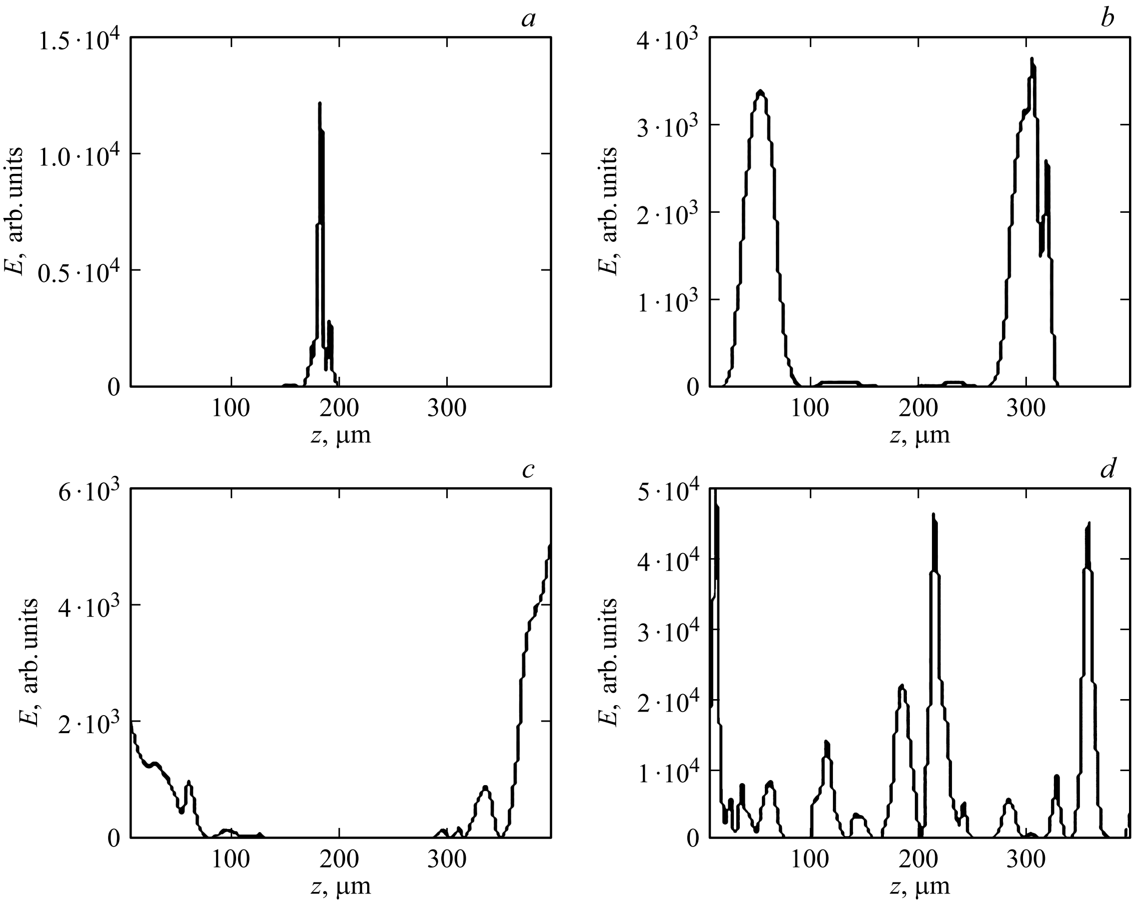


**Рис. 4.** Срезы интенсивности светового поля вблизи оси $z$ цилиндрического резонатора в моменты времени $t$: $a$ — $1.6\cdot10^{-12}$ s, $b$ — $16.6\cdot10^{-12}$ s, $c$ — $33.3\cdot10^{-12}$ s, $d$ — $76.6\cdot10^{-12}$ s.

$\sin(kp)$ даст ноль, можно записать

$$\nu_s\Big(p-\frac{e}{c}A(t)\Big)=-\sum_k A_{ks}\cos(kp)\sin\Big(\frac{ke}{c}A(t)\Big). \quad (6)$$

Подставляя получившийся результат в (5) и выполняя суммирование по $s$ и $p$, имеем

$$j=-en_0\sum_k B_k\sin\Big(\frac{ke}{c}A(t)\Big),$$

$$B_k=\sum_{s=1}^{m}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}dpA_{ks}\cos(kp)\,\frac{\exp(-\beta\varepsilon_s(p))}{1+\exp(-\beta\varepsilon_s(p))},$$

где $n_0$ — концентрация равновесных электронов в углеродных нанотрубках, $\beta=1/kT$. Учитывая все вышесказанное, уравнение (4) после перехода к безразмерным переменным может быть представлено в виде

$$\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\frac{\partial\tilde{A}}{\partial r}\Big)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial t^2}+\frac{4\pi}{c}\,n(z,r)\tilde{j}=0, \quad (7)$$

где $\tilde{A}$ — эффективный вектор-потенциал, $\tilde{j}$ — эффективная плотность тока. В (7) введен коэффициент $n(z,r)$, который учитывает распределение УНТ в пространстве. Далее в численных расчетах это распределение будет задано в виде $n(z,r)=1+\alpha\cos(2\pi z/\chi)$, где $\alpha$ задает глубину модуляции нелинейности, а $\chi$ — период модуляции. Отметим, что в настоящей работе рассматривается модуляция во всех направлениях. Оптический же резонатор считался имеющим цилиндрическую форму и моделировался путем введения отражательных граничных условий на границе цилиндра и введения периодических граничных условий вдоль оси цилиндра.

Отметим, что уравнение (7) является обобщением широко известного уравнения Синус-Гордона.

Начальные условия на вектор-потенциал задавались в следующем виде:

$$A(z,r,0)=Q\exp\Big(-\frac{(z-z_0)^2}{\gamma_z}\Big)\exp\Big(-\frac{r^2}{\gamma_r}\Big),$$

$$\frac{\partial A(z,r,0)}{\partial t}=\frac{2Q\nu z}{\gamma_z}\exp\Big(-\frac{(z-z_0)^2}{\gamma_z}\Big)\exp\Big(-\frac{r^2}{\gamma_r}\Big).$$

Здесь $Q$ — амплитуда импульса; $\gamma_z,\gamma_r$ — ширины импульса в направлении $z$ и $r$ соответственно, $\nu$ — начальная скорость импульса.

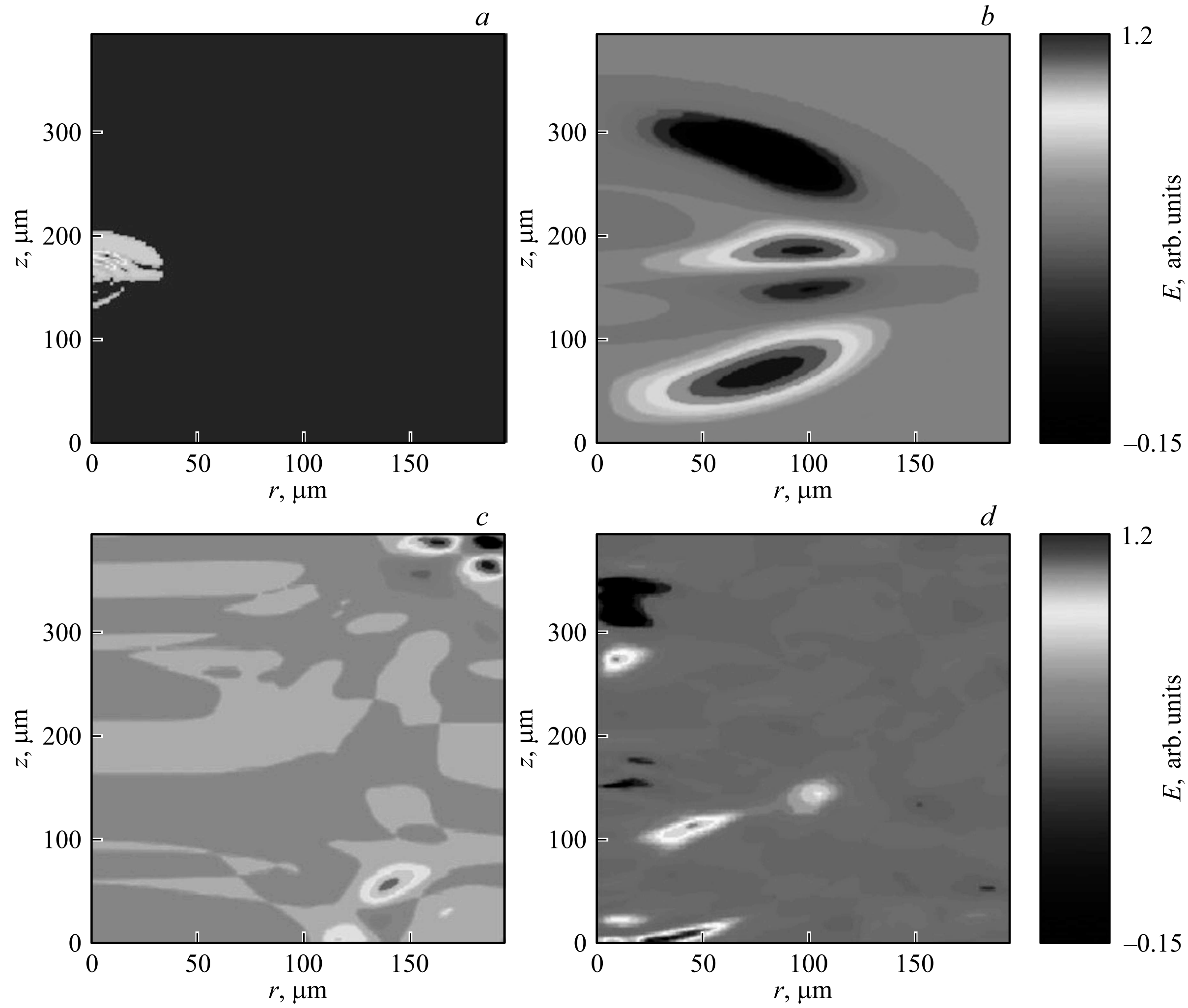


**Рис. 5.** Значение компоненты вектора Пойнтинга вдоль оси $r$ в среде УНТ в оптическом резонаторе в различные моменты времени $t$: $a$ — $1.6 \cdot 10^{-12}$ s, $b$ — $16.6 \cdot 10^{-12}$ s, $c$ — $33.3 \cdot 10^{-12}$ s, $d$ — $76.6 \cdot 10^{-12}$ s.

Расчет, представленный на рис. 2, иллюстрирует, что импульс на больших временах остается сосредоточенным вдоль оси цилиндрического резонатора, и в этом смысле можно говорить об устойчивом распространении световой пули. Более подробно это иллюстрируется на рис. 3, 4, где приведены срезы, проходящие через определенную точку оси $z$ и показывающие всю энергию импульса, сосредоточенную в сечении резонатора, в различные моменты времени, а также срезы интенсивности светового поля вблизи оси $z$ цилиндрического резонатора (т. е. энергию, сосредоточенную в малой области вблизи оси резонатора в зависимости от положения вдоль оси $z$).

Само же формирование такой устойчивой структуры происходит за счет отражения волн от стенок резонатора и последующей интерференции. Такое взаимодействие позволяет уменьшить ширину импульса в направлении, поперечном оси резонатора. Значения соответствующего вектора Пойнтинга представлены на рис. 5, где проиллюстрировано первоначальное уширение импульса к стенкам резонатора и последующее возвращение светового поля обратно к оси резонатора.

## Выводы

Результатом проведенного исследования является следующее.

1. Распространение трехмерного предельно короткого оптического импульса (световой пули) в периодически неоднородной среде ориентированных углеродных нанотрубок в оптическом резонаторе оказалось устойчивым.

2. На больших временах импульс остается локализованным вдоль оси цилиндрического резонатора.

3. Формирование устойчивой структуры происходит за счет отражения волн от стенок резонатора и последующей интерференции. Подобное взаимодействие позволяет уменьшить ширину импульса в направлении, поперечном оси резонатора.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-42-343007.

## Список литературы

[1] *Fibich G., Ilan B.* // Opt. Lett. 2004. V. 29. N 8. P. 887. doi 10.1364/OL.29.000887
[2] *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 696 с.; *Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C.* Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic Press, 1982.
[3] *Schafer T., Wyane C.E.* // Physica D. 2004. V. 196. P. 90–105. doi 10.1016/j.physd.2004.04.007
[4] *Kazantseva E.V., Maimistov A.I., Malomed B.A.* // Opt. Commun. 2001. V. 188. P. 195–204. doi 10.1016/S0030-4018(00)01143-3
[5] *Kurizki G., Kozhekin A., Opatrny T., Malomed B.* Optical Solitons in Periodic Media with Resonant and off-Resonant Nonlinearities. Progress in Optics / Ed. by Wolf E. North-Holland: Elsevier, 2001. V. 42. P. 93–146. doi 10.1016/S0079-6638(01)80016-0
[6] *Белоненко М.Б., Демушкина Е.В., Лебедев Н.Г.* // ФТТ. 2008. Т. 50. № 2. С. 368.
[7] *Белоненко М.Б., Лебедев Н.Г., Попов А.С.* // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. № 9. С. 506.
[8] *Zhukov A.V., Bouffanais R., Belonenko M.B., Konobeeva N.N., Nevzorova Yu.V., George T.F.* // Eur. Phys. J. D. 2015. V. 69. doi 10.1140/epjd/e2015-50895-y
[9] *Leblond H., Mihalache D.* // Phys. Rev. A. 2012. V. 86. P. 043832. doi 10.1103/PhysRevA.86.043832
[10] *Leblond H., Mihalache D.* // Phys. Rep. 2013. V. 523. N 2. P. 61. doi 10.1016/j.physrep.2012.10.006
[11] *Zhukov A.V., Bouffanais R., Fedorov E.G., Belonenko M.B.* // J. Appl. Phys. 2013. V. 114. P. 143106.
[12] *Zhukov A.V., Bouffanais R., Belonenko M.B., Dvuzhilov I.S.* // Phys. Lett. A. 2017. V. 381. P. 931.
[13] *Belonenko M.B., Nevzorova Yu.V.* // Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya. 2014. V. 78. P. ... doi 1619. 10.7868/S0367676514120035
[14] *Fedorov E.G., Zhukov A.V., Bouffanais R., Timashkov A.P., Malomed B.A., Leblond H., Mihalache D., Rosanov N.N., Belonenko M.B.* // Phys. Rev. A. 2018. V. 97. N 043814. P. 4. doi 10.1103/PhysRevA.97.043814
[15] *Baughman R.H., Zakhidov A.A., de Heer W.A.* // Science. 2002. V. 297. P. 787. doi 10.1126/science.1060928
[16] *Iijima S.* // Nature. 1991. V. 354. P. 56. doi 10.1038/354056a0
[17] *Iijima S., Ichihashi T.* // Nature. 1993. V. 363. P. 603. doi 10.1038/363603a0
[18] *Saito R., Dresselhaus G., Dresselhaus M.S.* Physical Properties of Carbon Nanotubes. Singapore: World Scientific, 1998. 259 p.
[19] *Belonenko M.B., Nevzorova Yu.V., Galkina E.N.* // Mod. Phys. Lett. B. 2015. V. 29. P. 155041. doi 10.1142/S0217984915500414
[20] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Физ.-мат. лит., 1988. 536 с.