

01  
**Максимум энтропии в масштабно-инвариантных процессах с  $1/f^\alpha$ -спектром мощности: влияние анизотропии белого шума**

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН,  
 Екатеринбург, Россия  
 E-mail: koverda@itp.uran.ru

Поступило в Редакцию 30 января 2019 г.  
 В окончательной редакции 30 января 2019 г.  
 Принято к публикации 6 февраля 2019 г.

Экстремальные флуктуации моделируются системой нелинейных стохастических уравнений, описывающей взаимодействующие фазовые переходы. Под действием анизотропного белого шума формируются случайные процессы с  $1/f^\alpha$ -зависимостью спектров мощности от частоты при значениях показателя  $\alpha$  от 0.7 до 1.7. Показано, что флуктуации с  $1/f^\alpha$ -спектрами в исследованном диапазоне изменения  $\alpha$  соответствуют максимуму энтропии, что свидетельствует об устойчивости процессов с  $1/f^\alpha$ -спектрами мощности при различных значениях показателя  $\alpha$ .

DOI: 10.21883/PJTF.2019.09.47707.17718

Среди природных и техногенных систем существуют такие, в которых самопроизвольно возникают большие отклонения от средних значений. Флуктуации масштабно-инвариантны и демонстрируют спектр мощности со степенной зависимостью от частоты:  $S(f) \sim 1/f^\alpha$ , где величина показателя степени  $\alpha$  лежит в диапазоне  $0.7 \leq \alpha \leq 1.8$ . Функции распределения имеют степенные „хвосты“. Энергия флуктуаций сосредотачивается при низких частотах и проявляется как „вспышки“ или крупномасштабные выбросы [1–4]. Релаксация возмущений спадает по степенному закону, а не экспоненциально, как это происходит при малых флуктуациях. Масштабно-инвариантные процессы с большими флуктуациями устойчивы без тонкой подстройки параметров процесса, хотя они возникают в сложных статистических системах вдали от термодинамического равновесия.

Появление  $1/f^\alpha$ -спектра иногда связывают с концепцией самоорганизованной критичности при описании лавинной динамики в компьютерных моделях [3,4]. Другой вариант математического описания случайных процессов с  $1/f^\alpha$ -спектром дает дробное интегрирование белого шума [5], но этот подход трудно физически интерпретировать. В турбулентных потоках жидкости также развиваются флуктуации в широком диапазоне масштабов [6].

Возникновение случайных процессов с экстремальными флуктуациями происходит под действием белого шума во взаимодействующих фазовых переходах [7]. При описании таких случайных процессов используется система нелинейных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \sigma_1\xi_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\varphi^2\psi + \lambda\varphi + \sigma_2\xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные,  $\xi_k$  — гауссовский белый шум с нулевым средним значением

$\langle \xi_k \rangle = 0$ , амплитудой  $\sigma_k$  и автокорреляционной функцией  $\langle \xi_k(t)\xi_l(t') \rangle = \delta(t-t')$ ,  $k, l = 1, 2$ . При критичности системы (1) уровень белого шума соответствует индуцированному шумом переходу [7]. Коэффициент  $\lambda > 1$  во втором уравнении нарушает потенциальность силового поля и связан с некоторым нескомпенсированным потоком. В критическом состоянии случайный процесс  $\varphi(t)$ , описываемый системой (1), имеет  $1/f^\alpha$ -спектр мощности. В случае изотропного шума ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ) при коэффициенте  $\lambda = 2$  показатель степени  $\alpha$  в частотной зависимости спектра равен единице. Спектр мощности переменной  $\psi$  обратно пропорционален квадрату частоты, т.е. имеет вид  $1/f^2$ . Уравнения системы (1)

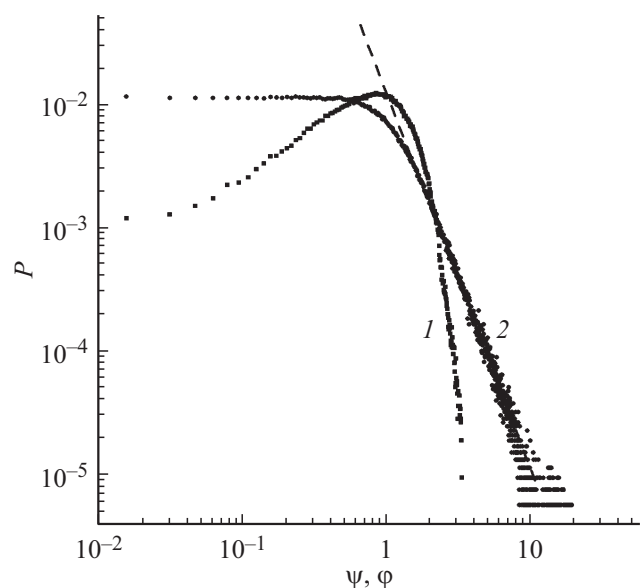
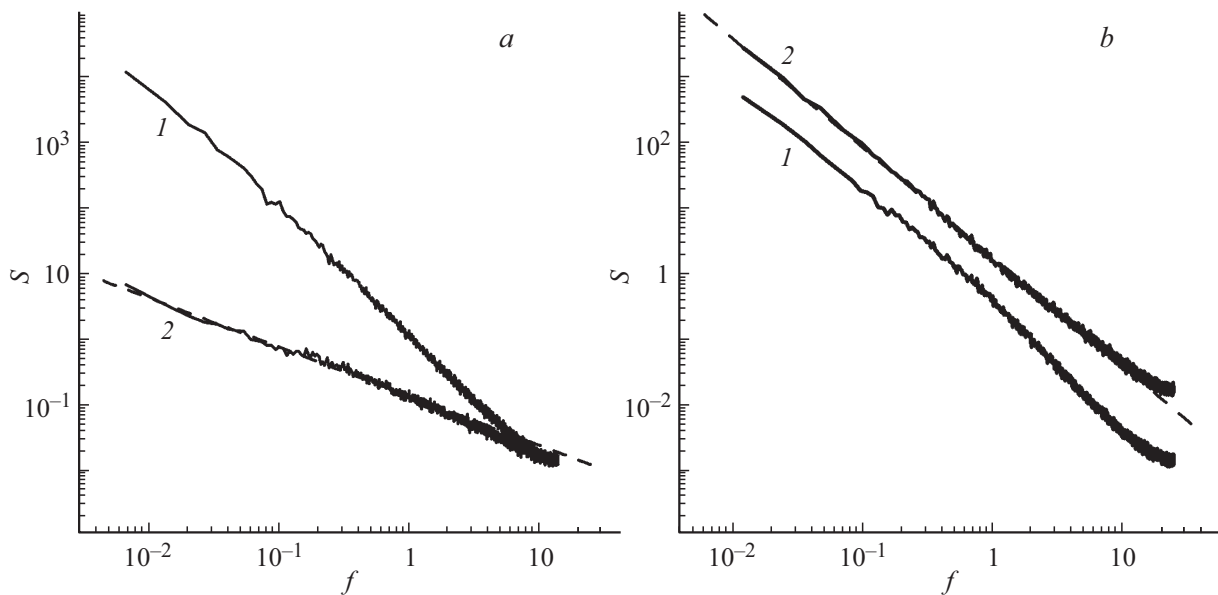


Рис. 1. Плотность вероятности распределения переменных  $\psi$  (1) и  $\varphi$  (2) в логарифмических координатах. Штриховая линия — зависимость  $\sim \varphi^{-3}$ .



**Рис. 2.** Спектры мощности флуктуаций переменных  $\psi$  (1) и  $\varphi$  (2). *a* — параметр анизотропии белого шума  $\sigma_1/\sigma_2 = 0.75$ , штриховая линия — зависимость  $\sim 1/f^{0.8}$ ; *b* — параметр анизотропии белого шума  $\sigma_1/\sigma_2 = 4$ , штриховая линия —  $1/f^{1.7}$  зависимость.

находятся в иерархии управления и подчинения. Второе уравнение системы (1) является управляющим [8,9]. Плотность вероятности переменной  $\psi$  спадает при возрастании аргумента экспоненциально, как и для гауссовского распределения. Функция плотности вероятности распределения переменной  $\varphi$  спадает при больших  $\varphi$  по степенному закону  $\sim \varphi^{-3}$ . На рис. 1 приведены плотности вероятности распределения переменных  $\psi$  и  $\varphi$  в критическом состоянии.

Гауссовское распределение переменной  $\psi(t)$  дает основание пользоваться обычными формулами статистической механики. В частности, устойчивость процесса будет определяться максимумом энтропии Гиббса–Шеннона

$$H = - \sum_n P_n \log P_n, \quad (2)$$

где  $P_n$  — нормированная функция плотности вероятности случайного процесса. Случайный процесс  $\varphi(t)$  с  $1/f^\alpha$ -спектром относится к негауссовским процессам. Считается, что статистическая энтропия Гиббса–Шеннона неприменима для таких процессов из-за неинтегрируемости степенных „хвостов“ [10–12]. Однако если имеется полная информация о сложной системе, то для анализа устойчивости всей системы бывает достаточно исследовать поведение „гауссовской“ переменной.

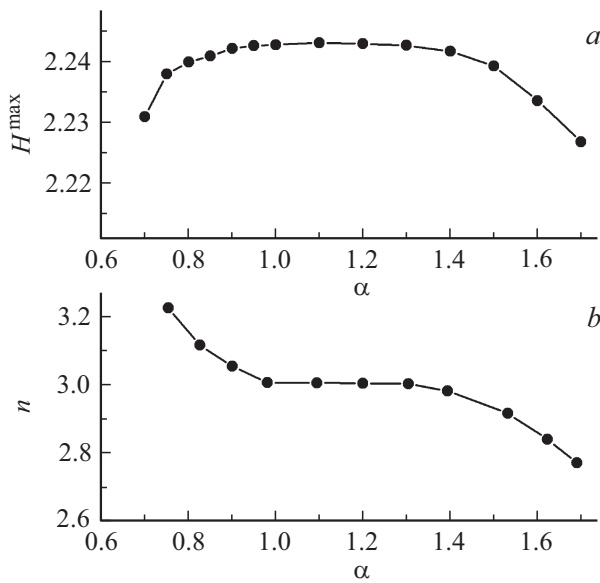
В работах [8,9,13] с использованием принципа максимума энтропии было показано, что критическое состояние системы (1) является устойчивым. Варьируя значение коэффициента  $\lambda$  в (1), можно в небольших пределах изменять показатель  $\alpha$  при сохранении зависи-

мости  $\sim 1/f^\alpha$ . В случае изотропного шума, когда амплитуды шума равны:  $\sigma_1 = \sigma_2$ , флуктуации с  $1/f$ -спектром мощности, т.е. с показателем степени, равным  $\alpha = 1$ , являются выделенными в соответствии с принципом максимальности энтропии Гиббса–Шеннона [13].

В настоящей работе рассматривается более общий случай анизотропного шума, когда  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Показано, что, варьируя значения коэффициента  $\lambda$  и анизотропии шума, можно изменять значения показателя  $\alpha$  в диапазоне  $\alpha = 0.7–1.7$  при сохранении зависимости  $\sim 1/f^\alpha$  и при выполнении принципа максимальности энтропии Гиббса–Шеннона.

На рис. 2, *a* показаны спектры мощности флуктуаций переменных  $\varphi$  и  $\psi$  при параметре анизотропии белого шума  $\sigma_1/\sigma_2 = 0.75$ . Значение показателя степени в частотной зависимости спектра мощности переменной  $\varphi$  равно  $\alpha = 0.8$ . Спектр мощности переменной  $\psi$  близок к виду  $1/f^2$ . На рис. 2, *b* показаны соответствующие спектры при параметре анизотропии  $\sigma_1/\sigma_2 = 4$ , что отвечает показателю  $\alpha = 1.7$ .

В качестве критерия устойчивости использовался принцип максимума статистической энтропии Гиббса–Шеннона, найденной по функции распределения квадрата переменной  $\psi$ , определяемой управляющим стохастическим уравнением системы (1). На рис. 3, *a* приведен максимум энтропии Гиббса–Шеннона  $H$ , полученный из численных расчетов случайного процесса  $\psi(t)$ , соответствующая различным значениям показателя  $\alpha$  в частотной зависимости спектра мощности переменной  $\varphi$ . Из рисунка видно, что зависимость  $H(\alpha)$  имеет широкий максимум. Это означает, что случайные процессы с  $1/f^\alpha$ -спектром мощности являются устой-



**Рис. 3.** Параметры статистических распределений в зависимости от показателя  $\alpha$  в частотной зависимости спектра мощности переменной  $\varphi$ . *a* — энтропия Гиббса–Шеннона; *b* — показатель степени  $n$ , характеризующий „хвосты“ распределения переменной  $\varphi$ .

чивыми в достаточно широком интервале изменений показателя  $\alpha$ .

Плотность вероятности случайного процесса  $\varphi$  спадает при больших  $\varphi$  по степенному закону:  $P(\varphi) \sim \varphi^{-n}$ . На рис. 3, *b* показана зависимость показателя степени  $n$  в распределении  $\varphi$  от показателя степени  $\alpha$  в частотной зависимости спектра мощности.

В тех случаях, когда приходится иметь дело со степенными распределениями, к которым не применима формула Гиббса–Шеннона (2), для анализа устойчивости процессов часто используют выражения для энтропии Цаллиса [12]

$$H^T = \frac{1}{1-q} \left( \sum_n P_n^q - 1 \right) \quad (3)$$

или Реньи [14]

$$H^R = \frac{1}{1-q} \ln \sum_n P_n^q, \quad (4)$$

которые содержат зависимость от подгоночного параметра  $q$ , определяющего конкретное положение максимума энтропии, величина которого неизвестна. В том случае, когда имеется полная информация о системе, значение параметра  $q$  в выражениях для энтропий Цаллиса (3) и Реньи (4) можно определить из условия, что положение максимума энтропии Гиббса–Шеннона для управляющего уравнения совпадает с положением максимумов энтропий Цаллиса и Реньи распределения со степенными „хвостами“ для подчиненного уравнения. Численными методами были рассчитаны

энтропии Гиббса–Шеннона для экспоненциального распределения и энтропии Цаллиса и Реньи для распределений переменной  $\varphi$  со степенными „хвостами“, соответствующих флуктуациям с  $1/f^\alpha$ -спектром мощности. Исходя из условия совпадения положений максимумов энтропий определены значения параметра  $q$ . В диапазоне изменения показателя  $\alpha$ , в котором сохранялась  $1/f^\alpha$ -зависимость спектральной плотности ( $0.8 \leq \alpha \leq 1.7$ ), найденные значения параметра  $q$  оставались приблизительно постоянными и составляли  $q \approx 0.6$  как для энтропии Цаллиса, так и для энтропии Реньи. Следует отметить, что если для вычисления энтропии по формуле (2) используется функция плотности вероятности целиком, то при расчете энтропий Цаллиса и Реньи по формулам (3) и (4) основной вклад вносят степенные „хвосты“ распределений, которые содержат меньшее число точек по сравнению с полным распределением. Поэтому точность расчета энтропий Цаллиса и Реньи по формулам (3) и (4) и соответственно параметра  $q$  ниже, чем для расчета энтропии Гиббса–Шеннона по формуле (2) для гауссовских распределений.

Таким образом, показано, что флуктуации с  $1/f^\alpha$ -спектром соответствуют максимуму энтропии, что свидетельствует об устойчивости процессов с  $1/f^\alpha$ -спектрами мощности при различных значениях показателя  $\alpha$ .

Результаты полезны для исследования устойчивости случайных процессов со степенными функциями распределения в случае ограниченной информации о системе, в частности при анализе экспериментальных данных.

### Финансирование работы

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН (проект № 18-2-2-3) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00091-а).

### Список литературы

- [1] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. 624 с.
- [2] Weissman M.B. // Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60. N 2. P. 537–571.
- [3] Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. V. 38. N 1. P. 364–374.
- [4] Jensen H.J. Self-organized criticality. N.Y.: Cambridge University Press, 1998. 153 p.
- [5] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 656 с.
- [6] Колмогоров А.Н. // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
- [7] Koverda V.P., Skokov V.N. // Physica A. 2005. V. 346. N 3-4. P. 203–216.
- [8] Коверда В.П., Скоков В.Н. // ЖТФ. 2011. Т. 81. В. 11. С. 1–6.

- [9] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // *Physica A.* 2012. V. 391. N 1. P. 21–28.
- [10] *Башикуров А.Г.* // *ТМФ.* 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317.
- [11] *Montroll E.W., Shlesinger M.F.* // *J. Stat. Phys.* 1983. V. 32. N 2. P. 209–230.
- [12] *Tsallis C.* // *J. Stat. Phys.* 1988. V. 52. N 1-2. P. 479–487.
- [13] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // *Physica A.* 2018. V. 511. P. 263–271.
- [14] *Renyi A.* *Probability theory.* Amsterdam: North-Holland, 1970. 660 p.