Журнал технической физики, 2019, том 89, вып. 9

11

Векторный потенциал электромагнитной волны над сильноиндуктивной двуслойной земной поверхностью

© В.К. Балханов, Ю.Б. Башкуев, Л.Х. Ангархаева

Институт физического материаловедения СО РАН,
670047 Улан-Удэ, Россия
e-mail: ludang@rambler.ru

Поступило в Редакцию 15 февраля 2019 г.
В окончательной редакции 15 февраля 2019 г.
Принято к публикации 3 марта 2019 г.

Определены вертикальные компоненты векторного потенциала электромагнитной волны для двуслойной сильноиндуктивной импедансной среды. Решение представлено в виде интеграла Зоммерфельда. Особые точки этого интеграла определены с помощью эффективных параметров. Рассмотрен вопрос о фазовой скорости поверхностной электромагнитной волны. Показано, что эта скорость всегда меньше скорости света в вакууме. Это означает, что поверхностные электромагнитные волны не являются волнами Ценнека, у которых фазовая скорость больше скорости света, как у электромагнитных волн в волноводах.

Ключевые слова: электромагнитная волна, фурье-образы, импеданс.

DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48072.55-19

Введение

Существование поверхностной электромагнитной волны (ПЭВ) возможно только над сильноиндуктивной средой. Такая среда в природе реализуется в виде двуслойной среды, когда диэлектрический слой расположен на проводящем основании. Например, лед на соленой воде. Структура „диэлектрик на проводнике" при этом играет роль открытого волновода, вне которого вертикально поляризованная электромагнитная волна экспоненциально затухает по высоте. Поэтому такую волну называют поверхностной волной. Впервые ПЭВ по аналогии с упругими поверхностными волнами Релея ввел А. Зоммерфельд в 1899 г. для случая распространения волны вдоль цилиндрического проводника [1]. В последнее время ПЭВ нашли применение в технических устройствах. Выяснены многие их свойства, важные для практического использования [2,3]. Однако остается открытым вопрос о фазовой скорости ПЭВ. В настоящей работе при решении волнового уравнения с источником для двуслойной среды установлено, что для сильноиндуктивной двуслойной среды фазовая скорость ПЭВ меньше скорости света в вакууме. Решение волнового уравнения с источником в этой задаче выражается в виде известного интеграла Зоммерфельда [4].

При решении волнового уравнения с источником в виде вертикального точечного диполя Герца получены фурье-образы векторного потенциала двуслойной среды. Векторный потенциал с помощью своего фурье-образа выражен в волновой зоне в виде интеграла Зоммерфельда. Этот интеграл вычислен для сильноиндуктивной среды, для которой не применим метод перевала. Электрические свойства двуслойной сильноиндуктивной среды описаны одной величиной — приведенным поверхностным импедансом δ. В настоящей работе векторный потенциал в свободном пространстве и в подстилающей среде выражен через импеданс. Показано, что электромагнитная волна экспоненциально затухает в свободном пространстве и в нижнем проводящем слое, поэтому ее называют поверхностной электромагнитной волной. Рассмотрены значения импеданса для некоторых областей сильноиндуктивной земной поверхности.

Эффективные параметры неоднородной среды

Задачу о распространении электромагнитной волны вдоль земной поверхности более 100 лет назад впервые поставил и рассмотрел А. Зоммерфельд [1]. Решение этой задачи Зоммерфельд выразил в виде комплексного интеграла, вычисление которого до сих пор вызывает большие математические трудности [5–9]. Решение Зоммерфельда рассматривало только однородную среду. Однако необходимо рассматривать неоднородную импедансную среду, многослойную или градиентную. Здесь удобно ввести понятие эффективной среды, когда на каждой частоте ω среда имеет эффективные значения диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}$ и электрической проводимости $\tilde{\sigma}$. Тогда импеданс δ однородной среды будет иметь следующий известный вид [10]:

$$\delta = (1 + \tilde{\varepsilon} + i\tilde{\sigma}/\varepsilon_0\omega)^{-1/2}. \qquad (1)$$

Квадрат эффективного волнового числа $\tilde{k}$ электромагнитной (ЕМ) волны в такой среде

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\tilde{\varepsilon} + \frac{i\tilde{\sigma}}{\varepsilon_0\omega}\right). \qquad (2)$$

Здесь ε_0 — диэлектрическая постоянная вакуума, c — скорость света. Принята временная зависимость $\exp(-i\omega t)$.

Излучатель и приемник обычно находятся над землей, в свободном пространстве (атмосфере). Волновое число ЕМ-поля в атмосфере есть $k_0 = \omega/c$. Комбинируя (1) и (2), получаем

$$\tilde{k} = k_0\sqrt{1-\delta^2}/\delta. \qquad (3)$$

В таком виде формулы справедливы для любой подстилающей среды — однородной, многослойной или градиентной. Отметим, что $\tilde{k}$ выражено непосредственно через измеримую величину — импеданс δ.

Из формулы (1) следует, что импеданс является комплексным числом, которое записывают в двух формах. Либо как $\delta = |\delta|\exp(i\varphi_\delta)$, где $|\delta|$ — модуль и φ_δ — фаза импеданса; либо как $\delta = \mathrm{Re}\delta + i\mathrm{Im}\delta$, где $\mathrm{Re}\delta$ — действительная и $\mathrm{Im}\delta$ — мнимая части импеданса. На земной поверхности многие среды являются сильноиндуктивными, у которых фаза импеданса $-45.1^\circ < \varphi_\delta < -89.9^\circ$ [2–4]. Это круглогодичные паковые льды на соленой воде Северного Ледовитого океана, также лесная растительность на проводящей почве, вечная мерзлота в северных регионах и соленые озера зимой в Сибири, Китае и Монголии.

Приведем значения импеданса для известных природных сильноиндуктивных сред. В зимний период на одном из соленых озер Сибири были проведены измерения ПЭВ [11]. Из результатов этих измерений на частоте 279 kHz был определен импеданс $\delta = 0.003 - i0.008$, $|\delta| = 0.0086$, $\varphi_\delta = -70^\circ$. Из (1) легко выражаем

$$\tilde{\varepsilon} = \cos(2\varphi_\delta)/|\delta|^2 - 1,$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{\varepsilon_0\omega\sin(-2\varphi_\delta)}{|\delta|^2}.$$

Откуда

$$\tilde{\varepsilon} = -10358, \quad \tilde{\sigma} = 0.135\,\mathrm{S/m}.$$

Интересно, что эффективная проводимость $\tilde{\sigma}$ приняла значение, среднее между ∞ (проводник) и 0 (воздух). Для диэлектрической проницаемости понятие о среднем не подходит. Здесь для воздуха $\varepsilon = 1$, для льда $\varepsilon \approx 3-5$, а эффективное значение $\tilde{\varepsilon} = -10358$. Утверждение, что диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы, относится к однородным по своим физическим свойствам (составу, температуре и т.п.) средам [12]. Для неоднородных сред отрицательное значение ε свидетельствует лишь о слоистости (неоднородности) среды. Как видим, она может быть отрицательной с большим численным значением. Поскольку на рассматриваемой частоте $\tilde{\sigma}/(\varepsilon_0\omega) = 8691$, то

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(-10358 + i8691).$$

Здесь модуль действительной части квадрата эффективного волнового числа соизмерим с модулем мнимой части. Важно, что из приведенного примера следует, что для сильноиндуктивной импедансной среды импеданс имеет вид

$$\delta = \mathrm{Re}\delta - i|\mathrm{Im}\delta|, \quad |\mathrm{Im}\delta| > \mathrm{Re}\delta. \qquad (4)$$

Для сильноиндуктивной импедансной среды мнимая часть импеданса больше его действительной части.

Сильноиндуктивным импедансом обладают двуслойные среды, у которых, как правило, первый слой является диэлектрическим, а второй — проводящим. Целью настоящей работы является определение для такой двуслойной среды векторного потенциала, из которого будет уже легко найти остальные компоненты ЕМ-поля.

Векторный потенциал двуслойной среды

Примем, что вертикальный диполь расположен на высоте $z = l$ от плоской границы xy раздела „атмосфера–подстилающая двуслойная среда“. В атмосфере волновое число ранее мы обозначили как k_0. В первом слое толщиной h волновое число будет k_1. Во втором неограниченном снизу слое волновое число k_2. Поскольку граничные условия $z = 0$ и $z = -h$ не зависят от времени, частота во всех слоях будет одна и та же. Поэтому временной множитель $\exp(-i\omega t)$ можно явно не выписывать, но нужно иметь его в виду. Далее, поскольку квадрат волнового числа

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}\right),$$

то рассматриваем такой интервал частот, что в каждой из сред

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \;\; k_1^2 = k_0^2\sqrt{\varepsilon}, \quad k_2^2 = k_0^2\,\frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega}.$$

Причем для сильноиндуктивной среды можно принять

$$k_2 \gg k_1 \gg k_0.$$

Для единственной ненулевой z-компоненты векторного потенциала A_z выражение дается следующим интегралом [1]:

$$A_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\chi(z)H_0(\chi R)\chi d\chi. \qquad (5)$$

Здесь радиальная координата R расположена на плоскости xy и равна $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, χ — переменная интегрирования. В волновой зоне, когда $\chi R \gg 1$, функция Ганкеля $H_0(\chi R)$ имеет асимптотический вид [13]

$$H_0(\chi R) = \sqrt{\frac{2}{\pi i\chi R}}\exp(i\chi R). \qquad (6)$$

Фурье-образ A_χ подчиняется волновому уравнению с источником

$$\frac{d^2A_\chi}{dz^2} - (\chi^2 - k^2)A_\chi = -4\pi J_0 \delta(z - l). \tag{7}$$

Здесь $J_0 = \mu_0 Ja/4\pi$, J — ток в диполе, a — длина диполя, μ_0 — магнитная постоянная, $\delta(z - l)$ — функция Дирака.

Интеграл (5) с функцией (6) называется интегралом Зоммерфельда.

Фурье-образ A_χ векторного потенциала плоскую границу xy пересекает непрерывным образом, т. е. без разрыва. Это означает, что на границе $z = 0$ должно быть $A_\chi(+0) - A_\chi(-0) = 0$. Кратко это равенство записывают в виде $A_\chi|_{-0}^{+0} = 0$ [14]. Далее проинтегрируем уравнение (7) по z от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку фурье-образ A_χ на бесконечности исчезает, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A_\chi dz = 0.$$

Этому условию удовлетворяет не каждая математическая функция, но оно должно выполняться для физически разумной функции, какой является векторный потенциал. Из-за наличия функции $\delta(z - l)$ в уравнении (7) в точке $z = l$ справа получаем $-4\pi J_0$. Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2A_\chi}{dz^2}\, dz = \frac{dA_\chi}{dz}\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

эта разность равна $-4\pi J_0$. Таким образом, из-за наличия функции $\delta(z - l)$ в атмосфере появляется дополнительная граница при $z = l$, и на ней будут соблюдаться следующие граничные условия:

$$A_\chi|_{l-0}^{l+0} = 0, \quad \frac{dA_\chi}{dz}\Big|_{l-\infty}^{l+\infty} = -4\pi J_0. \tag{8}$$

Для остальных границ $z = 0$ и $z = -h$ имеем обычные условия

$$A_\chi|_{-0}^{+0} = 0, \quad \frac{1}{k^2}\frac{dA_\chi}{dz}\Big|_{-0}^{+0} = 0. \tag{9}$$

$$A_\chi|_{-h-0}^{-h+0} = 0, \quad \frac{1}{k^2}\frac{dA_\chi}{dz}\Big|_{-h-0}^{-h+0} = 0. \tag{10}$$

Поскольку внутри каждого ограниченного слоя волна распространяется в обоих направлениях, фурье-образ векторного потенциала в каждом слое будет

$$A_\chi = W\exp(-\mu_0 z) \quad \text{при } z > l, \tag{11}$$

$$A_\chi = M\exp(-\mu_0 z) + C\exp(\mu_0 z) \text{ при } l > z > 0, \tag{12}$$

$$A_\chi = D\exp(\mu_1 z) + E\exp(-\mu_1 z) \text{ при } 0 > z > -h, \tag{13}$$

$$A_\chi = F\exp(\mu_2 z) \quad \text{при } -h > z. \tag{14}$$

Здесь $\mu = \sqrt{\chi^2 - k^2}$, причем надо полагать при $z > 0$ $\mu = +i\sqrt{k^2 - \chi^2}$, а при $z < 0$ $\mu = -i\sqrt{k^2 - \chi^2}$. (Можно записать в виде одной формулы: $\mu = i\sqrt{k^2 - \chi^2}(z/|z|)$.) Такой выбор знаков перед квадратным корнем необходим, чтобы поле на бесконечности исчезало. Подставляя потенциалы (11)−(14) в граничные условия (8)−(10), получим шесть уравнений. Простые действия позволяют выписать их решения. Если ввести

$$\Omega_{10} = \frac{\mu_1 k_0^2}{\mu_0 k_1^2}, \quad \Omega_{12} = \frac{\mu_1 k_2^2}{\mu_2 k_1^2}.$$

$$L_- = (1 + \Omega_{10})(\Omega_{12} + 1) + (1 - \Omega_{10})(\Omega_{12} - 1)\exp(-2\mu_1 h),$$

$$L_+ = (1 - \Omega_{10})(\Omega_{12} + 1) + (1 + \Omega_{10})(\Omega_{12} - 1)\exp(-2\mu_1 h),$$

то решения представятся в следующих явных выражениях:

$$W = \left(\frac{L_-}{L_+} + \exp(2\mu_0 l)\right)\frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l), \tag{15}$$

$$M = \frac{L_-}{L_+}\frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l), \tag{16}$$

$$C = \frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l), \tag{17}$$

$$D = \frac{2(\Omega_{12} + 1)}{L_+}\frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l - 2\mu_1 h), \tag{18}$$

$$E = \frac{2(\Omega_{12} + 1)}{L_+}\frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l), \tag{19}$$

$$F = \frac{4\Omega_{12}}{L_+}\frac{2\pi J_0}{\mu_0}\exp(-\mu_0 l - \mu_1 h + \mu_2 h). \tag{20}$$

Подставляя (15)−(20) в (7), получим интегралы Зоммерфельда, вычисление которых в настоящее время представляет большие математические трудности. Так, например, даже для однородной среды интеграл Зоммерфельда методом перевала удается вычислить в волновой зоне только для прямой, отраженной и боковой ЕМ-волн [12,14,15].

Поверхностная электромагнитная волна

Важным дополнением к трем случаям вычисления интеграла Зоммерфельда для прямой, отраженной и боковой волн, являются поверхностные ЕМ-волны (ПЭВ). Причем здесь есть существенное отличие. Для определения траектории прямой, отраженной и боковой ЕМ-волн можно применить принцип Ферма, который позволяет определить для параметра интегрирования в интеграле Зоммерфельда особую точку χ_0, в которой методом перевала и вычисляется этот интеграл [14,15]. Но для ПЭВ этого принципа нет. ПЭВ как волновое движение одновременно существует во всех трех средах — воздушной среде, диэлектрическом слое и проводящем основании. И для него невозможно представить луч как нормаль к фазовому фронту волны одновременно во всех средах.

В волновой зоне, далеко от излучателя, высоту l почти не видно $l \ll R$, где R — расстояние между излучателем и точкой приема электромагнитного поля. Поэтому можно положить $l = 0$. Измерение ЕМ-поля обычно производится над границей раздела „воздух–подстилающая среда". На ней векторный потенциал обозначим как A_{z0}. Согласно выражению (12) и решению (16) при $l = 0$, для него будем иметь

$$A_{z0} = \frac{J_0}{\sqrt{2\pi i R}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L_-}{L_+} \frac{\sqrt{\chi}}{\mu_0} \exp(-\mu_0 z + i\chi R) d\chi. \quad (21)$$

При больших значениях R смещаем путь интегрирования в нижнюю полуплоскость χ, где подынтегральное выражение быстро убывает. Напомним, что большим R отвечает волновая зона. При смещении надо обходить все нули знаменателя функции L_-/L_+ и ее точки ветвления. В результате интеграл будет в основном пропорционален $\exp f(-\mu_0(\chi_0) + \chi_0 R)$, где χ_0 — одна из особых точек, ближайшая к вещественной оси. Особую точку легко найти в случае $h = 0$. Приравнивая знаменатель функции L_-/L_+ нулю, сначала находим $\Omega_{10} = \Omega_{12}$. Отсюда получаем уравнение $k_0^2\sqrt{\chi^2 - k_2^2} = k_2^2\sqrt{\chi^2 - k_0^2}$ и его решение $\chi_0 = k_0 k_2/\sqrt{k_0^2 + k_2^2}$. Если положить $h = \infty$, то находим $\Omega_{10} = 1$, откуда $\chi_0 = k_0 k_1/\sqrt{k_0^2 + k_1^2}$. При конечном h вместо k_1 или k_2 надо ввести эффективное волновое число $\tilde{k}$, как это сделано в формуле (2), тогда

$$\chi_0 = \frac{k_0 \tilde{k}}{\sqrt{k_0^2 + \tilde{k}^2}}.$$

Используя вместо $\tilde{k}$ его значение (3), окончательно находим особую точку интеграла Зоммерфельда (21) в воздушной среде

$$\chi_0 = k_0\sqrt{1 - \delta^2}. \quad (22)$$

Нас будет интересовать пространственная характеристика векторного потенциала, его зависимость от координат R и z. Для этого надо подставить (22) в экспоненту в интеграле (21), как это выяснили выше. В итоге находим векторный потенциал в свободном пространстве

$$A_{z0} = \frac{K_0}{\sqrt{R}} \exp\Big(-ik_0\delta z + ik_0\sqrt{1 - \delta^2}R\Big). \quad (23)$$

Векторный потенциал в импедансной среде обозначим как A_z. Для него сначала имеем следующий интеграл Зоммерфельда:

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F \exp(\mu_2 z) \sqrt{\frac{2}{\pi i \chi R}} \exp(i\chi R) \chi d\chi.$$

Используя (20), получаем

$$A_z = \frac{4J_0}{\sqrt{2\pi i R}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{12}}{L_+} \frac{\sqrt{\chi}}{\mu_0} \times \exp(-\mu_1 h + \mu_2 h + \mu_2 z + i\chi R) d\chi.$$

Поскольку нас интересует зависимость от координат R и z, на зависимости от h можно не отвлекаться. Так же как и ранее, приравнивая L_+ нулю, найдем, что особая точка дается тем же выражением (22). При подстановке ее значения, а также k_2 вместо $\tilde{k}$ из соотношения (3), в экспоненту в интеграле сначала имеем

$$\mu_2 = -i\sqrt{k_2^2 - \chi^2} = -ik_0(1 - \delta^2)/\delta.$$

И для векторного потенциала в импедансной среде получаем

$$A_z = \frac{K}{\sqrt{R}} \exp\left(-ik_0 \frac{1 - \delta^2}{\delta} z + ik_0\sqrt{1 - \delta^2}R\right). \quad (24)$$

В обоих выражениях (23) и (24) все слагаемые в фазе экспоненты выражены через импеданс подстилающей среды. Это одно из проявлений полезных свойств введения импеданса.

Подставляя формулу (4) в выражения (23) и (24), а также пренебрегая везде, где это возможно квадратом импеданса, получаем

$$A_{z0}(R, z, t) = \frac{K_0}{\sqrt{R}} \exp\Big[-i\mathrm{Re}\delta k_0 z - |\mathrm{Im}\delta| k_0 z + (ik_0 R - i\omega t) - \mathrm{Re}\delta|\mathrm{Im}\delta| k_0 R\Big],$$

$$A_z(R, z, t) = \frac{K_0}{\sqrt{R}} \exp\left[i\frac{\mathrm{Re}\delta}{|\delta|^2} k_0 z + \frac{|\mathrm{Im}\delta|}{|\delta|^2} k_0 z + (ik_0 R - i\omega t) - \mathrm{Re}\delta|\mathrm{Im}\delta| k_0 R\right].$$

Здесь $|\delta|^2 = (\mathrm{Re}\delta)^2 + (\mathrm{Im}\delta)^2$, и явно вставили $\exp(-i\omega t)$, чтобы не забывать, что рассматриваем волновое движение.

Из решений следует, что векторный потенциал в свободном пространстве затухает как

$$\exp(-|\mathrm{Im}\delta| k_0 z).$$

В сильноиндуктивной среде векторный потенциал затухает как

$$\exp\left(+\frac{|\mathrm{Im}\delta|}{|\delta|^2} k_0 z\right).$$

Напомним, что координата z в среде принимает отрицательные значения. Результаты означают, что ПЭВ не может „углубиться" в импедансную среду. В общем, ПЭВ при своем распространении как бы „стелется" вдоль земной поверхности, не отрываясь от нее. Поэтому ее и называют ПЭВ. Как и положено, волна с высотой уменьшается. Вверх ПЭВ может распространиться только на высоту [4]

$$H_a = \frac{1}{k_0|\mathrm{Im}\delta|},$$

или по порядку величин

$$H_a \sim \frac{\lambda_0}{\delta}.$$

Здесь λ_0 — длина волны в свободном пространстве. В сплошную импедансную среду ПЭВ углубляется только на глубину

$$H_m \sim \delta\lambda_0.$$

Если $\delta = 0.1$, то $H \sim 10\lambda_0$, т. е. ПЭВ может подняться на высоту не большую, чем на порядок превышающую длину волны λ_0. Например, частоте 100 MHz соответствует длина волны 3 m. ПЭВ с такой частотой удаляется от поверхности не больше, чем на 30 m. В сплошную среду ПЭВ проникнет только на глубину $0.1 \times 3 = 0.3$ m. ПЭВ буквально стелется вдоль земной поверхности.

Теперь простым дифференцированием легко установить все компоненты ЕМ-поля в рассматриваемых средах. Источником излучения электромагнитных волн зачастую является вертикальная электрическая антенна. Тем более А. Зоммерфельд доказал (как сказано в книге [1]), что „с возрастанием расстояния от антенны излучение становится все более сходным с излучением вертикальной антенны“. Кто имел дело с карманным транзисторным приемником, тот знает, что оптимальный прием радиостанции происходит только при одной горизонтальной ориентации магнитной антенны в виде ферритового стержня. Таким образом, теория и опыт показывают, что вдали от излучателя вблизи земной поверхности в цилиндрической системе координат магнитная индукция имеет только одну ненулевую горизонтальную компоненту, ортогональную направлению на источник электромагнитного излучения, т. е.

$$\mathbf{B} = \big(B_r = 0; B_\varphi(r,z); B_z = 0\big). \tag{25}$$

В прямоугольной декартовой системе координат будет

$$\mathbf{B} = \big(B_x = 0; B_y(x,z); B_z = 0\big).$$

Напомним, в декартовой системе координат радиус-вектор $\mathbf{r}$ имеет компоненты $(x; y; z)$, в цилиндрической системе координат — $(r; \varphi; z)$. Далее в цилиндрической системе координат операция $\mathbf{rot}(\nabla\times)$ выглядит так:

$$(\nabla\times\mathbf{B})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z},$$

$$(\nabla\times\mathbf{B})_\varphi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

$$(\nabla\times\mathbf{B})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}.$$

С учетом (25) находим

$$(\nabla\times\mathbf{B})_r = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad (\nabla\times\mathbf{B})_\varphi = 0,$$

$$(\nabla\times\mathbf{B})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\varphi).$$

Отсюда

$$\mathbf{E} = \big(E_r(r,z); E_\varphi = 0; E_z(r,z)\big).$$

При нашем выборе ориентации декартовой системы координат из одного из уравнений Максвелла $\nabla\times\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}$, если $\mathbf{B} = (0, B_y, 0)$, следует

$$i\omega B_x = 0,\ i\omega B_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\ i\omega B_z = 0.$$

Отсюда

$$\mathbf{E} = \big(E_x(x,z); E_y = 0; E_z(x,z)\big).$$

Таким образом, в декартовой и цилиндрической системах координат векторы электромагнитных полей имеют одинаковое количество ненулевых компонент.

В цилиндрической системе координат единственная ненулевая компонента магнитной индукции

$$B_\varphi = (\nabla\times\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Магнитная индукция B_φ и векторный потенциал A_z имеют только по одной ненулевой компоненте. Поэтому горизонтальная компонента магнитной индукции будет

$$B_\varphi(R,z) = -\frac{\partial A_z(R,z)}{\partial R}.$$

Поскольку на границе $z = 0$ горизонтальные компоненты магнитной индукции для немагнитных сред равны, отсюда следует, что постоянные множители K_0 и K в (23) и (24) равны друг другу. Выражения для ненулевых компонент ЕМ-поля полностью приведены в работе [16]. Отметим, что дифференцировать по R надо только экспоненциальный множитель. Если дифференцировать предэкспоненциальные множители, то появятся малые слагаемые, пропорциональные степеням $1/\chi R$, которые можно опустить.

Фазовая скорость ПЭВ

Выпишем векторный потенциал в свободном пространстве с учетом временной зависимости, интересуясь только зависимостью от радиальной координаты:

$$A_{z0} = \frac{L}{\sqrt{R}}\exp\Big(-i\omega t + ik_0\sqrt{1-\delta^2}R\Big).$$

В множитель L „спрятали“ все, что не зависит от времени и радиальной координаты. Далее учтем, что $\delta \ll 1$. Если вообще пренебречь импедансом, то получим

$$A_{z0} = \frac{L}{\sqrt{R}}\exp\Big(-i\omega t + ik_0R\Big).$$

Отсюда находим фазовую скорость

$$v_f = \frac{\omega}{k_0} = c$$

и групповую

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_0} = c,$$

т. е. в нулевом приближении фазовая и групповая скорости ПЭВ равны друг другу и скорости света.

В следующем приближении по импедансу при $\delta \ll 1$:

$$A_{z0} = \frac{K}{\sqrt{R}} \exp\Big(-i\omega t + ik_0 R - ik_0 \frac{\delta^2}{2} R\Big).$$

Теперь явно выпишем $\delta = \mathrm{Re}\delta - i|\mathrm{Im}\delta|$ и учтем, что $|\mathrm{Im}\delta| > \mathrm{Re}\delta$. Тогда

$$A_{z0} = \frac{K}{\sqrt{R}} \exp\Big(- i\omega t + ik_0 R + ik_0 \frac{\mathrm{Im}^2\delta - \mathrm{Re}^2\delta}{2} R - k_0 \mathrm{Re}\delta |\mathrm{Im}\delta| R\Big).$$

Отсюда находим фазовую скорость

$$v_f = \frac{\omega}{k_0 + k_0(\mathrm{Im}^2\delta - \mathrm{Re}^2\delta)/2} = \frac{c}{1 + (\mathrm{Im}^2\delta - \mathrm{Re}^2\delta)/2} < c.$$

Следовательно, фазовая скорость ПЭВ всегда меньше скорости света. Можно сделать вывод, что рассматриваемая нами ПЭВ не является так называемой волной Ценнека, для которой фазовая скорость больше скорости света.

Заключение

Установлены фурье-образы векторного потенциала для двуслойной среды. Сами векторные потенциалы выражаются в виде комплексных интегралов Зоммерфельда. Показано, что эти интегралы можно вычислить в волновой зоне для сильно индуктивной подстилающей земной поверхности. Результаты выражены через реально измеримую величину — приведенный поверхностный импеданс. Установлена фазовая скорость ПЭВ, которая оказалась меньше скорости света. Результат означает, что ПЭВ не является волной Ценнека, для которой фазовая скорость больше скорости света.

Финансирование работы

Работа выполнена в ИФМ СО РАН по госбюджетному проекту „Распространение радиоволн в неоднородных импедансных каналах“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Sommerfeld A.* // Ann. der Physik und Chem. 1899. Vol. 67. P. 233–290.

[2] Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела. Сб. науч. тр. / Под. ред. В.М. Аграновича, Д.Л. Миллса. М.: Наука, 1985. 525 с.

[3] *Князев Б.А., Кузьмин А.В.* // Вестн. Новосибирского гос. ун-та. Серия: Физика. 2007. Т. 2. Вып. 1. С. 108–122.

[4] *Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т.* Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью. М.: Наука, 1991. 196 с.

[5] *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Наука, Физматлит, 1999. 496 с.

[6] *Котов Л.Н., Краев Н.П., Тихомиров Н.П.* Основы теории распространения радиоволн над земной поверхностью. Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2004. 102 с.

[7] *Кураев А.А., Попкова Т.Л., Синицын А.К.* Электродинамика и распространение радиоволн. Минск: Бестпринт, 2004. 357 с.

[8] *Lindell I.V., Alanen E.* // IEEE Trans. Antennas and Propagation. 1984. Vol. AP-32. N 8. P. 841–847.

[9] *Hong-qi Zhang, Wei-yan Pan.* // Radio Science. 2002. Vol. 37. N 4. P. 1–7. DOI: 10.1029/2000RS002348

[10] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* Основы теории метода поверхностного импеданса. Улан-Удэ: Изд-во Бурят. НЦ СО РАН, 2005. 100 с.

[11] *Башкуев Ю.Б., Нагуслаева И.Б., Хаптанов В.Б., Дембелов М.Г.* // ЖТФ. 2016. Т. 86. Вып. 2. С. 153–155. [*Bashkuev Y.B., Naguslaeva I.B., Khaptanov V.B., Dembelov M.G.* // Tech. Phys. 2016. Vol. 61. N 2. P. 310–312.
DOI: 10.1134/S1063784216020055]

[12] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2003. 656 с.

[13] *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. 392 с.

[14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

[15] *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т. 1. Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 442 с.

[16] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 4. С. 599–603. DOI: 10.21883/JTF.2017.04.44322.1817 [*Balkhanov V.K., Bashkuev Y.B.* // Tech. Phys. 2017. Vol. 62. N 4. P. 619–624. DOI: 10.1134/S106378421704003X]