

Безразмерная математическая модель термоэлектрического охладителя: режим ΔT_{\max}

© А.А. Мельников¹, О.М. Тарасов², А.В. Чеков², М.А. Башкин³

¹ Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов, 105005 Москва, Россия

² Национальный исследовательский технологический университет „МИСиС“, 119049 Москва, Россия

³ АО НПО „Орион“, 111538 Москва, Россия

E-mail: q.melnikov@gmail.com

(Поступила в Редакцию 20 декабря 2018 г.)

В окончательной редакции 24 декабря 2018 г.

Принята к публикации 28 декабря 2018 г.)

Тепловые сопротивления на холодной и горячей стороне оказывают существенное влияние на выходные характеристики термоэлектрических устройств. В работе представлена безразмерная математическая модель термоэлектрического охладителя, позволяющая рассчитывать параметры устройств, такие как оптимальное отношение тепловых сопротивлений на холодной и горячей стороне и оптимальный ток с учетом влияния тепловых сопротивлений. Рассмотрен режим максимального перепада температур ΔT_{\max} . Показано, что оптимальные параметры охладителя для реализации режима ΔT_{\max} и Q_{\max} отличаются. Для режима ΔT_{\max} определяющим является влияние теплового сопротивления на горячей стороне, величина оптимального тока в большинстве случаев составляет 0,4–0,7 от максимального для материала при $ZT = 1$. Показано, что при снижении теплопроводности термоэлектрического материала достигается дополнительное увеличение ΔT_{\max} охладителя за счет снижения влияния теплового сопротивления на горячей стороне, помимо эффекта от увеличения ZT . Аналогичный положительный эффект увеличения ΔT_{\max} охладителя имеет увеличение высоты ветвей, снижение высоты ветвей сказывается на ΔT_{\max} отрицательно.

DOI: 10.21883/FTP.2019.05.47553.11

Термоэлектрические (ТЭ) устройства являются перспективными преобразователями тепловой энергии в электрическую и наоборот, активно развивающимися в последние несколько десятков лет [1–11]. Существенное влияние на характеристики ТЭ охладителей оказывают тепловые сопротивления между холодным спаем материалов и охлаждаемым объектом (на холодной стороне) и между горячим спаем материалов и окружающей средой (на горячей стороне охладителя). Наличие тепловых сопротивлений приводит к возникновению дополнительного перепада температур на материале, увеличению падения напряжения и ухудшению холодопроизводительности охладителей [12]. Моделированию ТЭ устройств с учетом тепловых сопротивлений уделяется значительное внимание, существуют различные математические модели и численные методы, позволяющие рассчитать выходные характеристики устройств с их учетом [13–26]. В предыдущей работе авторами было проведено моделирование ТЭ охладителя с учетом тепловых сопротивлений в режиме максимальной холодопроизводительности Q_{\max} , определены оптимальные параметры для реализации режима Q_{\max} : величина тока относительно максимального и отношение тепловых сопротивлений на холодной и горячей стороне устройства [27]. В представляемой работе проведено моделирование режима максимального перепада температур ΔT_{\max} .

Здесь и далее рассматривается случай независимости свойств ТЭ материала от температуры (constant

properties model, CPM). Аналогично работе [27] дополним классические уравнения теплового баланса на холодной и горячей стороне [28,29] параметром, характеризующим присутствие тепловых сопротивлений на холодной и горячей стороне охладителя, — эффективным коэффициентом теплоотдачи на холодных и горячих спах ТЭ материала A_c, A_h :

$$q_c = \alpha j T_c - \frac{j^2 \rho L}{2} - (T_h - T_c) \frac{k}{L} = A_c (T_{co} - T_c),$$

$$q_h = \alpha j T_h + \frac{j^2 \rho L}{2} - (T_h - T_c) \frac{k}{L} = A_h (T_h - T), \quad (1)$$

где q_c, q_h — удельная холодо- и теплопроизводительность, Вт/м²; T — температура окружающей среды, К; T_{co} — температура охлаждаемого объекта, К; T_c, T_h — температуры на холодных и горячих спах ТЭ материала, К; α, k, ρ — свойства ТЭ материала (коэффициент Зеебека, В/К; теплопроводность, Вт · м⁻¹ · К⁻¹; удельное сопротивление, Ом · м) при температуре T ; j — плотность тока, А/м²; L — высота ТЭ ветвей, м; A_c, A_h — эффективные коэффициенты теплоотдачи на холодных и горячих спах ТЭ материала соответственно, Вт · м⁻² · К⁻¹.

Аналогично работе [27] введем следующие замены переменных:

$T'_c = T_c/T$; $T'_h = T_h/T$ — безразмерная температура на холодном и горячем спае ТЭ материала соответственно;
 $T'_{co} = T_{co}/T$ — безразмерная температура охлаждаемого объекта;

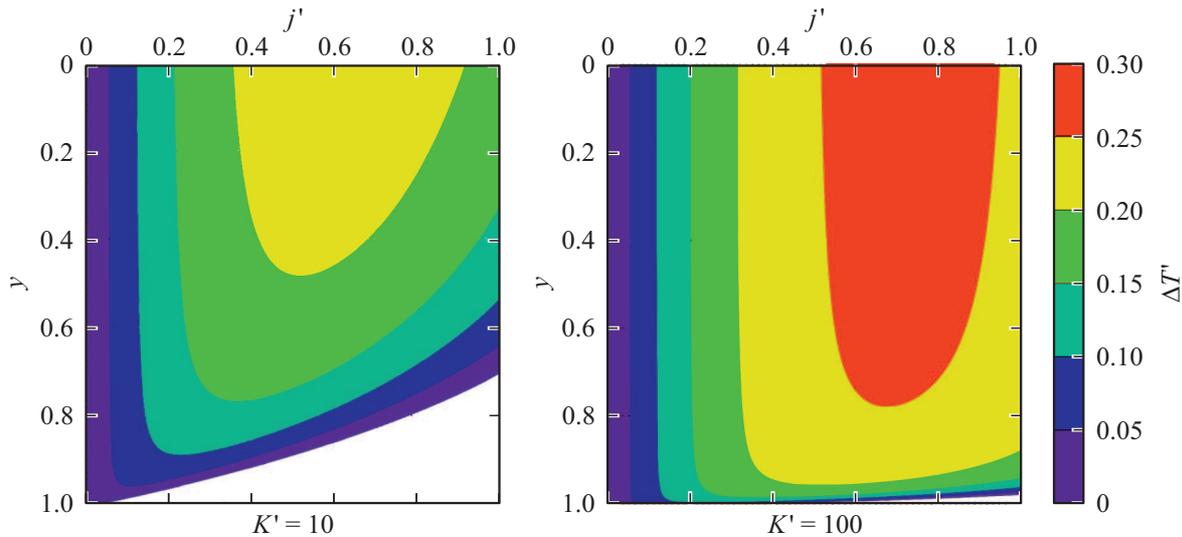


Рис. 1. Зависимости безразмерного перепада температур $\Delta T'$ от безразмерного тока j' и отношения тепловых сопротивлений y ТЭ охладителя при $K' = 10$ и $K' = 100$ и $ZT = 1$.

$j' = j/j_{0q\max} = j\rho L/(\alpha T)$ — безразмерный ток;
 $K' = (K_c + K_h)/K_p = R_p(R_c + R_h)/(R_c R_h) = (A_c + A_h)L/k$ — безразмерный параметр, характеризующий теплообмен на спаях: чем выше параметр, тем лучше осуществляется теплообмен между материалом и тепловыми средами. R_c, K_c, R_h, K_h — тепловое сопротивление, К/Вт, и тепловой контактанс, Вт/К, на холодной и горячей стороне ТЭ охладителя соответственно; R_p — суммарное тепловое сопротивление ТЭ ветвей, $R_p = L/(nSk)$, К/Вт; n — количество ТЭ ветвей в охладителе, S — площадь сечения ТЭ ветви, m^2 ; K_p — суммарный тепловой контактанс ТЭ ветвей, $K_p = 1/R_p$, Вт/К.

$y = A_c/(A_c + A_h) = K_c/(K_c + K_h)$; $1 - y = A_h/(A_c + A_h) = K_h/(K_c + K_h)$ — параметр, характеризующий отношение тепловых сопротивлений на холодной и горячей стороне, $y < 0.5$ соответствует лучшим условиям теплообмена (меньшее тепловое сопротивление) на горячей стороне по сравнению с холодной, например, больший размер радиатора на горячей стороне при постоянной суммарной массе радиаторов;

$ZT = \alpha^2 T/(\rho k)$ — параметр ZT материала при температуре T ;

$q'_c = q_c/q_{c0\max}$; $q'_h = q_h/q_{h0\max}$ — безразмерная холодо- и теплопроизводительность, представляющая собой отношение соответствующего удельного теплового потока к максимальной удельной холодопроизводительности материала $q_{c0\max} = j_{0q\max}^2 \rho L/2 = \alpha^2 T^2/(2\rho L)$.

После проведения указанных замен переменных уравнения (1) преобразуются к виду

$$q'_c = 2j'T'_c - j'^2 - \frac{2(T'_h - T'_c)}{ZT} = \frac{2yK'(T'_{co} - T'_c)}{ZT},$$

$$q'_h = 2j'T'_h + j'^2 - \frac{2(T'_h - T'_c)}{ZT} = \frac{2(1-y)K'(T'_h - 1)}{ZT}. \tag{2}$$

Полученные уравнения можно решить относительно безразмерных температур на холодном и горячем спае T'_c и T'_h , выходные выражения будут иметь зависимость от пяти переменных $T'_c, T'_h(ZT, j', y, K', T'_{co})$. Подставляя полученные выражения для температур в правую часть уравнений (2), можно выразить q'_c, q'_h и производные от них характеристики, в частности безразмерную мощность, потребляемую охладителем $w' = q'_h - q'_c$, и холодильный коэффициент $COP = q'_c/q'_h$.

В случае максимальной холодопроизводительности температура охлаждаемого объекта по определению равна температуре окружающей среды ($T'_{co} = T$; $T'_{co} = 1$). Получаемые уравнения для этого режима представлены в работе [27].

В случае максимального перепада температур $\Delta T'_{\max}$ холодопроизводительность равна нулю ($q'_c = 0$), а температура охлаждаемого объекта выравнивается с температурой на холодном спае материала ($T'_{co} = T'_c$). В этом случае выражение для безразмерного перепада температур между окружающей средой и охлаждаемым объектом $\Delta T' = 1 - T'_{co}$ примет вид

$$\Delta T' = \frac{\frac{j'}{2} - 1 - \frac{ZT j'^2}{(1-y)K'}}{1 + ZT j' - \frac{(ZT)^2 j'^2}{(1-y)K'}} - \frac{j'}{2} + 1. \tag{3}$$

Примечательно, что $\Delta T'$ зависит от параметра $(1-y)K' = K_h/K_p = A_h L/k$, т. е. от условий теплообмена на горячей стороне охладителя. Зависимости $\Delta T'(y, j')$ при различных K' и $ZT = 1$ представлены на рис. 1. Для достижения $\Delta T'_{\max}$ оптимальный $y_{\Delta T'_{\max}} = 0$, т. е. необходимо обеспечивать лучшие условия теплообмена на горячей стороне, при этом условия теплообмена на холодной стороне не оказывают влияния на $\Delta T'_{\max}$. Далее считаем, что $y = 0$, при этом $(1-y)K' = K'$. Взяв производную уравнения (3) по безразмерному току, можно

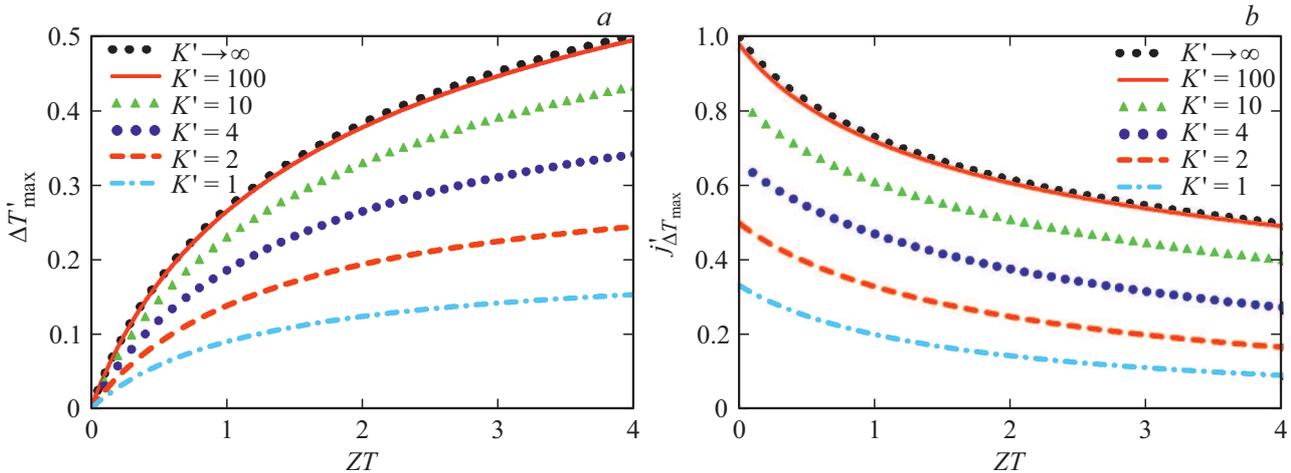


Рис. 2. Максимальный безразмерный перепад температур $\Delta T'_{\max}$ (a) и соответствующий ему безразмерный ток $j'_{\Delta T_{\max}}$ (b) ТЭ охладителя в зависимости от ZT при различных условиях теплообмена (K') и $y = 0$.

найти максимальный безразмерный перепад температур для устройства $\Delta T'_{\max}(ZT, K')$ и ток, при котором он достигается $j'_{\Delta T_{\max}}(ZT, K')$, однако получаемые выражения слишком громоздки для печати.

При идеальных условиях теплообмена ($R_c, R_h = 0$; $K' \rightarrow \infty$) уравнение (3) сводится к виду

$$\Delta T'_0 = \left(1 - \frac{j'}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{1 + ZT j'}\right). \quad (4)$$

Максимальный перепад температур в идеальных условиях $\Delta T'_{0\max}$ и ток, при котором он будет достигаться $j'_{\Delta T_{0\max}}$:

$$\Delta T'_{0\max} = \left(\frac{\sqrt{2ZT + 1} - 1}{2ZT} - 1\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2ZT + 1}} - 1\right),$$

$$j'_{\Delta T_{0\max}} = \frac{\sqrt{2ZT + 1} - 1}{ZT}. \quad (5)$$

Уравнения (5) являются аналогами классических уравнений для материала в представленной безразмерной модели.

На рис. 2 представлены максимальные безразмерные перепады температур охладителя $\Delta T'_{\max}$ в зависимости от ZT материала и условий теплообмена на горячем спае ТЭ материала (K'). Условия теплообмена оказывают существенное влияние на $\Delta T'_{\max}$ и соответствующий ему безразмерный ток $j'_{\Delta T_{\max}}$. При $ZT = 1$, даже если тепловое сопротивление на горячей стороне охладителя в ~ 10 раз меньше суммарного теплового сопротивления ТЭ ветвей ($K' = 10$), максимальный перепад температур охладителя будет составлять 85.6% от значения для материала. Для $K' = 100$ аналогичная величина составляет 98.4%, для $K' = 2$ —51.4%. Чем хуже условия теплообмена на горячем спае, тем хуже возрастает $\Delta T'_{\max}$ охладителя с увеличением ZT . Например, при увеличении ZT материала с 1 до 10 $\Delta T'_{\max}$ в идеальных условиях теплообмена $\Delta T'_{\max}$ увеличится в 2.4 раза, в

то время как в условиях $K' = 4$ — в 2.26 раза. Однако, при увеличении ZT материала с 1 до 4 разница не так существенна: $\Delta T'_{\max}$ в идеальных условиях увеличится в 1.87 раз, в условиях $K' = 4$ — в 1.84 раз. Значения безразмерного тока $j'_{\Delta T_{\max}}$ тем меньше, чем хуже условия теплообмена и выше ZT материала.

Исходя из уравнения (3) и зависимостей, представленных на рис. 2, a, $\Delta T'_{\max}$ охладителя можно увеличить за счет улучшения условий теплообмена на горячем спае при том же ZT материала. Так как в рассматриваемом случае $y = 0$ и $K' = A_h L/k$, увеличения $\Delta T'_{\max}$ можно достичь за счет увеличения эффективного коэффициента теплоотдачи A_h (увеличения размеров радиатора, расхода теплоносителя и т. п.), увеличения L и уменьшения k . Таким образом, снижение k помимо увеличения ZT дополнительно увеличивает величину $\Delta T'_{\max}$ за счет увеличения K' в силу снижения отношения тепловых сопротивлений R_h/R_p . Такое же влияние на $\Delta T'_{\max}$ оказывает и увеличение высоты ветвей L , т. е. при одинаковой конструкции охладителей и значениях ZT используемых материалов большее значение $\Delta T'_{\max}$ будет иметь охладитель с материалом с меньшей теплопроводностью и большей высотой ветвей. При существенном снижении высоты ветвей (например, при использовании тонкопленочных ТЭ материалов) максимальный перепад температур охладителя должен значительно уменьшиться за счет слишком сильного влияния теплового сопротивления на горячей стороне.

Оптимальные значения безразмерного тока $j'_{\Delta T_{\max}}$, найденные для $ZT = 1$, $y = 0$ и различных K' , представлены на рис. 3. На рисунке условно отмечены области условий теплообмена для устройств типа „воздух-воздух“ („air-to-air“) и „жидкость-жидкость“ („liquid-to-liquid“). Значения оптимального тока $j'_{\Delta T_{\max}}$ отличаются от значений оптимального тока $j'_{q_{\max}}$. Значение безразмерного перепада температур в идеальных условиях теплообмена $\Delta T'_{0\max} = 0.268$ соответствуют максимальному перепаду температур материала $\Delta T_{\max} = 80.4$ К, рассчитанному по классической модели при $ZT = 1$.

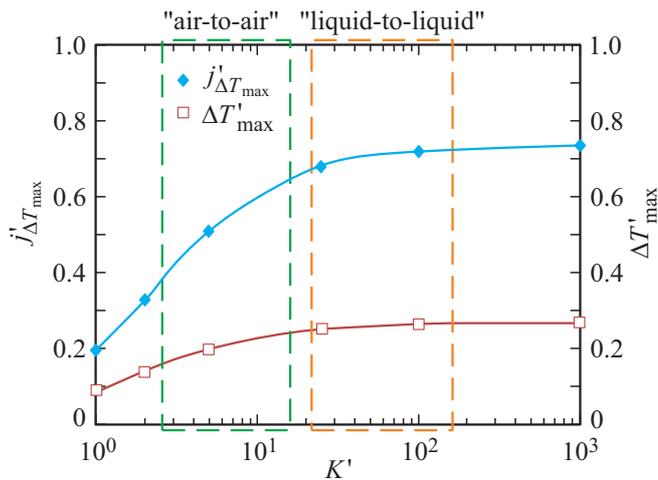


Рис. 3. Максимальный безразмерный перепад температур $\Delta T'_{\max}$ и соответствующий ему безразмерный ток $j'_{\Delta T'_{\max}}$ ТЭ охладителя в зависимости от K' при $ZT = 1$ и $y = 0$.

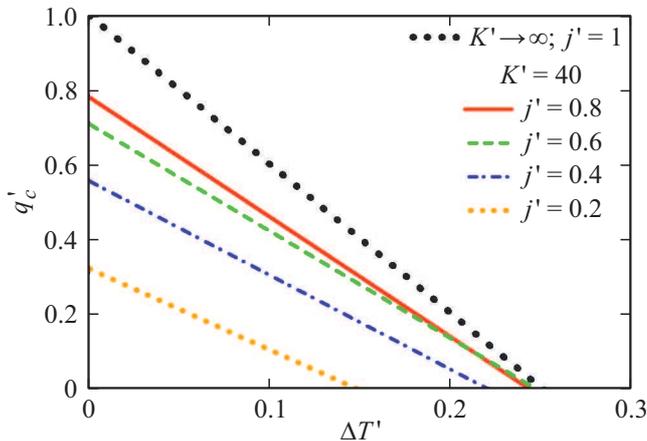


Рис. 4. Нагрузочные характеристики $q'_c(\Delta T')$ ТЭ охладителя при различных условиях теплообмена (K') и безразмерных токах j' при $ZT = 1$ и $y = 0.5$.

Мы показали, что с помощью представленной модели можно рассчитывать параметры ТЭ охладителей для двух экстремальных режимов: $\Delta T'_{\max}$ и Q'_{\max} . При работе охладителя в промежуточных режимах между $\Delta T'_{\max}$ и Q'_{\max} : $T'_c < T'_{co} < 1$. Если считать, что y , K' , ZT в правой части уравнения (2) для q'_c постоянны, то T'_{co} и q'_c оказываются линейно зависимыми. Тогда для описания промежуточных режимов работы устройства достаточным будет построение нагрузочных характеристик $q'_c(\Delta T')$ (аналог характеристике $Q_c(\Delta T)$ классической модели) при фиксированных токах j' по двум точкам, $\Delta T'_{\max}$ и Q'_{\max} , рассчитанным по уравнению (3) данной работы и уравнению (2) для q'_c из работы [27]. Примеры таких нагрузочных характеристик представлены на рис. 4.

Таким образом, с помощью представленной математической модели можно рассчитать параметры ТЭ охладителя в любом режиме работы и найти оптимальные значения тока и отношения тепловых сопро-

тивлений на холодной и горячей стороне. Уравнения модели также можно дополнить температурными зависимостями характеристик материала. С использованием методики расчета тепловых сопротивлений, аналогичной представленной в работе [30], можно оценить тепловые сопротивления ТЭ охладителей, затем оптимизировать их конструкционные параметры с использованием представленной модели.

Список литературы

- [1] D.M. Rowe. *Int. J. Inn. Energy Syst. Power*, **1** (1), 13 (2006).
- [2] T.M. Tritt, M.A. Subramanian. *MRS Bull.*, **31** (3), 188 (2006).
- [3] D.M. Rowe. *Renew En.*, **16** (1), 1251 (1999).
- [4] B.I. Ismail, W.H. Ahmed. *Rec. Pat. Elec. Electron. Eng.*, **2** (1), 27 (2009).
- [5] Е.Н. Каблов. *Авиац. мат. техн.*, **1** (34), 3 (2015).
- [6] Е.Н. Каблов, О.Г. Оспенникова, А.В. Вершков. *Тр. ВИАМ*, **2**, 3 (2013).
- [7] Е.Н. Каблов. *Эксп.*, **15** (941), 49 (2015).
- [8] Е.Н. Каблов. *Авиац. мат. техн.*, **S1**, 3 (2013).
- [9] Ю.В. Лощинин. *Авиац. мат. техн.*, **2** (47), 41 (2017).
- [10] M.S. Dresselhaus, I.L. Thomas. *Nature*, **414** (6861), 332 (2001).
- [11] A. Melnikov. *Metal Powder Rep.*, **71** (4), 279 (2016).
- [12] A.A. Melnikov, V.G. Kostishin, V.V. Alenkov. *J. Electron. Mater.*, **46** (5), 2737 (2017).
- [13] X. Lu. *Energy Conver. Manag.*, **169**, 186 (2018).
- [14] H.S. Lee. *Appl. Energy*, **106**, 79 (2013).
- [15] X. Ying. *J. Therm. Sci. Eng. Appl.*, **10** (5), 051008 (2018).
- [16] R. Lamba, S.C. Kaushik. *Energy Conver. Manag.*, **144**, 288 (2017).
- [17] Y. Cai. *Energy Conver. Manag.*, **124**, 203 (2016).
- [18] J. Chen. *Energy Conver. Manag.*, **122**, 298 (2016).
- [19] J. Ramousse. *Int. J. Thermodynam.*, **19** (2), 82 (2016).
- [20] D. Liu, Y. Cai, F.Y. Zhao. *Energy* **128**, 403 (2017).
- [21] A. Montecucco, A.R. Knox. *Appl. Energy*, **118**, 166 (2014).
- [22] M.R. Pearson, C.E. Lents. *J. Heat Transf.*, **138** (8), 081301 (2016).
- [23] D. Liu, Y. Cai, F.Y. Zhao. *Energy*, **128**, 403 (2017).
- [24] C.C. Wang, C.I. Hung, W.H. Chen. *Energy*, **39** (1), 236 (2012).
- [25] A. Montecucco, J.R. Buckle, A. R. Knox. *Appl. Therm. Eng.*, **35**, 177 (2012).
- [26] S.B. Riffat, X. Ma, R. Wilson. *Appl. Therm. Eng.*, **26**, 494 (2006).
- [27] А.А. Мельников, А.М. Пири, И.В. Тарасова, Н.В. Батрамеев. *ФТП*, **51** (7), 896 (2017) [А.А. Melnikov, A.M. Phiri, I.V. Tarasova, N.V. Batrameev. *Semicond.*, **51** (7), 858 (2017)].
- [28] А.Ф. Иоффе. *Полупроводниковые термоэлементы* (М.:ИЛ, АН СССР, 1960) с. 189 [A.F. Ioffe. *Semiconductor thermoelements and thermoelectric cooling* (London, Infosearch, ltd., 1957)].
- [29] Л.И. Анагычук, В.А. Семенюк. *Оптимальное управление свойствами термоэлектрических материалов и приборов* (Черновицы, Прут, 1992) с. 146.
- [30] А.А. Мельников, В.С. Нагорная, Л.В. Соловьянич, С.В. Кондрашов. *ЖТФ*, **88** (12), 1853 (2018) [А.А. Melnikov, V.S. Nagornaya, L.V. Solov'yanchik, S.V. Kondrashov. *Techn. Phys.*, **88** (12), 1792 (2018)].

Редактор А.Н. Смирнов

Dimensionless mathematical model of a thermoelectric cooler: ΔT_{\max} mode

A.A. Melnikov¹, O.M. Tarasov², A.V. Chekov²,
M.A. Bashkin³

¹ All-Russian Institute of Aviation materials,
105005 Moscow, Russia

² NUST „MISiS“,
119049 Moscow, Russia

³ AO «NPO „Orion“»,
111538 Moscow, Russia

Abstract Thermal resistances on cold and hot sides significantly affect output characteristics of a thermoelectric device. A dimensionless mathematical model of a thermoelectric cooler, calculating such parameters as optimal thermal resistance ratio and optimal current and taking into account thermal resistances is proposed. Maximum temperature difference ΔT_{\max} mode is described. It is shown that optimal parameters of a cooler for ΔT_{\max} and Q_{\max} modes are different. For ΔT_{\max} mode, thermal resistance on the hot side is crucial and optimal current is of 0.4–0.7 relative to maximum current of the material with $ZT = 1$ for most cases. It is shown that a decrease in thermal conductivity of a thermoelectric material reduces the influence of thermal resistance on the hot side and additionally increases ΔT_{\max} of a thermoelectric cooler, besides an increase in ZT . An increase in length of thermoelectric pellets has the same positive effect on cooler's ΔT_{\max} , a decrease in the length has the negative effect on the ΔT_{\max} .