01;05

Использование анизотропной магнитной проницаемости при решении нелинейных задач магнитостатики для конструкций с шихтованной сталью

© *И.М. Ступаков, М.Э. Рояк*

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия
E-mail: istupakov@gmail.com

Поступило в Редакцию 7 мая 2019 г.
В окончательной редакции 7 мая 2019 г.
Принято к публикации 20 мая 2019 г.

Рассматривается решение нелинейных задач магнитостатики для конструкций с шихтованной сталью путем задания анизотропного коэффициента магнитной проницаемости. Показано, что решение с фактически заданными слоями стали сходится к решению анизотропной задачи с увеличением числа слоев.

Ключевые слова: магнитное поле, анизотропия, намагниченность, шихтованная сталь, метод конечных элементов.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.17.48216.17872

Одной из серьезных проблем при решении задач магнитостатики в технических устройствах сеточными методами является проблема учета многослойных структур стали. Действительно, в том случае, когда регулярная многослойная структура состоит даже из нескольких десятков слоев сталь–изолятор, явный учет их в сетке становится чрезвычайно неэффективным. Поскольку точные результаты моделирования в самих слоях стали обычно не требуются, а требуется такая аппроксимация поля, которая бы давала правильные интегральные характеристики шихтованного участка и точные значения поля вне его, при численном моделировании методом конечных элементов обычно пытаются заменить такой участок подобластью с анизотропными тензорами проводимости и магнитной проницаемости [1–11]. Несмотря на то что основная идея такой замены была рассмотрена еще в 1985 г. в работе [1], интерес к этой теме не угасает, предлагаются новые, иногда даже более трудоемкие способы учета шихтованных структур. В настоящей работе предлагается путем вычислительного эксперимента оценить погрешность замены многослойной структуры анизотропными коэффициентами магнитной проницаемости при решении линейной и нелинейной задач магнитостатики с ростом числа слоев.

Построим модель анизотропной магнитной проницаемости в шихтованном материале, аналогичную приведенной в [1]. Будем полагать, что шихтованный материал состоит из ферромагнетика и изолятора, причем долю изолятора в общем объеме обозначим ω. Магнитная индукция $\mathbf{B}_f$ и напряженность $\mathbf{H}_f$ в ферромагнетике связаны соотношением

$$\mathbf{B}_f = \mu_f \mathbf{H}_f, \tag{1}$$

где μ_f — коэффициент магнитной проницаемости в ферромагнетике, как правило зависящий от значения поля. В изоляторе выполняется соотношение

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0, \tag{2}$$

где μ_0 — коэффициент магнитной проницаемости в изоляторе, который будем считать постоянным.

Для получения усредненной анизотропной модели предположим, что шихтованный материал состоит из бесконечного числа тонких плоских пластин. Пренебрегая эффектами на границах пластин, будем считать, что индукция и напряженность поля в пластине являются постоянными. Также из условий непрерывности получаем

$$\mathbf{B}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{H}_f \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}. \tag{3}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали, перпендикулярный пластинам.

Обозначим через $\mathbf{B}_a$ индукцию и через $\mathbf{H}_a$ напряженность поля, полученного в результате усреднения. Тогда для сохранения интегрального поля должны выполняться следующие соотношения:

$$\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_f(1-\omega) + \mathbf{B}_0\omega, \quad \mathbf{H}_a = \mathbf{H}_f(1-\omega) + \mathbf{H}_0\omega. \tag{4}$$

Найдем коэффициент магнитной проницаемости в направлении, перпендикулярном шихтовке. Обозначив его μ_τ, можно записать

$$\mathbf{B}_a \times \mathbf{n} = \mu_\tau \mathbf{H}_a \times \mathbf{n}. \tag{5}$$

Подставим значение $\mathbf{B}_a$ из соотношения (4) и перейдем к напряженности магнитного поля через (1) и (2). Получаем уравнение

$$\mu_\tau \mathbf{H}_a \times \mathbf{n} = \mu_f \mathbf{H}_f \times \mathbf{n}(1-\omega) + \mu_0 \mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}\omega. \tag{6}$$

Воспользовавшись тем, что касательные компоненты напряженности равны, получаем

$$\mu_\tau = \mu_f(1-\omega) + \mu_0\omega. \tag{7}$$

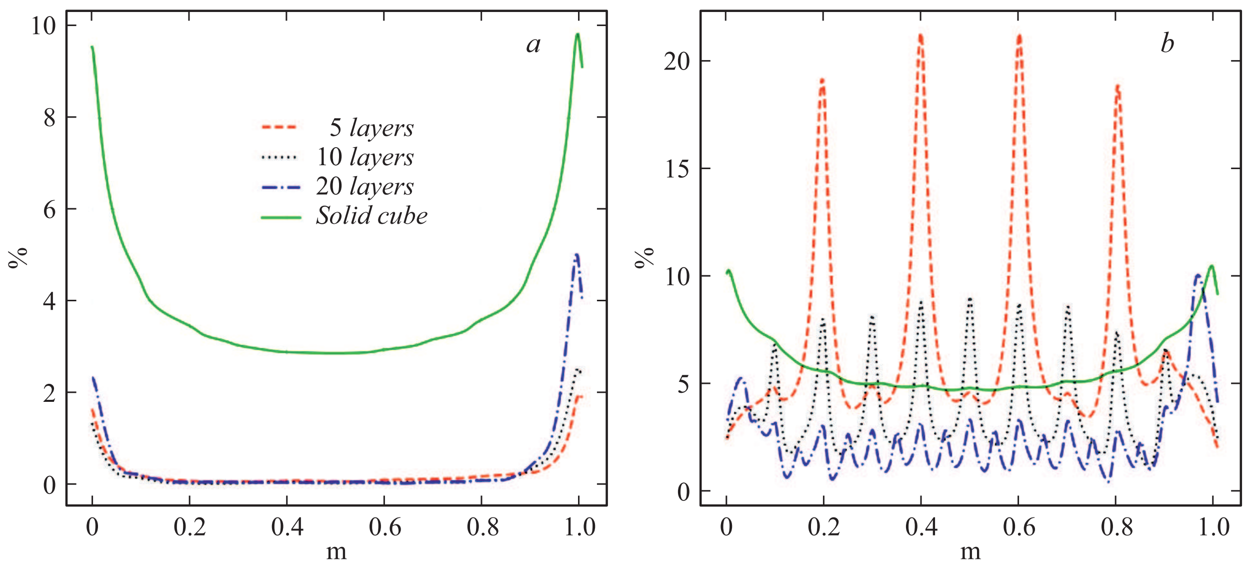

Рис. 1. Решение линейной задачи на расстоянии 1 cm от граней куба: *a* — вдоль оси *X*, *b* — вдоль оси *Z*.

Коэффициент магнитной проницаемости в направлении шихтовки обозначим через μ_n. Тогда

$$\mathbf{B}_a \cdot \mathbf{n} = \mu_n \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{n}. \quad (8)$$

Подставим значение напряженности магнитного поля из (4) и перейдем к магнитной индукции через (1) и (2). Получаем

$$\frac{\mathbf{B}_a \cdot \mathbf{n}}{\mu_n} = \frac{\mathbf{B}_f \cdot \mathbf{n}}{\mu_f}(1-\omega) + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}}{\mu_0}\omega. \quad (9)$$

С учетом того, что нормальные компоненты индукции равны и можно их сократить, получим

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_f}(1-\omega) + \frac{1}{\mu_0}\omega.$$

Выразив из этого уравнения μ_n, получим следующее соотношение:

$$\mu_n = \frac{\mu_0 \mu_f}{\mu_0 + (\mu_f - \mu_0)\omega}. \quad (10)$$

В том случае, когда μ_f зависит от магнитного поля, соотношений (7) и (10) недостаточно. Если считать, что μ_f зависит от напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_f$, требуется также получить формулу для пересчета $\mathbf{H}_a$ в $\mathbf{H}_f$.

Из (3) следует, что $\mathbf{H}_f \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_a \times \mathbf{n}$ и $\mathbf{B}_f \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{n}$. Подставим в последнее соотношение уравнения (1) и (8). С учетом (10) получаем

$$\mathbf{H}_f \cdot \mathbf{n} = \frac{\mu_0}{\mu_0 + (\mu_f - \mu_0)\omega} \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{n}. \quad (11)$$

Отметим, что соотношение (11) фактически означает, что для вычисления $\mu_f(\mathbf{H}_f)$ требуется решить нелинейное уравнение, поскольку $\mathbf{H}_f$ зависит от μ_f.

Рассмотрим куб со стороной 1 m, состоящий из шихтованного железа, слои которого перпендикулярны оси *Z*, расположенный в положительном октанте с вершиной в начале координат. Поместим этот куб во внешнее магнитное поле $\mathbf{H} = (1,\ 2,\ 3) \cdot 250\,000$ A/m. Построим конечно-элементные сетки, содержащие 5, 10 и 20 слоев железа, так, что доля изолятора в общем объеме куба ω будет для всех сеток одинаковой и равной 0.05. Будем сравнивать решения на этих трех сетках с решением задачи на четвертой сетке, не содержащей слоев, но с анизотропным тензором магнитной проницаемости.

На рис. 1 показано относительное отклонение[1] решения линейной задачи на сетках с фактически заданными слоями от решения с анизотропным коэффициентом для случая, когда относительная магнитная проницаемость стали считается равной 1000. Поле для построения графиков находится в 1 cm от поверхности куба вдоль оси *X* при $y = 0.5$ и $z = 1.01$ (рис. 1, *a*) и вдоль оси *Z* при $y = 0.5$ и $x = 1.01$ (рис. 1, *b*). Для сравнения здесь же приведено относительное отклонение решения задачи с изотропным коэффициентом магнитной проницаемости 1000, заданным на сплошном кубе. Заметно, что с увеличением числа слоев решение сходится к анизотропному.

На рис. 2 и 3 приведены аналогичные результаты для решения задачи с коэффициентом магнитной проницаемости, зависящим от поля. Использована кривая зависимости для стали 10. Для сравнения добавлены относительное отклонение поля, полученное без использования формулы (11) (обозначено „0 *corrections*") и кривая, полученная с однократным использованием

[1] Под относительным отклонением зависимости индукции $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ от зависимости $\hat{\mathbf{B}}(t)$ понимается отношение $100\% \cdot \sqrt{\left(\tilde{\mathbf{B}}_x(t) - \hat{\mathbf{B}}_x(t)\right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{B}}_y(t) - \hat{\mathbf{B}}_y(t)\right)^2 + \left(\tilde{\mathbf{B}}_z(t) - \hat{\mathbf{B}}_z(t)\right)^2} \Big/ \max_t(|\hat{\mathbf{B}}(t)|)$.

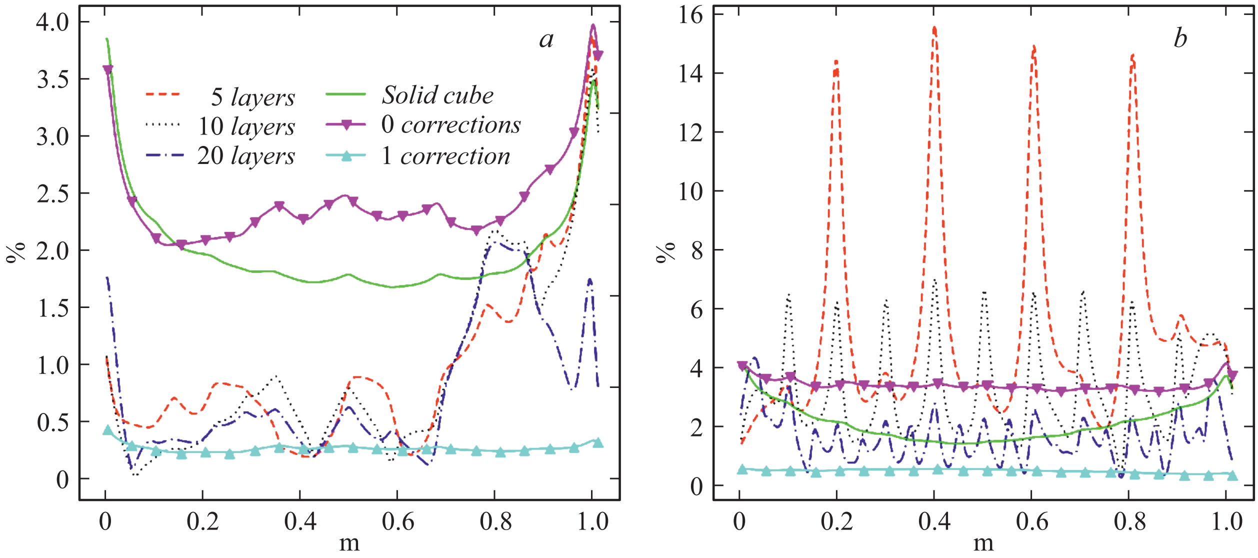

Рис. 2. Решение нелинейной задачи на расстоянии 1 cm от граней куба: *a* — вдоль оси X, *b* — вдоль оси Z.

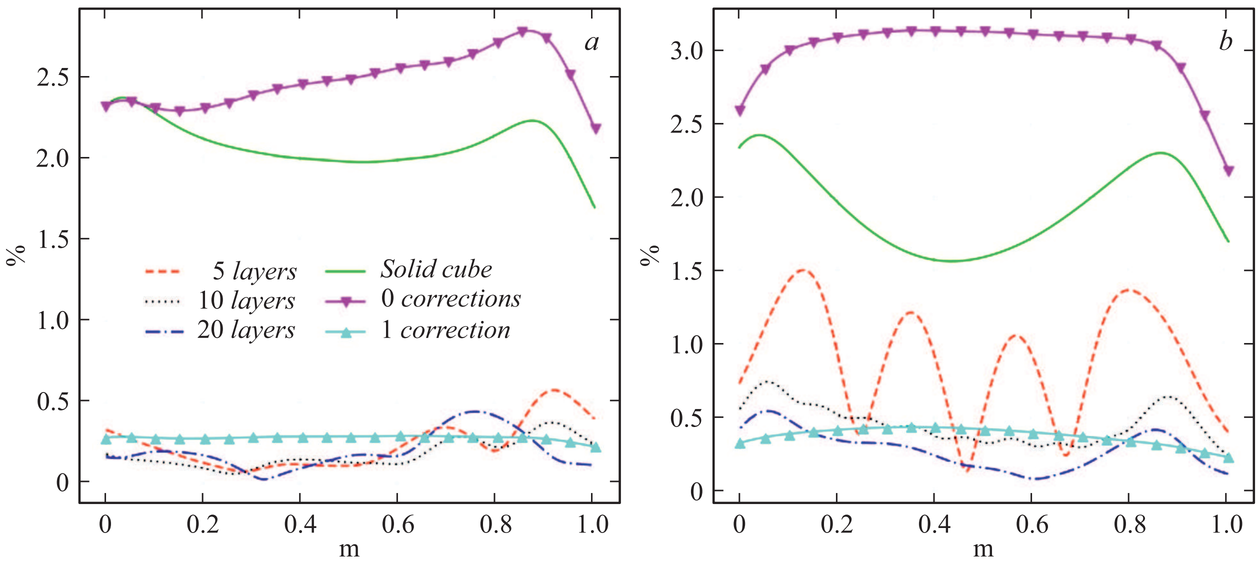

Рис. 3. Решение нелинейной задачи на расстоянии 10 cm от граней куба: *a* — вдоль оси X, *b* — вдоль оси Z.

формулы (11) для вычисления $\mu_f(\mathbf{H}_f)$ (т. е. без итерационного уточнения, обозначено „1 *correction*").

Как видно из рисунков, отказ от использования соотношения (11) приводит к существенной погрешности. Обратим также внимание на то, что использованный в работе [10] одного из авторов данной статьи способ отказа от итерационного уточнения в (11), фактически заключающийся в приравнивании к нулю $\mathbf{H}_f \cdot \mathbf{n}$, оказался вообще не работоспособным в общем случае и дает решение даже хуже, чем вообще без использования (11).

Полученные результаты вычислительных экспериментов показывают, что с увеличением числа пластин решение задачи для куба из шихтованной стали действительно достаточно быстро сходится к решению анизотропной задачи. При этом использование соотношения (11) без итерационного уточнения приводит к относительно небольшой погрешности и может быть использовано для грубых расчетов. Обратим также внимание на то, что при небольшом числе пластин (5–10) расчеты с использованием анизотропии приводят к заметной погрешности, особенно вблизи стали.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-10203).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Bastos J., Quichaud G.* // IEEE Trans. Magn. 1985. V. 21. N 6. P. 2366–2369.

[2] *Silva V.C., Meunier G., Foggia A.* // IEEE Trans. Magn. 1995. V. 31. N 3. P. 2139–2141.

[3] *Muramatsu K., Okitsu T., Fujitsu H., Shimanoe F.* // IEEE Trans. Magn. 2004. V. 40. N 2. P. 896–899.

[4] *Lin D., Zhou P., Badics Z., Fu W.N., Chen Q.M., Cendes Z.J.* // IEEE Trans. Magn. 2006. V. 42. N 4. P. 963–966.

[5] *Lin R., Haavisto A., Arkkio A.* // IEEE Trans. Magn. 2010. V. 46. N 11. P. 3933–3938.

[6] *Martin F., Belahcen A., Lehikoinen A., Rasilo P.* // IEEE Trans. Magn. 2015. V. 51. N 12. P. 1–6.

[7] *Gyselinck J., Dular P., Krähenbühl L., Sabariego R.V.* // IEEE Trans. Magn. 2015. V. 52. N 3. P. 1–4.

[8] *Kitao J., Takahashi Y., Fujiwara K., Ahagon A., Matsuo T., Daikoku A.* // IEEE Trans. Magn. 2017. V. 53. N 6. P. 1–4.

[9] *Jiang F., Rossi M., Parent G.* // AIP Adv. 2018. V. 8. N 5. P. 056104.

[10] *Игнатьев А.Н., Рояк М.Э.* // Науч. Вестн. НГТУ. 2010. № 2. С. 91–100.

[11] *Корсун М.М., Рояк М.Э.* // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2011. № 4 (134). С. 64–71.