

Устойчивые и неустойчивые режимы плазменных диодов при наличии столкновений электронов

© S. Pramanik,¹ В.И. Кузнецов,² N. Chakrabarti³

¹ Department of Applied Mathematics, University of Calcutta, 700009 Kolkata, India

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия

³ Saha Institute of Nuclear Physics, 700064 Kolkata, India

e-mail: victor.kuznetsov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 8 февраля 2019 г.

В окончательной редакции 8 февраля 2019 г.

Принято к публикации 22 апреля 2019 г.

Термоэмиссионный преобразователь энергии моделируется с помощью диода Пирса, у которого межэлектродный промежуток заполнен однородно распределенными неподвижными ионами. Исследована устойчивость стационарных состояний такого диода при наличии столкновений электронов с фоновым газом. Стационарные решения получены аналитически с помощью метода Лагранжа. С использованием теории возмущений выведено дисперсионное уравнение. Построены как апериодические, так и колебательные решения этого уравнения и изучены их свойства. Определены области, где апериодические моды неустойчивы. Показано, что все колебательные моды устойчивы.

Ключевые слова: плазменный диод, столкновения электронов.

DOI: 10.21883/JTF.2019.10.48169.46-19

Введение

Изучение вакуумного диода с потоком электронов в режиме ограничения тока пространственным зарядом началось с пионерских работ Чайлда и Ленгмюра [1,2]. В дальнейшем их теоретические исследования были обобщены на случай, когда электронный поток имеет конечную величину скорости инжекции [3]. Позднее Пирс изучал диод, в котором присутствует однородный ионный фон [4]. Авторы обнаружили, что существует пороговая величина плотности тока, при превышении которой в системе развивается апериодическая неустойчивость (неустойчивость Бурсиана–Пирса), и в результате ток, проходящий через диод, существенно уменьшается [5]. Этот предел получил название „space–charge–limit“ точка (точка SCL) [6].

В последние несколько десятков лет процессы в плазменных диодах активно изучаются в связи с широкой областью их применения в современной технике [7–14]. Это, например, такие устройства как термоэмиссионный преобразователь энергии (ТЭП) [15], газонаполненные диоды для термоядерного синтеза [16], лазерные принтеры [17], генераторы СВЧ излучения [18] и многие другие устройства, в основе работы которых лежит плазменный диод.

Стационарные состояния плазменных диодов удобно представлять точками на параметрической плоскости $\{\epsilon_0, \delta\}$, где ϵ_0 и δ — напряженность электрического поля у эмиттера и межэлектродный зазор, соответственно [19–23]. Ветви решений стационарных уравнений

диода Бурсиана (диода, в котором пучок электронов движется в отсутствие ионного фона), построенные на этой плоскости, называются семейством Бурсиана. В случае присутствия однородного ионного фона (диод Пирса) стационарным состояниям соответствуют два семейства решений: бурсиановское и небурсиановское. Когда поток электронов является чисто монокинетическим, бурсиановское семейство состоит из двух ветвей: Normal-S ветвь (расположенная ниже точки SCL) и C-Overlap ветвь (расположенная выше точки SCL). При этом C-Overlap ветвь заканчивается в точке 0, соответствующей моменту, когда скорость электронов в плазме впервые обращается в нуль [20–23]. Устойчивость решений, соответствующих этим ветвям, изучалась в ряде работ с использованием дисперсионного уравнения [20–28].

В [15] было предложено использовать термоэмиссионный преобразователь энергии в качестве генератора переменного тока. В основе работы такого генератора лежит явление развития неустойчивости Бурсиана–Пирса. Однако, как показывают эксперименты, возникновение столкновений электронов на атомах в межэлектродном зазоре может привести к подавлению этой неустойчивости. Поэтому появление рассеяния электронов может стать препятствием для генерации переменного тока с помощью ТЭП.

В [12] продемонстрировано, что успешно изучать процессы в термоэмиссионном преобразователе энергии можно с помощью плазменного диода пирсовского типа. В недавней работе [29] мы изучали стационарные состояния плазмы в таком диоде в предположении, что

с поверхности эмиттера поступает монокинетический поток электронов, которые при движении в межэлектродном зазоре испытывают столкновения с атомами. В настоящей работе мы изучаем, как столкновения влияют на устойчивость полученных решений: как из бурсиановского, так и из небурсиановского семейств. Будет показано, что присутствие столкновений оказывает сильное влияние на устойчивость стационарных состояний диода.

Настоящая работа построена следующим образом. В разд. 1 мы выводим основные уравнения в переменных Лагранжа. В разд. 2 приводятся стационарные решения задачи. В разд. 3 с использованием метода малых возмущений выводится дисперсионное уравнение. В разд. 4 изучается устойчивость стационарных решений. И, наконец, в „Заключение“ делаются заключительные замечания.

1. Описание модели и вывод основных уравнений

Рассматривается одномерный диод, в котором два плоских электрода бесконечной протяженности помещены на расстоянии d друг от друга. Между ними приложена разность потенциалов U . Ось z направлена перпендикулярно поверхности эмиттера ($z = 0$). Нерелятивистский моноэнергетический поток электронов с концентрацией n_b и скоростью v_b вылетает с эмиттера перпендикулярно его поверхности. Электроны движутся в самосогласованном электрическом поле под действием силы трения, возникающей благодаря их столкновениям с ионами и другими частицами. Электрическое поле E вычисляется через скалярный потенциал φ , который зависит только от координаты z . Собственным магнитным полем электронного тока пренебрегаем.

Предполагается, что межэлектродный промежуток однородно заполнен бесконечно тяжелыми ионами с концентрацией n_i , которые считаются неподвижными. Ионный фон учитывается путем введения безразмерного параметра — степени компенсации

$$\gamma = n_i/n_b. \quad (1)$$

Теоретически γ может принимать любые значения. Поэтому случай полной компенсации ($\gamma = 1$) является только одним из возможных; такое устройство называется диодом Пирса [20]. Следует также упомянуть, что предельному случаю $\gamma = 0$, т.е. когда ионы отсутствуют, соответствует диод Бурсиана.

Для описания состояний плазмы в 1-мерном случае используем систему уравнений, состоящую из уравне-

ний неразрывности, движения и Пуассона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nv) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} &= -\frac{e}{m} \mathbf{E} + \mathbf{F}_D(v), \\ \nabla \mathbf{E} &= -\frac{e}{\epsilon_0} (n - n_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь e и m — заряд и масса электрона, а $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ — диэлектрическая постоянная. Член $\mathbf{F}_D(v)$ в уравнении движения представляет собой силу трения, вызванную столкновениями электронов с другими частицами.

Для того чтобы переписать уравнения (2) в безразмерном виде, мы вводим характерную энергию и длину, которые представляют собой соответственно кинетическую энергию электронов на эмиттере W_b и пучковую дебаевскую длину λ_D [9,20]:

$$\begin{aligned} \lambda_D &= \left[\frac{2\epsilon_0 W_b}{e^2 n_b} \right]^{1/2} \approx 0.3238 \cdot 10^{-2} \frac{V_b^{3/4}}{j_b^{1/2}} [\text{cm}], \\ W_b &= mv_b^2/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь плотность тока пучка $j_b = en_b v_b$ и ускоряющее напряжение $V_b = W_b/e = mv_b^2/(2e)$, формирующее пучок, выражаются в амперах на квадратный сантиметр и в вольтах соответственно. Безразмерные координата, время, скорость, потенциал и напряженность электрического поля имеют следующий вид: $\xi = z/\lambda_D$, $t = t\omega_b$, $u = v/\sqrt{2W_b/m}$, $\eta = e\varphi/(2W_b)$, $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_b)$; здесь $\omega_b = [e^2 n_b/(m\epsilon_0)]^{1/2}$ представляет собой характерную частоту электронного пучка. Безразмерные величины межэлектродного расстояния и разности потенциалов между электродами обозначаются соответственно δ и V . Мы предполагаем также, что величина силы трения пропорциональна скорости электронов и направлена противоположно ей. Отметим, что в присутствии ионного фона решения зависят также от параметра γ .

Теперь в безразмерных переменных уравнение (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}(nu) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u &= -\varepsilon - \nu u, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} &= -n + \gamma, \quad \varepsilon = -\frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициент $\nu = \langle v \rangle / \omega_b$ будем называть „частотой столкновений“. Здесь $\langle v \rangle = \langle v \rangle / \langle \lambda \rangle$ — средняя частота столкновений, $\langle \lambda \rangle$ — длина свободного пробега электронов, а $\langle v \rangle$ — характерный разброс по скоростям, возникающий в ходе процесса столкновений. В нашей модели $\langle v \rangle = u_b \langle \lambda \rangle / \lambda_D \sim u_b / (a\lambda_D n_b)$, где a — сечение рассеяния электронов. Для получения аналитических

решений мы будем использовать модель Акимова и Шамеля, которую они применяли при изучении влияния столкновений на стационарные решения диода Бурсиана [30]. Поэтому будем считать v постоянной величиной.

Будем использовать следующие граничные условия: $n(\xi = 0, t) = 1$, $u(\xi = 0, t) = 1$, $\eta(\xi = 0, t) = 0$ и $\eta(\xi = \delta, t) = V$.

Систему нестационарных уравнений (4) будем изучать, используя метод Лагранжа [20,21,24–27]. Введем „функцию тока“ $t_0(\xi, t)$, которая удовлетворяет следующим условиям: $\partial_\xi t_0 \equiv -n$ и $\partial_t t_0 = nu$ (здесь ∂_y обозначает частную производную по y). Физически t_0 имеет смысл момента вылета электрона с эмиттера, т.е. $\xi(t = t_0) = 0$. Это легко проверить, поскольку $(d/dt)t_0 \equiv \partial_t t_0 + u\partial_\xi t_0 = 0$, и, следовательно, „ t_0 “ сохраняется вдоль траектории электрона.

При переходе от переменных Эйлера (ξ, t) к переменным Лагранжа (t_0, t) дифференциальные операторы преобразуются в соответствии с формулами $\partial_\xi \equiv -n(t_0, t)\partial_{t_0}$ и $\partial_t \equiv \partial_t + n(t_0, t)u(t_0, t)\partial_{t_0}$. Следовательно, уравнения (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} - n^2 \frac{\partial u}{\partial t_0} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} &= -\varepsilon - \nu u, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t_0} &= 1 - \frac{\gamma}{n}, & \frac{\partial \eta}{\partial t_0} &= \frac{\varepsilon}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из 3-го уравнения системы (5) получаем

$$\varepsilon(t, t_0) = -(t - t_0) + \varepsilon_0(t) - \gamma \int_{t_0}^t dt_0/n.$$

Из 1-го уравнения системы (5) следует, что $\xi' \equiv \partial_{t_0} \xi = -1/n(t, t_0)$, так что

$$\varepsilon(t, t_0) = -(t - t_0) + \varepsilon_0(t) + \gamma \xi(t, t_0). \quad (6)$$

Используя соотношение $u = \partial_t \xi$, из первых двух уравнений системы (5) и формулы (6), получаем следующее уравнение для положения электрона:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial \xi}{\partial t} + \gamma \xi = (t - t_0) - \varepsilon_0(t). \quad (7)$$

2. Стационарные решения

В стационарном случае напряженность электрического поля у эмиттера ε_0 не зависит от времени, а другие величины зависят только от разности $\tau = t - t_0$. Следовательно:

$$\varepsilon(\tau) = -\tau + \varepsilon_0 + \gamma \xi(\tau). \quad (8)$$

Операторы частных производных преобразуются следующим образом: $\partial_t \rightarrow \partial_\tau$ и $\partial_{t_0} \rightarrow -\partial_\tau$. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \nu \frac{d\xi}{d\tau} + \gamma \xi = \tau - \varepsilon_0. \quad (9)$$

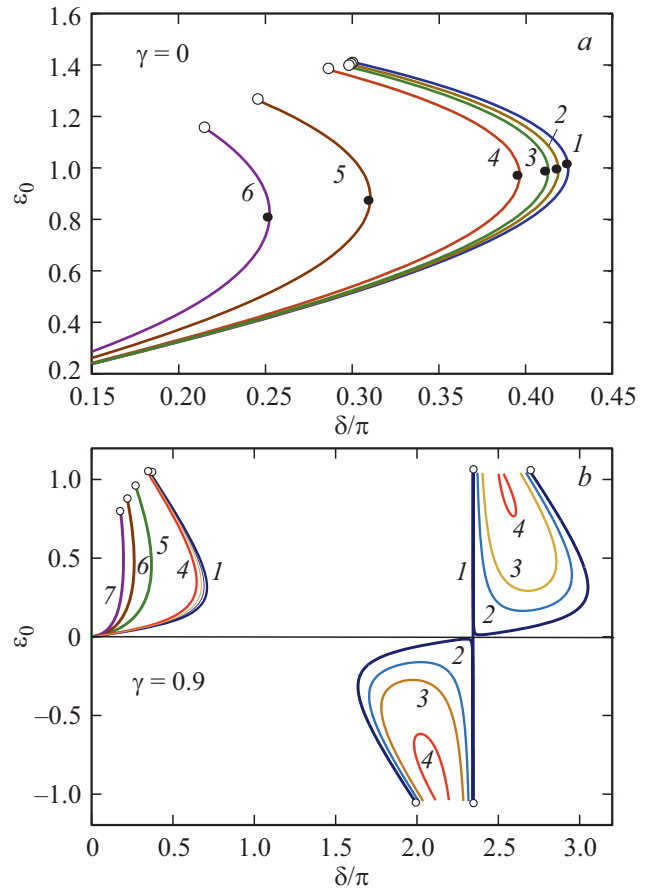


Рис. 1. Зависимость напряженности электрического поля на эмиттере ε_0 от межэлектродного зазора δ для стационарных решений диода с $V = 0$ для двух величин γ и ряда значений ν : $a - \gamma = 0$; $\nu = 0$ (кривая 1), 0.02 (2), 0.04 (3), 0.1 (4), 0.5 (5), 0.9 (6); $b - \gamma = 0.9$; $\nu = 0$ (кривая 1), 0.01 (2), 0.02 (3), 0.04 (4), 0.2 (5), 0.5 (6), 1 (7). Каждая кривая закончена в точке 0.

Решая уравнение (9) с начальными условиями $\xi(\tau = 0) = 0$, $d\xi/d\tau(\tau = 0) = 1$, для случая $\nu < 2\sqrt{\gamma}$ получаем стационарное решение

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= \frac{1}{\gamma} \tau - \frac{1}{\gamma^2} (\gamma \varepsilon_0 + \nu) + \frac{1}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\nu}{2} \tau\right) \\ &\times \left\{ (\gamma \varepsilon_0 + \nu) \cos(\beta \tau) + \frac{1}{\beta} \left[\frac{\nu}{2} (\nu \varepsilon_0 + \nu) - \gamma(1 - \gamma) \right] \sin(\beta \tau) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, для случая $\nu > 2\sqrt{\gamma}$ функция $\xi(\tau)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= \frac{1}{\gamma} \tau - \frac{1}{\gamma^2} (\gamma \varepsilon_0 + \nu) - \frac{1}{\alpha \gamma^2} \\ &\times \left[\frac{1}{2} (\nu - \alpha) (\gamma \varepsilon_0 + \nu) - \gamma(1 - \gamma) \right] \exp\left(-\frac{\nu + \alpha}{2} \tau\right) \\ &+ \frac{1}{\alpha \gamma^2} \left[\frac{1}{2} (\nu + \alpha) (\gamma \varepsilon_0 + \nu) - \gamma(1 - \gamma) \right] \exp\left(-\frac{\nu - \alpha}{2} \tau\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введены две эффективные „частоты“:

$$\beta = \sqrt{\gamma - v^2/4}, \quad \alpha = \sqrt{v^2 - 4\gamma}. \quad (12)$$

И, наконец, из соотношения $d\eta/d\tau = -i\epsilon$ с использованием (8) для потенциала получаем

$$\eta(\tau) = -\frac{1}{2}\gamma\xi^2(\tau) + (\tau - \epsilon_0)\xi(\tau) - \int_0^\tau \xi(t)dt. \quad (13)$$

Для заданных величин γ , v и ϵ_0 мы можем рассчитать распределения скорости и концентрации электронов, потенциала и электрического поля в межэлектродном промежутке, увеличивая постепенно величину τ . Обозначая время пролета электронов между электродами через T , получаем $\tau = T$, $\xi = \delta$ и

$$V = \eta(\tau = T) = -\frac{1}{2}\gamma\delta^2 + (T - \epsilon_0)\delta - \int_0^T \xi(t; \epsilon_0)dt. \quad (14)$$

На рис. 1 на плоскости $\{\epsilon_0, \delta\}$ в параметрическом виде представлены стационарные решения диода Бурсиана ($\gamma = 0$) и обобщенного диода Пирса ($\gamma = 0.9$) для ряда значений v . Набор таких кривых дает семейство решений [14,20–23]. Как видно из рис. 1,а, у диода Бурсиана имеется только один тип решений (для $\epsilon_0 > 0$ и $\delta < 1.5$), а кривые, представляющие их, называются бурсиановскими ветвями [14,23]. С другой стороны, из рис. 1,б, где представлены решения обобщенного диода Пирса ($\gamma \neq 0$), видно наличие двух типов решений: бурсиановское и небурсиановское семейства [20,29]. Бурсиановские ветви обобщенного диода Пирса лежат в левой части рис. 1,б (для $\delta \leq \pi$ и $\epsilon_0 > 0$), а небурсиановские ветви расположены в области $1 < \delta/\pi < 3$. Мы можем видеть также, что в отличие от диода Бурсиана стационарные решения диода Пирса существуют и для отрицательных значений ϵ_0 . Видно также, что небурсиановские ветви существуют только при малых значениях частоты столкновений, и исчезают, когда v увеличивается.

На правой границе каждой бурсиановской кривой существует точка (точка SCL), где производная $d\delta/d\epsilon_0 = 0$ (на рис. 1 она помечена жирной точкой). Она относится к стационарному решению, которому соответствует максимальный ток, проходящий через диод ($J_{SCL} \sim \delta_{SCL}^2$). С ростом v величина максимального тока уменьшается. Каждая бурсиановская кривая заканчивается в точке нуль. Эта точка соответствует состоянию диода, у которого в некоторой точке внутри межэлектродного зазора скорость электронов обращается в нуль из-за возникшего виртуального катода. В этом случае вследствие моноэнергетичности пучка все электроны отражаются от виртуального катода и возвращаются на эмиттер. Участок бурсиановской ветви, лежащий между точками SCL и 0 ($\epsilon_{0,SCL} < \epsilon_0 \leq \epsilon_{0,0}$), называется C-Overlap ветвью, а лежащий ниже точки SCL ($\epsilon_0 \leq \epsilon_{0,SCL}$) — Normal C

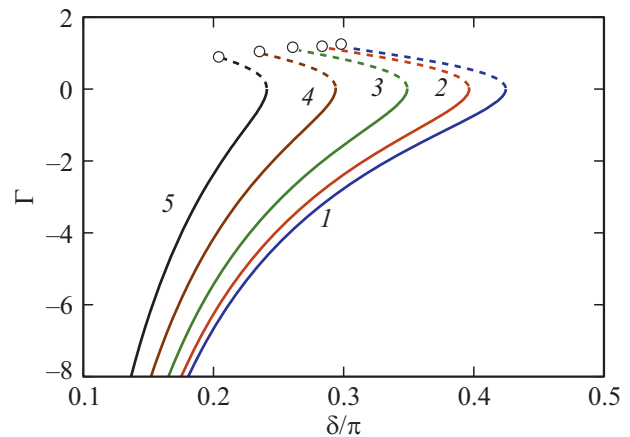


Рис. 2. Аперiodические ветви ($\Omega = 0$) диода Бурсиана с $V = 0$ для ряда величин частоты столкновений v : $v = 0$ (кривая 1), 0.1 (2), 0.3 (3), 0.6 (4), 1.0 (5). Сплошные кривые соответствуют Normal C ветви, штриховые — C-Overlap ветви.

ветвью. Формулы для расчета координат точек SCL и 0 приведены в работе [29].

Для того чтобы проанализировать устойчивость стационарных решений, в разд. 3 выводится дисперсионное уравнение.

3. Вывод дисперсионного уравнения

Считаем, что стационарные решения диода описываются уравнениями (10) или (11). Наложим на эти решения малое возмущение, пропорциональное $\exp(\sigma t)$, таким же образом, как это делалось в работах [21,27,28]. Тогда к электрическому полю на эмиттере и другим стационарным величинам добавится возмущение:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_0(\tau, t) &= \epsilon_0 + \epsilon_1(\tau) \exp(\sigma t), \\ \tilde{\xi}(\tau, t) &= \xi(\tau) + \xi_1(\tau) \exp(\sigma t), \\ \tilde{T}(\tau, t) &= T + T_1(\tau) \exp(\sigma t). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь ϵ_0 , $\xi(\tau)$ и T являются членами нулевого порядка (они определяются уравнениями (10) или (11)), а ϵ_1 , ξ_1 и T_1 являются величинами 1-го порядка малости по возмущению. Поэтому с точностью до членов 1-го порядка напряженность электрического поля можно записать в виде $\epsilon = \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)}$, где $\epsilon^{(0)} = \epsilon_0 - \tau + \gamma\xi$, а $\epsilon^{(1)} = (\epsilon_1 + \gamma\xi_1) \exp(\sigma t)$ (см. уравнение (8)). Тогда $\tilde{\xi}(\tau, t)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial \tau^2} + v \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tau} = -\epsilon(\tau, t). \quad (16)$$

В 1-м порядке из (16) получаем

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + (2\sigma + v) \frac{d\xi_1}{d\tau} + (\sigma^2 + \gamma + v\sigma) \xi_1 = -\epsilon_1. \quad (17)$$

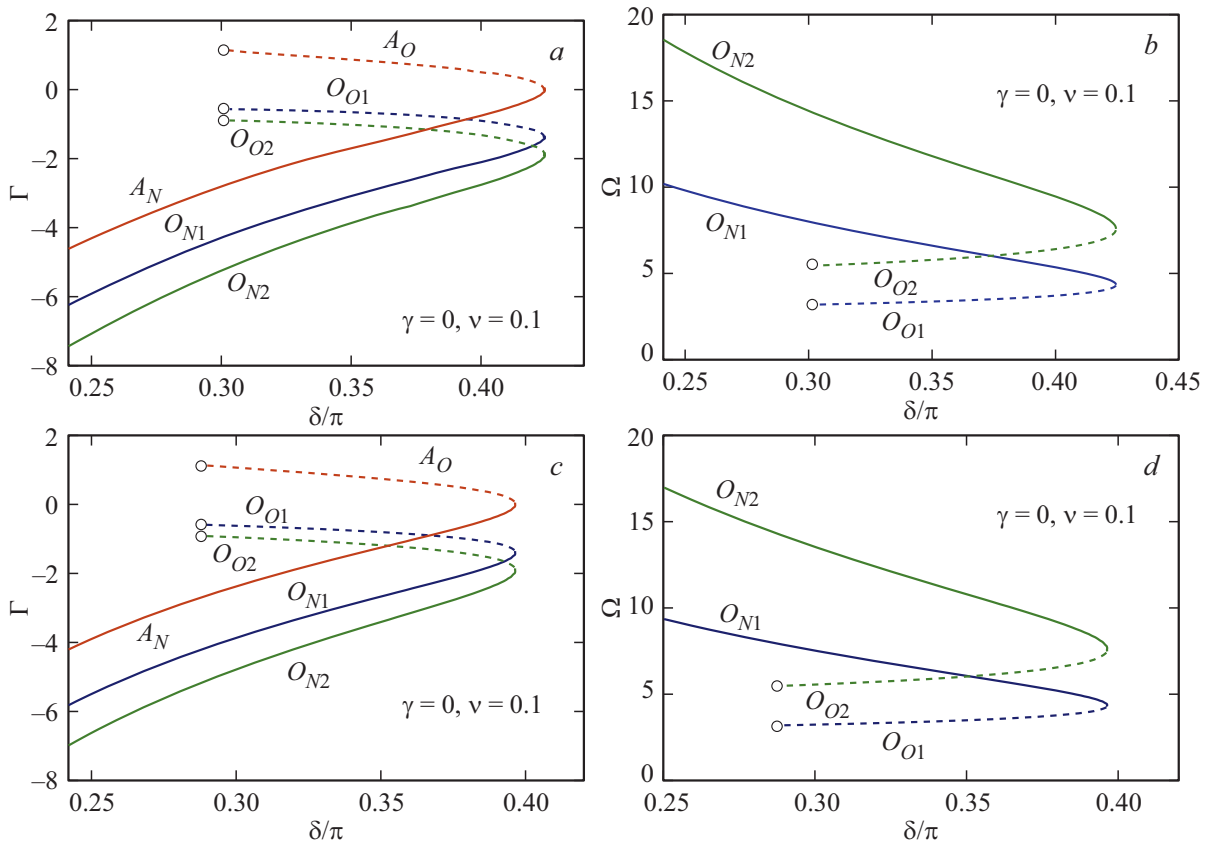


Рис. 3. Зависимости от δ/π вещественной (Γ) (a, c), и мнимой (Ω) (b, d) части корней дисперсионного уравнения для диода Бурсиана с $V = 0$; (a), (b): $\nu = 0$, (c), (d): $\nu = 0.1$. Сплошные кривые соответствуют Normal C ветви, штриховые — C-Overlap ветви. Индекс A обозначает аперриодическую моду ($\Omega = 0$), O — колебательную ($\Omega \neq 0$); N относится к Normal C ветви, а O — к C-Overlap ветви; 1 и 2 обозначают первые две колебательные моды.

Обозначая $\kappa = \sigma + \nu/2$ и используя начальные условия $\xi_1(\tau = 0) = 0$ и $\partial_\tau \xi_1(\tau = 0) = 0$, для ξ_1 получим следующее решение:

$$\xi_1(\tau) = \frac{\varepsilon_1}{\gamma + \nu\sigma + \sigma^2} \left[\exp(-\kappa\tau) \left(\cos \beta\tau + \frac{\kappa}{\beta} \sin \beta\tau \right) - 1 \right] \quad (\text{для } \nu < 2\sqrt{\gamma}), \quad (18)$$

или

$$\xi_1(\tau) = \frac{\varepsilon_1}{\gamma + \nu\sigma + \sigma^2} \left\{ \frac{1}{\alpha} \exp(-\kappa\tau) \left[\left(\kappa + \frac{\alpha}{2} \right) \times \exp\left(\frac{\alpha}{2}\tau\right) - \left(\kappa - \frac{\alpha}{2} \right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} - \tau\right) \right] - 1 \right\} \quad (\text{для } \nu < 2\sqrt{\gamma}). \quad (19)$$

Когда электрическое поле на эмиттере возмущается, траектория электронов будет отличаться от стационарной, и, следовательно, изменится время пролета электронов между электродами (скажем, $\tilde{T} = T + T_1 \exp(\sigma t)$). В 1-м порядке из условия $\xi(\tilde{T}) = \delta$ получим

$$T_1 = -\frac{\xi_1(T)}{u(T)}. \quad (20)$$

Теперь для получения дисперсионного уравнения воспользуемся граничным условием для разности потенциалов между электродами. Если она равна V , то получаем соотношение

$$V = -\int_0^\delta \varepsilon(\xi) d\xi = -\int_0^{\tilde{T}} \varepsilon(\tau) u(\tau) d\tau = -\int_0^{\tilde{T}} [\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}] \partial_\tau [\xi^{(0)} + \xi^{(1)}] d\tau. \quad (21)$$

Используя соотношение (20), из (21) получаем следующую связь между величинами 1-го порядка

$$\delta\varepsilon_1 + \int_0^T \xi_1 d\tau = 0. \quad (22)$$

После подстановки выражения для ξ_1 из (18) в (22) для случая $\nu < 2\sqrt{\gamma}$ получаем дисперсионное уравнение в виде

$$F(\sigma; \delta, T) = -\exp(-\kappa T) \left[2\kappa \cos \beta T + \frac{\kappa^2 - \beta^2}{\beta} \sin \beta T \right] + (\gamma + \nu\sigma + \sigma^2)^2 \delta - (\gamma + \nu\sigma + \sigma^2) T + 2\kappa = 0. \quad (23)$$

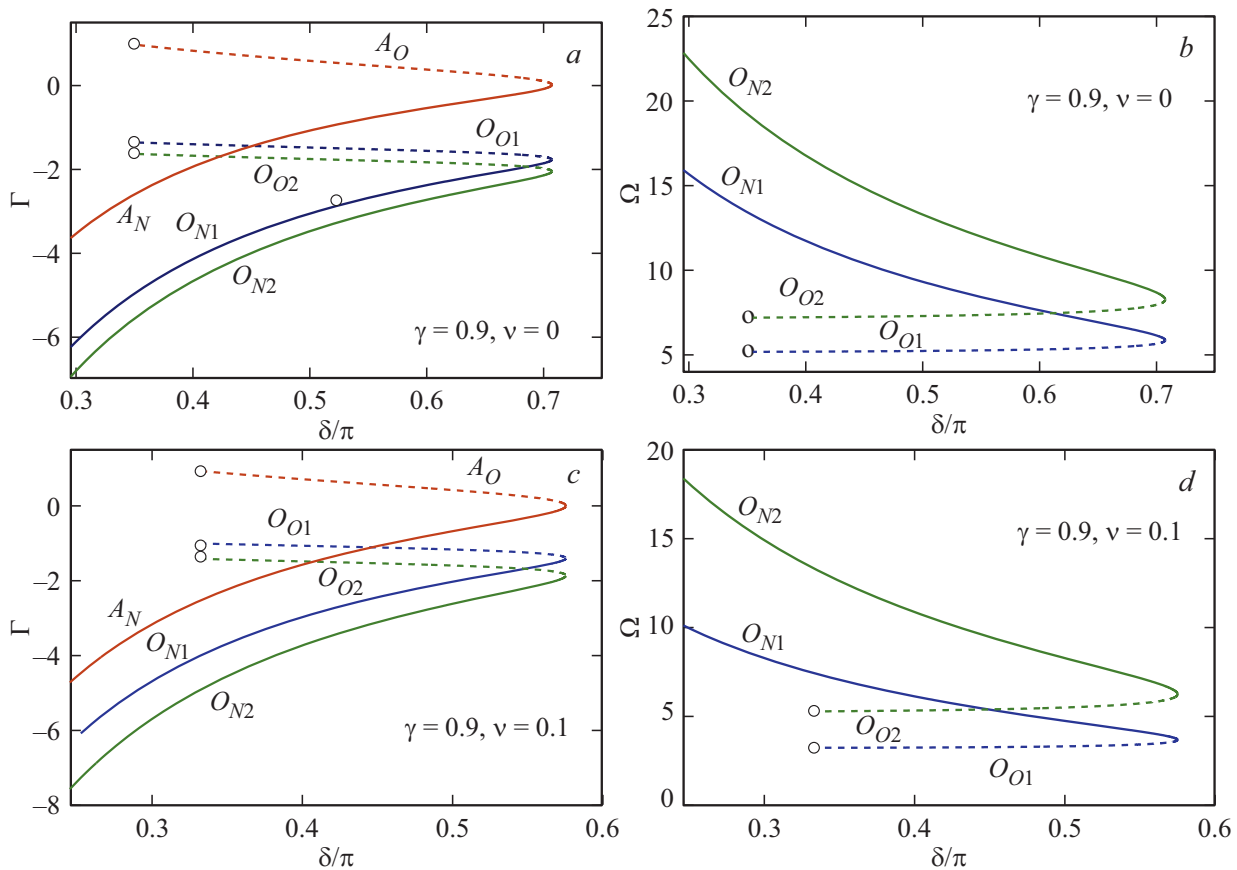


Рис. 4. Зависимости от δ/π вещественной (a, c) и мнимой части (b, d) корней дисперсионного уравнения, соответствующие бурсиановским ветвям обобщенного диода Пирса с $\gamma = 0.9$ и $V = 0$; (a, b): $\nu = 0$, (c, d): $\nu = 0.1$. Все индексы имеют тот же смысл, что и на рис. 3.

Аналогично, используя (19) для ξ_1 , получаем дисперсионное уравнение для случая $\nu > 2\sqrt{\gamma}$

$$\begin{aligned}
 F(\sigma; \delta, T) = & -\frac{1}{\alpha} \exp(-\kappa T) \left[\left(\kappa + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \exp(\alpha T/2) \right. \\
 & \left. - \left(\kappa - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \exp(-\alpha T/2) \right] + (\gamma + \nu\sigma + \sigma^2)\delta \\
 & - (\gamma + \nu\sigma + \sigma^2)T + 2\kappa = 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Следует отметить, что общая форма дисперсионного уравнения (22) является одной и той же для плазменных диодов с пучком электронов всех типов. Это соотношение не зависит от того, присутствует ли ионный фон, поперечное магнитное поле или имеет место рассеяние электронов (в рамках рассматриваемой нами модели). В разных случаях будут только разными выражения для ξ_1 [20,21,28].

4. Анализ устойчивости решений

Исследуем решения дисперсионного уравнения (23) (или (24)). Положим $\sigma(\delta; \gamma, V) = \Gamma(\delta; \gamma, V) + i\Omega(\delta; \gamma, V)$.

Вообще говоря, при заданных значениях параметров γ, ν, V и δ дисперсионное уравнение имеет счетное число собственных мод. Так что уравнение (23) (или (24)) имеет большое число корней. Однако, главной собственной модой (той, которая имеет наибольший инкремент в случае неустойчивого решения или наименьший декремент в случае устойчивого решения) оказывается аperiодическая мода. Когда величины параметров γ и V заданы, будем называть кривые $\Gamma(\delta; \gamma, V)$ или $\Omega(\delta; \gamma, V)$ ветвями неустойчивости.

Сначала рассмотрим аperiодические ветви неустойчивости (ветви A). Они определяются корнями уравнения (23) или (24) при вещественной величине σ ($\Omega = 0; \sigma = \Gamma$). Для случая $\nu < 2\sqrt{\gamma}$ соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(\Gamma; \delta, T) = & -\exp[-(\Gamma + \nu/2)T] \\
 & \times \left[2(\Gamma + \nu/2) \cos \beta T + \frac{(\Gamma + \nu/2)^2 - \beta^2}{\beta} \sin \beta T \right] \\
 & + (\gamma + \nu\Gamma + \Gamma^2)\delta - (\gamma + \nu\Gamma + \Gamma^2)T + 2\Gamma + \nu = 0,
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

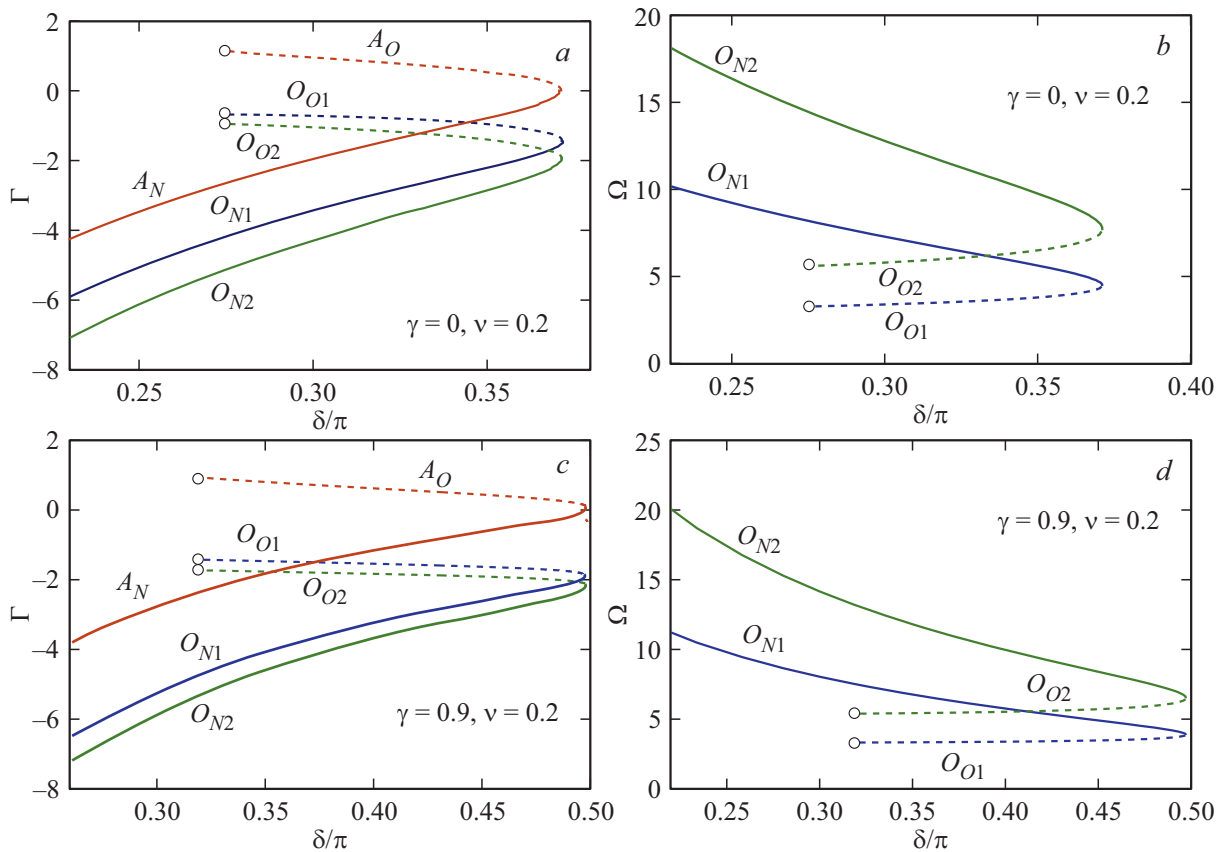


Рис. 5. Зависимости от δ/π вещественной (a, c) и мнимой (b, d) части корней дисперсионного уравнения, соответствующие бурсиановским ветвям диода Бурсиана и обобщенного диода Пирса с $\nu = 0.2$ и $V = 0$; (a, b): $\gamma = 0$, (c, d): $\gamma = 0.9$. Все индексы имеют тот же смысл, что и на рис. 3.

а для случая $\nu > 2\sqrt{\gamma}$ —

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\alpha} \exp\left[-\left(\frac{\nu}{2} + \Gamma\right) T\right] - \left[\left(\frac{\nu + \alpha}{2} + \Gamma\right)^2\right. \\
 & \times \exp\left(\frac{\alpha}{2} T\right) - \left(\frac{\nu - \alpha}{2} + \Gamma\right)^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2} T\right)\left. \right] \\
 & + (\gamma + \nu\Gamma + \Gamma^2)^2 \delta - (\gamma + \nu\Gamma + \Gamma^2) T + \nu + 2\Gamma = 0.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Подставляя $\Gamma = 0$ и выражение для δ в уравнение (25), для случая $\nu < 2\sqrt{\gamma}$ получим

$$\varepsilon_0 \cos(\beta T) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\nu}{2} \varepsilon_0 + \gamma\right) \sin(\beta T) = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{\nu}{2} T\right). \tag{27}$$

Из уравнения (26) для случая $\nu > 2\sqrt{\gamma}$ получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon_0}{\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma} \left\{ \left[\frac{\nu - \alpha}{2} \varepsilon_0 + \gamma\right] \exp\left(-\frac{\nu + \alpha}{2} T\right) \right. \\
 & \left. - \left[\frac{\nu + \alpha}{2} \varepsilon_0 + \gamma\right] \exp\left(-\frac{\nu - \alpha}{2} T\right) \right\} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Если сравнить эти формулы с аналогичными соотношениями для координат точек SCL, полученными в

работе [29] (см. формулы (25) и (26)), то можно увидеть, что инкремент аperiodической ветви обращается в нуль как раз в точках SCL.

Сначала рассмотрим случай диода Бурсиана ($\gamma = 0$), где существует только один тип решений в области $0 < \delta/\pi < 1$ на (ε_0, δ) -диаграмме – бурсиановские ветви. На рис. 2 показаны аperiodические ветви такого диода для ряда величин ν . Каждая ветвь пересекает ось $\Gamma = 0$ в точке SCL. Верхняя часть этой ветви заканчивается в точке 0 (где $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0,0}$), которая помечена кружком. Очевидно, что стационарные решения, соответствующие верхней части ветви ($\varepsilon_{0,SCL} < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0,0}$), или C-overlap ветви, являются неустойчивыми, поскольку имеют положительный инкремент. В то же время, нижняя часть ветви ($0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_{0,SCL}$), или Normal C ветвь, является устойчивой относительно малых аperiodических возмущений (у нее инкремент отрицателен).

Теперь рассмотрим колебательные возмущения ($\Omega \neq 0$). На рис. 3 наряду с аperiodической модой (обозначенной символом A) показаны две колебательных моды (обозначенные символом O) для случаев $\nu = 0$ (рис. 3, a и b) и $\nu = 0.1$ (рис. 3 c и d). Индексы N и O относятся к Normal C ветви (сплошная кривая) и C-overlap ветви (штриховая кривая) соответственно. Видно, что

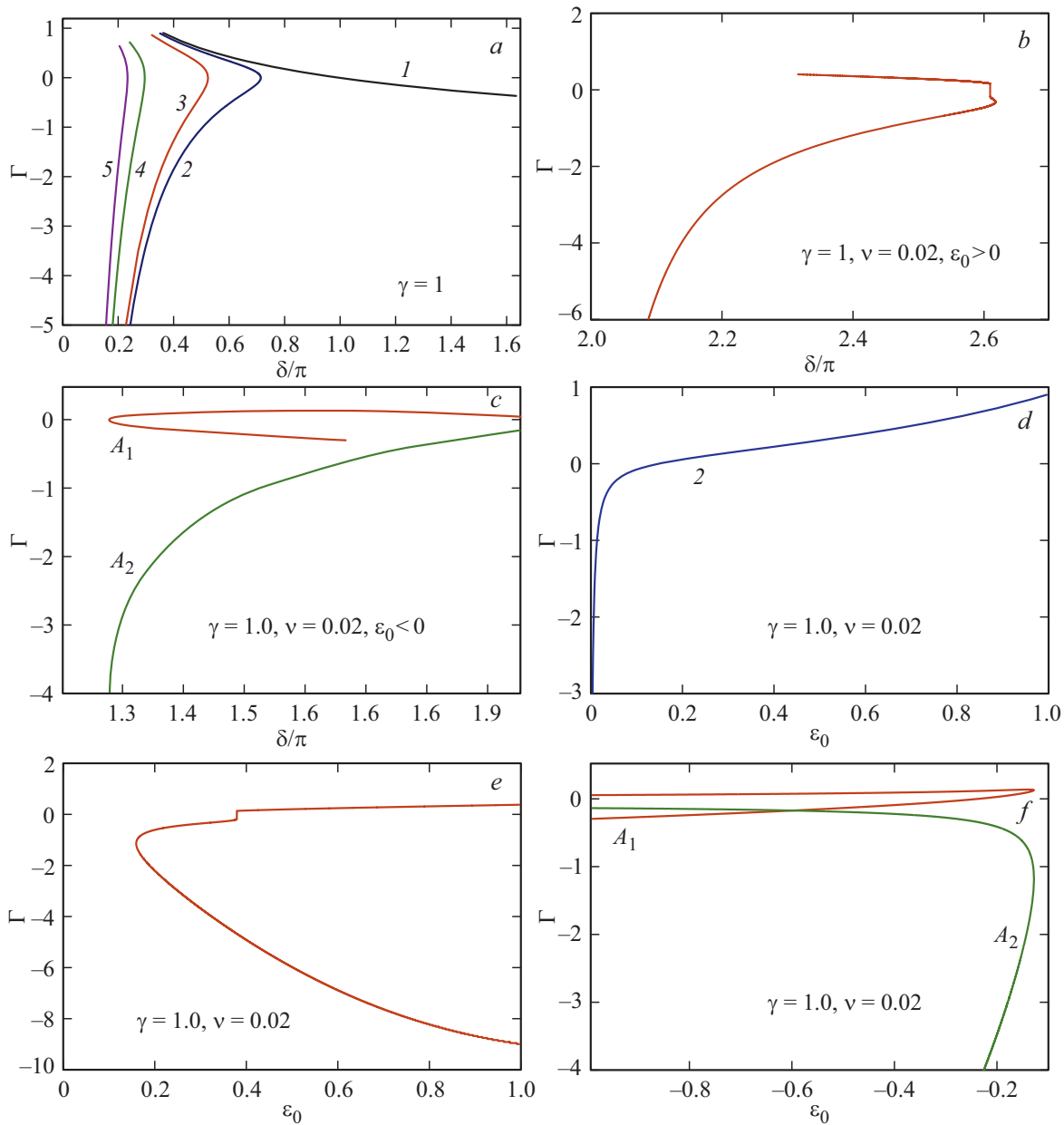


Рис. 6. Диод Пирса с $\gamma = 1$ и $V = 0$: *a* — зависимость инкремента аperiodической моды от δ/π для бурсиановской ветви и ряда значений частоты столкновений: $\nu = 0$ (кривая *I*), 0.02 (2), 0.06 (3), 0.8 (4), 1.2 (5). *d* — зависимость инкремента аperiodической моды от ϵ_0 для бурсиановской ветви при $\nu = 0.02$. Зависимость инкремента аperiodической моды (*b*) от δ/π и (*e*) от ϵ_0 для небурсиановской ветви с $\epsilon_0 > 0$ при $\nu = 0.02$. *c* и *f* — такие же зависимости, но только для $\epsilon_0 < 0$. Нижние цифры 1 и 2 соответствуют первым двум модам.

инкременты у колебательных мод отрицательны, т.е. соответствующие решения являются устойчивыми. Таким образом, можно утверждать, что Normal C ветвь является устойчивой относительно любых малых возмущений.

Далее рассмотрим обобщенный диода Пирса. Его стационарные решения располагаются и на бурсиановских, и на небурсиановских семействах решений. Сперва проанализируем бурсиановские ветви. На рис. 4 показаны аperiodическая мода ($\sigma = \Gamma$) и две колебательные моды ($\sigma = \Gamma + i\Omega$) для $\gamma = 0.9$ и двух величин параметра ν : рис. 4*a* и *b* соответствуют $\nu = 0$, а рис. 4*c* и *d* —

$\nu = 0.1$. И в этом случае мы видим, что Normal C ветвь (сплошная кривая) устойчива (имеет отрицательный инкремент), а C-overlap ветвь (штриховая кривая) — неустойчива относительно малых возмущений (см. красную кривую *A* на рис. 4, *a*), а построенные колебательные ветви — устойчивы. Аperiodические и колебательные ветви для $\nu = 0.2$ представлены на рис. 5, *a* и (*b* для $\gamma = 0$, а для на рис. 5*c* и *d* — для $\gamma = 0.9$).

На рис. 6, *a* показаны аperiodические дисперсионные кривые для бурсиановских ветвей решений для диода с

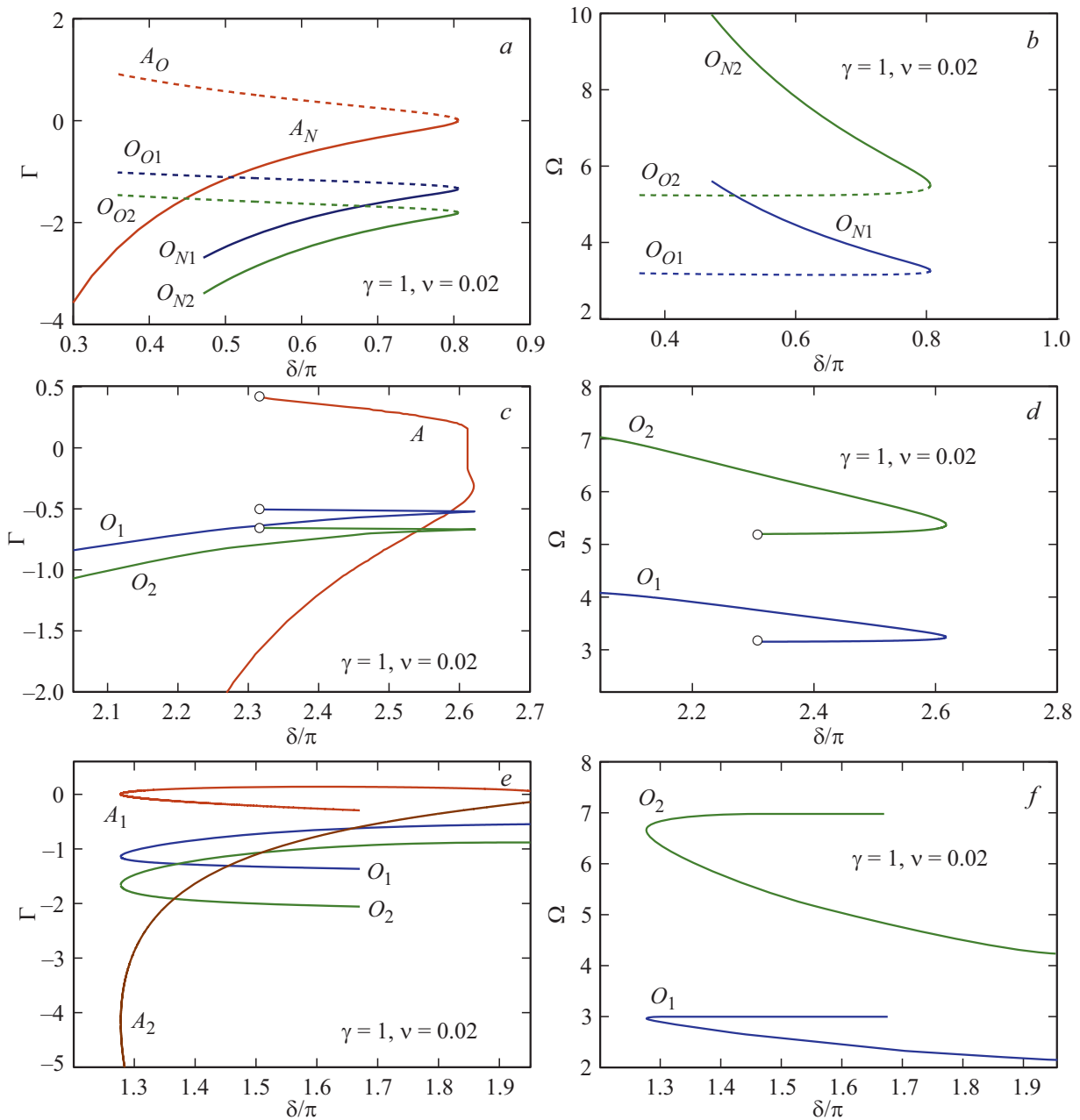


Рис. 7. Дисперсионные ветви диода Пирса, соответствующие (a) и (b) бурсиановскому семейству, небурсиановскому семейству с $\epsilon_0 > 0$ (c) и (d), небурсиановскому семейству с $\epsilon_0 < 0$ (e) и (f). Все индексы имеют тот же смысл, что и на рис. 3 и 6.

$\gamma = 1$ и ряда значений ν , а на рис. 6, b–f — для небурсиановских ветвей для $\gamma = 1$ и $\nu = 0.02$. На рис. 6, b и e представлены моды для решений с $\epsilon_0 > 0$, а на рис. 6, c и f — для решений с $\epsilon_0 < 0$. Символы A_1 и A_2 на рис. 6, c и f относятся к 1-й и 2-й аperiodическим модам соответственно.

На рис. 7 показаны колебательные дисперсионные кривые как для бурсиановской, так и для небурсиановской ветвей диода с $\gamma = 1$ и $\nu = 0.02$. Рис. 7, a и b соответствуют бурсиановскому семейству. Колебательные моды небурсиановских семейств представлены двумя группами: рис. 7, c и d соответствуют решениям с $\epsilon_0 > 0$,

а рис. 7, e и f — с $\epsilon_0 < 0$. У всех этих кривых участки, где значения Γ положительны, соответствуют неустойчивым решениям, а где они отрицательны — устойчивым. Колебательные моды небурсиановских ветвей всегда устойчивы. Однако часть аperiodических мод у этих решений оказывается неустойчивой.

Заключение

В представленной работе мы изучили устойчивость стационарных решений обобщенного диода Пирса при наличии рассеяния электронов на атомах или других

частицах. Эти решения получены с помощью метода Лагранжа. Все решения могут быть отнесены либо к бурсиановскому, либо к небурсиановскому семействам в представлении на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$. Показано, что состояния, соответствующие небурсиановскому семейству, могут существовать только при сравнительно небольшой частоте столкновений. Для изучения устойчивости найденных решений мы вывели дисперсионное уравнение с помощью теории возмущений. Установлено, что бурсиановские решения, принадлежащие Normal C ветви ($\varepsilon_0 < \varepsilon_{0,SCL}$), всегда устойчивы относительно малых возмущений, в то время как решения, принадлежащие C-Overlap ветви ($\varepsilon_0 > \varepsilon_{0,SCL}$), неустойчивы. Когда величина частоты столкновений постепенно начинает увеличиваться, ширина неустойчивой C-Overlap ветви уменьшается. Установлено, что колебательные собственные моды всегда имеют отрицательные инкременты. Для небурсиановских решений найдены также области, где аперiodические моды устойчивы и неустойчивы. Показано, что колебательные моды небурсиановских решений всегда устойчивы.

Из экспериментов известно, что при высоких температурах эмиттера максимальная удельная мощность термоэмиссионного преобразователя энергии достигается при давлениях цезия, соответствующих области перехода из бесстолкновительного в столкновительный для электронов режим [31]. Проведенное нами исследование влияния столкновений электронов на стационарные характеристики плазменного диода даст возможность для проведения оптимизации характеристик ТЭП.

С другой стороны, ТЭП может работать в качестве генератора переменного тока только в том случае, когда в плазме диода существуют условия для развития неустойчивости Бурсиана–Пирса [15]. Выполненное нами исследование позволит определить предельную величину параметра столкновений, выше которой невозможно возникновение неустойчивости и генератор переменного тока не может функционировать.

Благодарности

Sourav Pramanik выражает благодарность the Science & Engineering Research Board (SERB) департамента Науки и Техники Индии за возможность выполнять данные исследования в рамках National Post Doctoral Fellowship (The Fellowship за номером PDF/2017/001132).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Child C. D. // Phys. Rev. Ser. 1911. Vol. 32. P. 492–511.
- [2] Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. Vol. 2. P. 450–486.
- [3] Бурсиан В.Р., Павлов В.И. // Журн. Рус. физ.-хим. общ-ва. 1923. Т. 55. Вып. 1–3. С. 71–80.
- [4] Pierce J.R. // J. Appl. Phys. 1944. Vol. 15. P. 721–726.
- [5] Frey J., Birdsall C.K. // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. P. 2962–2964.
- [6] Coutsias E.A., Sullivan D.J. // Phys. Rev. A 1983. Vol. 27. P. 1535–1543.
- [7] Кузнецов В.И., Эндер А.Я. // ЖТФ. 1977. Т. 47. В. 11. С. 2237–2246.
- [8] Mahaffey B.A., Sprangle P., Golden J., Kapetanacos C.A. // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 39. P. 843–846.
- [9] Незлин М.В. Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982. 263 с.
- [10] Akimov P.V., Schamel H., Ender A.Ya., Kuznetsov V.I. // J. Appl. Phys. 2003. Vol. 93. P. 1246–1257.
- [11] Ender A.Ya., Kuznetsov V.I., Schamel H., Akimov P.V. // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. P. 3212–3223.
- [12] Ender A.Ya., Kuhn S., Kuznetsov V.I. // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13. P. 113506.
- [13] Pedersen A., Manolescu A., Valfells A. // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. P. 175002.
- [14] Pramanik S., Ender A.Ya., Kuznetsov V.I., Chakrabarti N. // Phys. Plasmas. 2015. Vol. 22. P. 042110.
- [15] Бабанин В.И., Кольшикин И.Н., Кузнецов В.И., Ситнов В.И., Эндер А.Я. Тр. 2-й отраслевой конф. „Ядерная энергетика в космосе“. Физика термоэмиссионных преобразователей энергии. 1991. Сухуми, Грузия (ФТИ им. Веква) С. 9–11.
- [16] Ottinger P.F., Goodrich P.J., Hinshelwood D.D. et al. // Proc. IEEE. 1992. Vol. 80. N 6. P. 1010–1018.
- [17] Garstein Yu.N., Ramesh P.S. // J. Appl. Phys. 1998. V. 83. P. 2958–2964.
- [18] Дубинов А.Е., Селемир В.Д. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 645–672.
- [19] Кузнецов В.И., Соловьев А.В., Эндер А.Я. // ЖТФ. 1994. Т. 64. В. 12. С. 9–24.
- [20] Ender A.Ya., Kolinsky H., Kuznetsov V.I., Schamel H. // Phys. Rep. 2000. Vol. 328, N 1. P. 1–72.
- [21] Akimov P.V., Schamel H., Kolinsky H., Ender A.Ya., Kuznetsov V.I. // Phys. Plasmas. 2001, Vol. 8. P. 3788–3799.
- [22] Кузнецов В.И., Эндер А.Я. // Физика Плазмы. 2010. Т. 36. N 2. С. 248–257.
- [23] Кузнецов В.И., Эндер А.Я. // ЖТФ. 2013. Т. 83. В. 12. С. 1–10.
- [24] Schamel H., Bujarbarua S. // Phys. Fluids B. 1993. Vol. 5. P. 2278–22.
- [25] Schamel H., Maslov V. // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 70. P. 1105–1107.
- [26] Kolinsky H., Schamel H. // Phys. Plasmas. 1994. Vol. 1. P. 2359–2370.
- [27] Kolinsky H., Schamel H. // J. Plasma Phys. 1997. Vol. 57. P. 403–423.
- [28] Pramanik S., Kuznetsov V. I., Chakrabarti N. // Phys. Plasmas. 2015, Vol. 22. P. 082103.
- [29] Pramanik S., Kuznetsov V. I., Chakrabarti N. // Phys. Plasmas. 2018. Vol. 25. P. 083512.
- [30] Akimov P.V., Schamel H. // J. Appl. Phys. 2002. Vol. 92. P. 1690–1698.
- [31] Kuznetsov V. I., Ender A.Ya., Babanin V.I. // J. Appl. Phys. 2018. Vol. 124. P. 044502.