

01
Новый метод описания затухающих колебаний балки с одним заделанным концом

© С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
 360000 Нальчик, Россия
 e-mail: rsergo@mail.ru

Поступило в Редакцию 17 июля 2018 г.
 В окончательной редакции 17 февраля 2019 г.
 Принято к публикации 19 марта 2019 г.

Предложен метод описания затухающих колебаний заделанной с одной стороны балки с учетом динамического гистерезиса, который определяет диссипацию механической энергии за счет вязкоупругости. В качестве математической основы использован аппарат дробного интегро-дифференцирования. Проведены экспериментальные исследования быстро затухающих колебаний балки из пенополипропилена. Показано, что теоретическая модель успешно описывает экспериментальные результаты.

Ключевые слова: упругая балка, свободные затухающие колебания, вязкое демпфирование, дробное интегро-дифференцирование, дробный осциллятор.

DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48055.284-18

Введение

Задачи о колебаниях тел с распределенной массой, в частности балок, возникают во многих областях науки и техники — от строительной механики [1] до кремниевой микромеханики и зондовых нанотехнологий [2–5]. Математически эти задачи сводятся к краевым задачам для уравнений в частных производных параболического типа четвертого порядка. Решение этих задач даже без учета реальных внешних источников и полей, которые, как правило, являются нелинейными, представляет собой достаточно трудоемкую математическую процедуру [6–8]. Учет явления вязкоупругости [9,10] в задачах колебаний приводит к дополнительному их усложнению за счет появления в уравнениях интегро-дифференциальных операторов. В данном случае для построения математических моделей эффективно используется аппарат дробного интегро-дифференцирования [11,12].

Для реальных колебательных систем характерно явление динамического гистерезиса (динамической памяти или упругого последствия), которое появляется в результате циклического изменения механических напряжений, максимальная амплитуда которых значительно ниже предела упругости. Динамический гистерезис возникает вследствие диссипации энергии деформации при наличии вязкоупругости и традиционно описывается с точки зрения эквивалентного вязкого или конструкционного демпфирования [8]. Динамический гистерезис может быть также учтен путем введения в уравнение колебаний интегро-дифференциального оператора со степенной функцией памяти в качестве разностного ядра [9,11]. В настоящей работе на примере заделанной с одной стороны балки показано, что модель колебаний с дробным интегро-дифференциальным оператором Капуто в целом сопоставима с классической моделью

затухающих колебаний с вязким демпфированием и описывает экспериментальные данные. Найдена связь между порядком дробного интегро-дифференцирования и добротностью колебательной системы.

Эффективная масса осциллятора

Основному тону колебаний балки можно поставить в соответствие колебания эквивалентного точечного осциллятора, который имеет некоторую эффективную массу m . Чтобы это показать, воспользуемся методом Рэлея [8,10], который позволяет рассчитать собственную частоту колебаний тела с использованием только кинематических условий и без решения соответствующей краевой задачи для нестационарного уравнения в частных производных.

Потенциальная энергия изогнутой балки, выраженная через момент сил $M(x)$, равна

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M^2(x)}{f(x)} dx = \frac{k_{\perp} \Delta z^2}{2EJ} \int_0^l x^2 dx = \frac{k_{\perp} \Delta z^2 l^3}{6EJ}, \tag{1}$$

где k_{\perp} — жесткость балки в вертикальном направлении, E — модуль упругости материала балки, J — момент инерции поперечного сечения, l и Δz — длина и деформация балки. Приравнивая (1) к потенциальной энергии точечного осциллятора $k_{\perp} \Delta z^2 / 2$, получим

$$k_{\perp} = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{wE}{4} \left(\frac{h}{l} \right)^3, \tag{2}$$

где $J = wh^3/12$ для прямоугольного сечения, h и w — высота и ширина балки.

Для расчета собственной частоты колебаний методом Рэлея необходимо задать прогиб балки, вызванный сосредоточенной силой [8,10]. Функция прогиба заделанной с одной стороны балки может быть представлена в виде

$$\Delta z(x) = \frac{F_{\perp}}{EJ} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (3)$$

где F_{\perp} — сосредоточенная сила. Потенциальная энергия деформации балки, вычисленная с помощью (3), как это и требуется, совпадает с (1): $U = F_{\perp} \Delta z(l)/2$. Условная кинетическая энергия колебательного движения балки с учетом функции (3) равна

$$T = \frac{1}{2} \rho S \frac{F_{\perp}^2}{(EJ)^2} \int_0^l \Delta z(x) dx = \frac{11}{840} \rho S \frac{F_{\perp}^2 l^7}{(EJ)^2}, \quad (4)$$

где ρ — плотность материала балки, S — площадь поперечного сечения балки. С использованием (1) и (4) круговая частота основного тона колебаний балки вычисляется по формуле [8,10] $\omega_0 = \sqrt{U/T}$. Отсюда получаем следующую формулу для собственной частоты колебаний:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 0.16 \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 0.16 \frac{hc_s}{l^2}, \quad (5)$$

где c_s — скорость звука в длинном стержне. Эффективная масса эквивалентного точечного осциллятора есть

$$m = \frac{k_{\perp}}{\omega_0^2} = \frac{k_{\perp} T}{U} \approx 0.24 m_0, \quad (6)$$

где m_0 — фактическая масса балки. Формула (6) не содержит момента инерции поперечного сечения балки. Это означает, что данная формула справедлива для балки произвольной формы с постоянным поперечным сечением. Заметим также, что числовой множитель в (6) не является универсальной константой, а зависит от способа закрепления балки.

Метод Рэлея вычисления собственной частоты колебаний обеспечивает достаточно высокую точность; разница с точным выражением, полученным из уравнения свободных колебаний упругой балки с одним заделанным концом [8], обнаруживается только в числовом множителе (5) в третьем знаке после запятой. Эту разницу можно считать несущественной, поскольку погрешность определения модуля упругости различными экспериментальными методами может составлять более 10%.

Таким образом, вместо реальных колебаний заделанной с одной стороны балки можно рассматривать колебания эквивалентного точечного осциллятора, пружинная жесткость и масса которого определяются формулами (2) и (6).

Теоретическая модель

Рассмотрим сначала линейное дифференциальное уравнение затухающих колебаний точечного осциллятора, заданное в безразмерном виде [13]:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + 2D \frac{du}{d\xi} + u = 0, \quad (7)$$

$$u(\xi) = \frac{x(\xi)}{x_0}, \quad \xi = \omega_0 t, \quad D = \frac{\beta}{\omega_0},$$

где $x(\xi)$ — смещение, t — время, x_0 — начальное смещение, D — безразмерный коэффициент демпфирования, β — коэффициент затухания, ω_0 — круговая частота колебаний при $\beta = 0$, которая определяется формулой (5). К (7) присоединим начальные условия

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (8)$$

Решение задачи Коши (7), (8) имеет вид

$$u(\xi) = \exp(-D\xi) \left[\cos(\sqrt{1-D^2}\xi) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\sqrt{1-D^2}\xi) \right]. \quad (9)$$

Укажем на известные недостатки физической модели (7)–(9). Во-первых, согласно (9), полное прекращение колебаний осциллятора происходит при $\xi \rightarrow \infty$, что, очевидно, лишено физического смысла. Во-вторых, хотя и не во всех случаях [14], диссипативная сила, входящая в (7), не описывается принципом наименьшего действия, который применим строго для консервативных систем. Несмотря на эти недостатки, модель (7)–(9) успешно воспроизводит множество натуральных экспериментов и часто используется на практике.

Приведем теперь вывод уравнения колебаний осциллятора с дробным интегро-дифференциальным оператором, который учитывает эффект динамической памяти. Для этого запишем уравнение движения в виде

$$p(x, t) = \int_0^t G(t-t') F(x, t') dt', \quad (10)$$

где $p(x, t)$ — импульс, $F(x, t)$ — сила, $G(t)$ — функция памяти. Функция памяти в (10) определяет изменение импульса механической системы как реакцию на воздействие силы в виде дельта-функции Дирака. Если диссипация в системе отсутствуют, то в качестве функции памяти выступает единичная функция Хевисайда. Это соответствует идеальной памяти в консервативной системе, когда импульс механической системы не изменяется со временем после кратковременного воздействия силы. Наличие диссипации означает, что система постепенно „забывает“ о первоначальном воздействии силы. При этом функция Хевисайда „размывается“, что

в простейшем случае можно описать двухпараметрической степенной функцией

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{b}{(\omega_0 t)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (11)$$

где b — положительная константа, α — определяет интенсивность диссипации энергии. При $\alpha = 1$ диссипация отсутствует. Подставляя (11) в (10) и обращая дробный интеграл, с учетом формулы для упругой силы $F(x, t) = -k_{\perp}x$ получаем уравнение свободных колебаний так называемого дробного осциллятора:

$$\frac{d^{1+\alpha}u}{d\xi^{1+\alpha}} + bu = 0,$$

$$\frac{d^{1+\alpha}u(\xi)}{d\xi^{1+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\xi} \frac{d^2u(s)}{ds^2} \frac{ds}{(\xi-s)^{\alpha}}. \quad (12)$$

Интегро-дифференциальный оператор в (12) представляет собой дробную производную Капуто порядка $1 + \alpha$ [12,15]. Решение задачи Коши (12), (8) имеет вид

$$u(\xi) = E_{1+\alpha}(-b\xi^{1+\alpha}),$$

$$E_{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + 1)}, \quad \rho \geq 0, \quad (13)$$

где $E_{\rho}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера. Из свойств функции $E_{\rho}(z)$ следует, что решение (13) имеет конечное число вещественных нулей, зависящее от параметра α [16–18]. Физически это означает, что в отличие от классического осциллятора с вязким демпфированием затухающие колебания, которые описываются уравнением (12), не имеют бесконечную длительность. При $\xi \rightarrow +\infty$ функция $E_{1+\alpha}(-b\xi^{1+\alpha})$, не пересекая вещественную ось, стремится к нулю как степенная функция. В области осцилляций (т.е. в области существования нулей) при значениях α , близких к единице, функция Миттаг–Леффлера хорошо приближается формулой [17, теорема 1.1.3]

$$E_{1+\alpha}(-b\xi^{1+\alpha}) \approx \frac{2}{1+\alpha} \exp\left(\xi b^{1/(1+\alpha)} \cos\left(\frac{\pi}{1+\alpha}\right)\right) \times \cos\left(\xi b^{1/(1+\alpha)} \sin\left(\frac{\pi}{1+\alpha}\right)\right), \quad (14)$$

что позволяет качественно сравнивать решения (9) и (13).

Итак, имеются две модели затухающих колебаний осциллятора. В первой модели для учета диссипации в уравнение движения (7) вводится дополнительное слагаемое — сила вязкого трения. Во второй модели диссипация учитывается посредством функции динамической памяти (11) и дробной производной в (12). Требуется сравнить решения (9) и (13) и определить численные значения параметров D , b и α , при которых

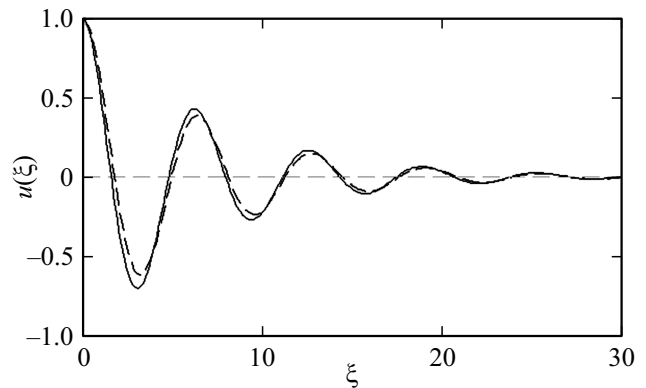


Рис. 1. Пример расчета затухающих колебаний осциллятора: сплошная кривая — формула (13), штриховая кривая — формула (9).

эти решения будут максимально приближены друг к другу. Для этого в настоящей работе проводилась оптимизация методом наименьших квадратов по всем трем параметрам. Вычислительный эксперимент показал, что параметр b близок к единице в широком диапазоне изменений параметров D и α . Таким образом, было найдено, что в (12) и (13) без существенной потери точности можно принять $b = 1$. Оптимизация методом наименьших квадратов по параметрам D и α при $b = 1$ показывает, что вместо (13) с приемлемой точностью может быть применена формула (14). Из этого получаются следующие (приближенные) соотношения между параметрами моделей:

$$\alpha = \frac{\pi}{\text{arccctg}\left(-\frac{\delta}{2\pi}\right)} - 1, \quad (15)$$

$$\omega = \omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{1+\alpha}\right) = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (16)$$

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{2D} = \frac{\omega_0}{2\beta}, \quad (17)$$

где δ — логарифмический декремент затухания, Q — добротность, ω — собственная частота затухающих колебаний. Из проведенного вычислительного эксперимента следует, что при соблюдении соотношений (15)–(17) модель с вязким демпфированием и дробно-дифференциальная модель дают достаточно близкие результаты уже при $Q > 3$. На рис. 1 в качестве примера приведены графики быстро затухающих колебаний, которые соответствуют (9) и (13) при $D = 0.15$ и $\alpha = 0.827$. С увеличением демпфирования осциллятора вплоть до возникновения аperiodического движения количественная разница между (9) и (13) возрастает, но качественное соответствие все же сохраняется. Для высокодобротных колебательных систем количественная разница между (9) и (13) при соблюдении соотношений (15)–(17) становится исчезающе малой. В этом случае из (15) и (17) получается простая формула,

которая связывает порядок дробной производной и добротность: $\alpha = 1 - 2/(\pi Q)$. Такая же формула получается и при рассмотрении вынужденных колебаний дробного осциллятора [19].

Экспериментальное исследование

В настоящей работе проводились экспериментальные исследования быстро затухающих колебаний прямоугольной балки из пенополипропилена. Размер балки: длина $l = 7.5$ см, ширина $w = 5.5$ см, высота $h = 7$ мм. Принцип работы измерительного стенда заключается в следующем. Балка жестко заделывается с одной выбранной стороны. На край свободной стороны балки приклеивается маленький магнит, масса и размеры которого намного меньше массы и размеров балки. На фиксированном расстоянии от магнита размещается катушка с сердечником, которая служит для детектирования колебаний. Колебания балки возбуждаются механическим способом. Для этого используется электродвигатель с малыми оборотами, к валу которого прикреплен отклоняющая пластина: в процессе вращения эта пластина цепляет образец за свободный край и тем самым возбуждает его колебания. Таким образом, при колебаниях в начальный момент времени обеспечивается определенный профиль изгиба балки, который задается формулой (3). Измерения электрических сигналов осуществлялось с помощью компьютерного генератора-осциллографа PCSGU-250.

На рис. 2 показана осциллограмма сигнала. Частота затухающих колебаний исследованного образца и порядок дробной производной в уравнении (12) равны соответственно $f = 30.6$ Hz и $\alpha = 0.904$. Из этих данных определяются добротность и частота собственных колебаний $Q = 6.329$ и $f_0 = 30.7$ Hz, а также с использованием формулы (5) оценивается скорость звука в образце пенополипропилена $c_s = 0.154$ km/s. Полученное значение скорости звука для вспененного полипропи-

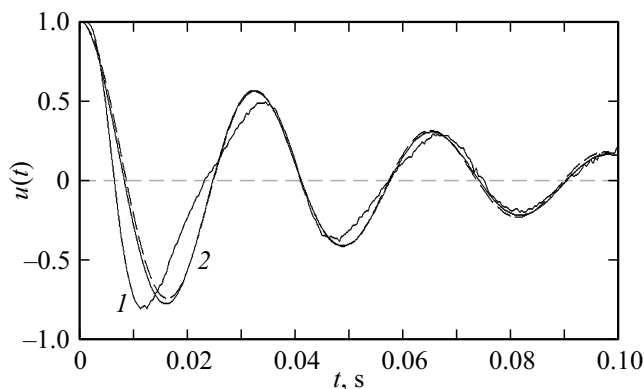


Рис. 2. Осциллограмма сигнала колебаний прямоугольной балки из пенополипропилена с одним заделанным концом: 1 — эксперимент, 2 — расчет (сплошная кривая — формула (13), штриховая кривая — формула (9)).

лена оказывается на порядок ниже, чем у различных сплошных образцов [20] и примерно в два раза выше, чем у жидких пен [21].

В нашем случае решения (13) и (9) почти одинаково описывают эксперименты. Несовпадение расчетов с данными экспериментов на начальном участке обусловлено нелинейным характером деформации балки в начальный момент времени. По мере увеличения длительности сигнала эта нелинейность, однако, быстро исчезает, и затухающие колебания хорошо описываются линейными моделями (7) и (12).

Заключение

В работе предложена новая теоретическая модель для описания затухающих колебаний заделанной с одной стороны балки. Модель основывается на применении математического аппарата дробного интегро-дифференцирования. Дробная производная Капуто в уравнении движения осциллятора (12) учитывает диссипацию энергии; формулы (15)–(17) связывают параметры дробно-дифференциальной модели с параметрами классической модели колебаний с вязким демпфированием. Показано, что порядок дробной производной Капуто выражается через логарифмический декремент затухания колебаний.

Из полученных в работе результатов следует, что для изучения диссипативных процессов в различных колебательных физических системах можно использовать дробное диффузионно-волновое уравнение вида [22–24]

$$\frac{\partial^{1+\alpha} u}{\partial t^{1+\alpha}} - \lambda \Delta u = f(\mathbf{r}, t), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Данное уравнение, в частности, представляется вполне уместной альтернативой телеграфного уравнения в электродинамике. Решение различных начально-краевых задач для диффузионно-волнового уравнения позволит естественным образом учесть диссипативные процессы в задачах механики и электродинамики.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-51-45005.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Киселев В.А. Строительная механика. М.: Стройиздат, 1976. 511 с.
- [2] Butt H.-J., Jäschke M. // Nanotechnology. 1995. Vol. 6. P. 1–7.
- [3] Stark R.W., Heckl W.M. // Surf. Sci. 2000. Vol. 457. P. 219–228.

- [4] *Rodriguez T.R., Garcia R.* // Appl. Phys. Lett. 2002. Vol. 80. P. 1646–1648.
- [5] *Korayem M.H., Ebrahimi N., Korayem A.H.* // Nanoscience and Nanotechnology. 2011. Vol. 1. N 1. P.14–21.
- [6] *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 503 с.
- [7] *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- [8] *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
- [9] *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
- [10] *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 744 с.
- [11] *Олемской А.И., Флат А.Я.* // УФН. 1993. Т. 163. № 12. С. 1–50.
- [12] *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во Артишок, 2008. 512 с.
- [13] *Магнус К.* Колебания: введение в исследование колебательных систем. / Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 304 с.
- [14] *Шалашов А.Г.* // УФН. 2018. Т. 188. № 11. С. 1191–1197.
- [15] *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
- [16] *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
- [17] *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
- [18] *Псху А.В.* // Мат. заметки. 2005. Т. 77. № 4. С. 592–599.
- [19] *Псху А.В., Рехвиашвили С.Ш.* // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. Вып. 1. С. 34–37.
- [20] Полипропилен / Под ред. В.И. Пилиповского, И.К. Ярцева. Л.: Химия, 1967. 316 с.
- [21] *Pierre J., Guillermic R.-M., Elias F., Drenckhan W., Leroy V.* // European Phys. J. E. 2013. Vol. 36. P. 113.
- [22] *Псху А.В.* // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. № 2. С. 141–182.
- [23] *Luchko Y., Mainardi F.* // Cent. Eur. J. Phys. 2013. Vol. 11. N 6. P. 666–675.
- [24] *Luchko Y., Mainardi F.* // J. Vib. Acoust. 2014. Vol. 136. N 5. P. 051008.