

01.3

## Спиральные, концентрические и химерные волновые структуры в двумерном ансамбле нелокально связанных генераторов Ван дер Поля

© А.В. Бух, В.С. Анищенко<sup>†</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
<sup>†</sup> E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 20 февраля 2019 г.

В окончательной редакции 20 февраля 2019 г.

Принято к публикации 11 апреля 2019 г.

Методом численного моделирования исследована динамика двумерного ансамбля нелокально связанных генераторов Ван дер Поля. Установлена возможность реализации регулярных спиральных и концентрических волн. Показан эффект возникновения нового типа химерной структуры, реализующейся на основе концентрических волн в условиях нелокальной связи.

**Ключевые слова:** химерные состояния, спиральные волны, концентрические волны, двумерные ансамбли, генератор Ван дер Поля.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.13.47957.17739

Исследования автоволновых процессов в активных нелинейных системах и средах имеют более чем пятидесятилетнюю историю, но не утратили своей актуальности [1–3]. Одними из наиболее важных проблем в этом направлении сегодня представляются задачи анализа коллективной динамики сложных ансамблей взаимосвязанных нелинейных осцилляторов при различной топологии связи. В таких системах наблюдаются эффекты кластерной синхронизации и формирование режимов различных пространственно-временных структур. Например, могут возникать спиральные и концентрические автоволновые структуры [4–9]. Исследование указанных процессов и явлений не только представляет фундаментальный научный интерес, но и имеет важное прикладное значение. В качестве примера приведем использование результатов анализа автоволновых процессов в нелинейных средах при изучении и моделировании динамики сердечной мышцы [9,10]. Установлено, что водитель ритма сердца является источником возбуждения концентрических волн большой длины (много больше размеров сердца). При этом сердце функционирует в нормальном режиме. При патологии возникает разрыв фронта концентрической волны и рождаются спиральные волны малой длины (0.1–1.0 см). Они и являются одной из причин возникновения фибрилляций сердечной мышцы и тахикардии [10].

В начале XXI века были найдены и изучены новые типы структур, названные химерами [11,12]. Эти структуры характеризуются сосуществованием в ансамбле кластеров осцилляторов с синхронной (когерентной) и асинхронной (некогерентной) динамикой [12]. Открытие химерных структур во многом обусловлено рассмотрением динамики ансамблей нелинейных осцилляторов в условиях нелокальной связи. В отличие от локальной связи, когда каждый осциллятор связан только с ближай-

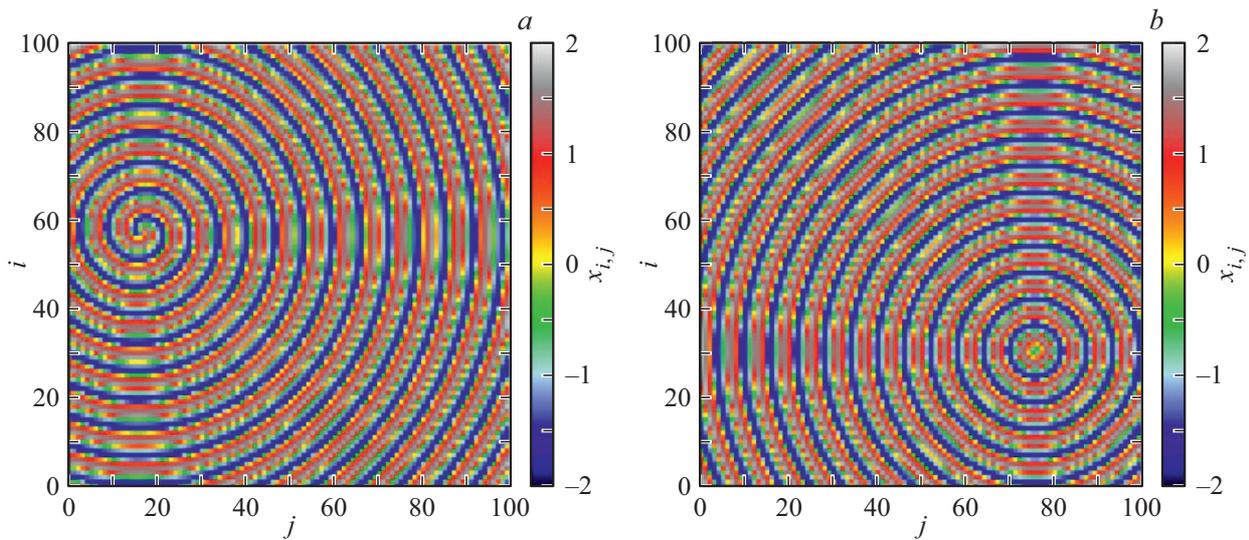
шими соседними осцилляторами, при нелокальной связи каждый осциллятор ансамбля взаимодействует с конечным числом осцилляторов. Установлено, что при нелокальной связи химеры могут возникать на основе спиральных волн — так называемые спирально-волновые химеры [4–7]. Кластеры некогерентности спирально-волновых химер представляют собой круглые ядра, окружающие осциллятор, который является источником возбуждения спиральной волны. Что касается концентрических волновых структур, то до сих пор химерные кластеры в таких структурах не обнаруживались. В настоящей работе мы покажем, что на основе концентрических волн могут возникать химерные структуры в виде кластеров некогерентности, включающие группу осцилляторов, окружающих ведущий центр возбуждения концентрической волны.

Численно исследовалась динамика двумерной решетки связанных осцилляторов Ван дер Поля с  $N \times N$  элементами при  $N = 100$ . Решетка описывается следующей системой уравнений:

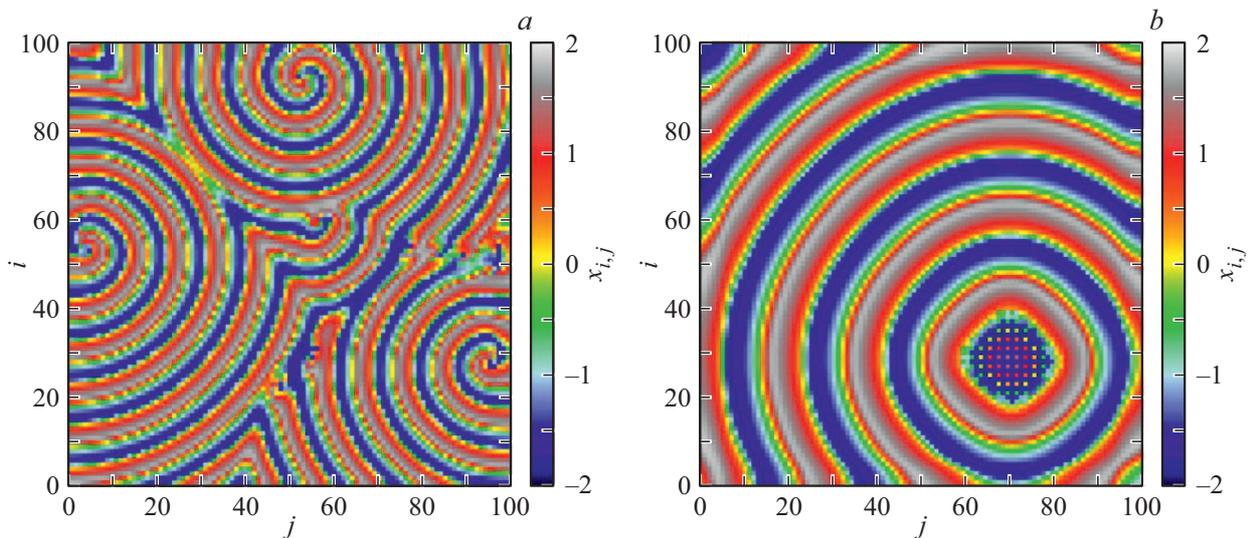
$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,j} &= y_{i,j} + \frac{\sigma_x}{B_{i,j}^{m_x, n_x}} \sum [x_{m_x, n_x} - x_{i,j}], \\ \dot{y}_{i,j} &= \varepsilon(1 - x_{i,j}^2)y_{i,j} - \omega^2 x_{i,j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $m_x, n_x \in N$ ;  $\varepsilon, \omega$  — параметры индивидуального осциллятора Ван дер Поля. Параметр  $\varepsilon = 2$  выбран с целью реализации релаксационных колебаний, которые близки к колебаниям в системе ФитцХью–Нагумо, используемой в нейробиологии. Система (1) анализируется в случае открытых границ, определяемых следующими условиями [7]:

$$\begin{cases} \max(1, j - P) \leq n_x \leq \min(N, j + P), \\ \max(1, j - P) \leq n_x \leq \min(N, j + P), m_x \neq n_x. \end{cases} \quad (2)$$



**Рис. 1.** Мгновенные значения амплитуд  $x_{i,j}$  для спиральной волновой структуры в (1) при  $\omega = 0.9, \sigma = 0.9$  (a) и для concentрической волны при  $\omega = 0.9, \sigma = 0.75$  (b). Параметр  $P = 1$  в обоих случаях и характеризует локальную связь.

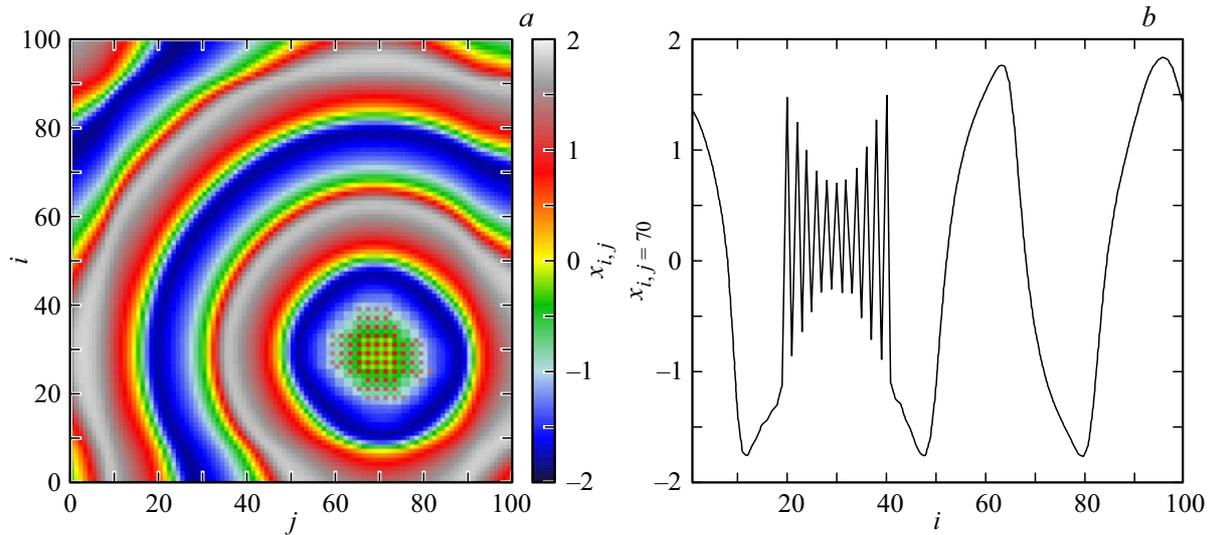


**Рис. 2.** Мгновенные значения амплитуд  $x_{i,j}$  для спиральной волновой структуры в (1) при  $P = 2$  для значений  $\omega = 0.9, \sigma = 0.75$  (a) и рождение кластера некогерентности в окрестности ведущего центра concentрической волны при  $P = 4$  для значений  $\omega = 1, \sigma = 0.7$  (b).

Двойные индексы переменных  $x_{i,j}$  и  $y_{i,j}$  для  $i, j = 1, \dots, N$  отмечают положение соответствующего осциллятора на двумерной решетке. Параметр  $\sigma$  обозначает силу связи между связанными по переменной  $x$  элементами,  $B_{i,j}^x$  дает размеры области связи элемента  $(i, j)$ , т.е. количество комбинаций  $m_x, n_x$ , удовлетворяющих условию (2) для каждого из узлов  $(i, j)$  сети [6,7]. Параметр  $P$  характеризует топологию связи. Случай  $P = 1$  соответствует локальной связи,  $P > 1$  характеризует нелокальную связь. Уравнения (1) решались методом Рунге–Кутты с шагом  $h = 0.001$ , рассматриваемые структуры наблюдались как минимум до  $t_{\max} = 100\,000$ , т.е. их можно считать установившимися.

Как показали численные исследования, в решетке (1) при локальной связи  $P = 1$  могут реализоваться режимы как спиральных (рис. 1, a), так и concentрических (рис. 1, b) волн. Отметим, что режимы спиральных и concentрических волн в различных 2D-ансамблях при локальной связи  $P = 1$  хорошо известны [9].

Введение нелокальной связи может характеризоваться новыми особенностями. Во-первых, возможен переход от concentрических структур к спиральным. Если, например, взять в качестве исходной структуры в локально связанной решетке при  $P = 1$  concentрическую волну при  $\omega = 0.9, \sigma = 0.75$  (рис. 1, b), то при увеличении радиуса связи в случае  $P = 2$  система переходит в



**Рис. 3.** Мгновенные значения амплитуд  $x_{i,j}$  (a) и одномерное сечение профиля мгновенных амплитуд при  $j = 70$  (b) для режима TWC в (1) при значениях  $\omega = 1$ ,  $\sigma = 0.7$  и  $P = 7$ .

режим спиральной волны (рис. 2, a). Во-вторых, при увеличении радиуса нелокальной связи до значений  $P \geq 4$  в системе (1) рождается новый тип структуры, показанный на рис. 2, b.

Как видно из рис. 2, b, вблизи ведущего центра (осциллятор с номерами  $i \simeq 18$ ,  $j \simeq 70$ ) рождается кластер осцилляторов с некогерентной динамикой. Картина качественно аналогична рождению некогерентного ядра в случае спирально-волновой химеры [4–7]. Естественно назвать структуру на рис. 2, b химерной, рожденной на основе концентрической автоволны. Понятию „концентрические волны“ в литературе на английском языке соответствует термин „target waves“. В связи с этим будем называть химерную структуру на рис. 2, b „target wave chimera“ (TWC). С целью иллюстрации некогерентности колебаний в ядре TWC проведем следующие вычисления. Рассмотрим мгновенный снимок амплитуд  $x_{i,j}$ , увеличив значение  $P$  до величины  $P = 7$ . Как видно из рис. 3, a, ядро некогерентности сохранилось. Рис. 3, b подтверждает наличие некогерентности колебаний в ядре химеры. Ниже и выше некогерентного кластера мгновенный профиль амплитуд характеризуется гладкой функцией, что свойственно когерентным колебаниям элементов решетки [13,14].

Обратим внимание на следующий факт. Из сравнения рис. 1, b, 2, b и 3, a, на которых представлены концентрические волновые структуры, рассчитанные для значения  $P = 1, 4$  и  $7$  соответственно, видно, что с ростом радиуса нелокальной связи  $P$  имеет место увеличение длины концентрической волны. Как показали расчеты, длина концентрической волны при вариации  $2 \leq P \leq 7$  растет по закону, близкому к линейному. Путем вариации параметра  $P$  можно осуществить управление длиной концентрической волны.

Результаты численного анализа динамики двумерного ансамбля нелокально связанных генераторов Ван дер Поля (1) позволяют сделать следующие выводы. В ансамбле как в условиях локальной ( $P = 1$ ), так и нелокальной ( $P > 1$ ) связи возбуждаются спиральные и концентрические автоволновые структуры. Установлено, что в условиях нелокальной связи в ансамбле рождается новый тип пространственно-временной структуры, который возникает на основе концентрических волн и включает кластер осцилляторов с некогерентной динамикой. Некогерентный кластер формируется в окрестности ведущего центра концентрической волны и имеет четкие границы в пространстве элементов ансамбля. Таким образом, можно утверждать, что обнаруженная пространственно-временная структура (рис. 3, a) является новым типом химерной структуры. Этот тип химеры естественно назвать химерной структурой на базе концентрических волн или „target wave chimera“. Поскольку концентрические волновые структуры используются при моделировании динамики сердечной мышцы, полученные в работе результаты могут быть интересны специалистам в этой области.

### Финансирование работы

Работа поддержана немецким физическим сообществом (Deutsche Forschungsgemeinschaft, German Research Foundation) (проект N 163436311-SFB 910) и Министерством науки и высшего образования РФ (проект № 3.8616.2017).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] *Кринский В.И., Михайлов А.С.* Автоволны. М.: Знание, 1984. 64 с.
- [2] *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [3] *Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С.* Введение в синергетику. М.: Наука, 1990. 272 с.
- [4] *Shima S., Kuramoto Y.* // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 69. N 3. P. 036213.
- [5] *Panaggio M.J., Abrams D.M.* // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. N 9. P. 094102.
- [6] *Schmidt A., Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A., Hövel P.* // *Phys. Rev. E.* 2017. V. 95. N 3. P. 032224.
- [7] *Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V.* // *Chaos Solit. Fract.* 2019. V. 120. P. 75–82.
- [8] *Zhang H., Hu B., Hu G.* // *Phys. Rev. E.* 2003. V. 68. N 2. P. 026134.
- [9] *Павлов Е.А., Осипов Г.В.* // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19. № 3. С. 116–126.
- [10] *Елькин Ю.Е.* // *Мат. биология и биоинформатика.* 2006. Т. 1. № 1. С. 27–40.
- [11] *Kuramoto Y., Battogtokh D.* // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* 2002. V. 5. N 4. P. 380–385.
- [12] *Abrams D.M., Strogatz S.H.* // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. N 17. P. 174102.
- [13] *Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel P., Maistrenko Y., Schöll E.* // *Phys. Rev. E.* 2012. V. 85. N 2. P. 026212.
- [14] *Bogomolov S.A., Slepnev A.V., Strelkova G.I., Schöll E., Anishchenko V.S.* // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017. V. 43. P. 25–36.