

Управление областью модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн в нелокальной джозефсоновской электродинамике тонкой сверхпроводящей пленки

© А.И. Ломтев

Донецкий физико-технический институт Национальной академии наук Украины,
83114 Донецк, Украина

E-mail: lomtev@kinetic.ac.donetsk.ua

(Поступила в Редакцию 22 апреля 2003 г.)

В рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики исследована модуляционная неустойчивость диспергирующих электромагнитных волн, распространяющихся в джозефсоновском переходе в тонкой сверхпроводящей пленке. Получено дисперсионное уравнение для инкремента нарастания малых амплитудных возмущений. Впервые для диспергирующих волн выявлено стабилизирующее влияние пространственной нелокальности на модуляционную неустойчивость в актуальной длинноволновой области $0 \leq Q \leq Q_{B1}(k)$. Продемонстрирована уникальная возможность управления областью модуляционной неустойчивости $Q_{B1}(k) < Q < Q_{B2}(k, A, L)$ при помощи дисперсионного параметра — волнового вектора \mathbf{k} (или частоты $\omega(k)$) волн линейного приближения. Показано также, что при величине волнового вектора $0 \leq Q \leq Q_{B1}(k)$ и $Q \leq Q_{B2}(k, A, L)$ волны являются устойчивыми.

1. До сих пор не ослабевает интерес к исследованию широкого круга явлений неустойчивости волн в различных нелинейных системах и средах [1,2]. Известно, что сжатие нелинейной волны может происходить как в поперечном, так и в продольном направлении по отношению к направлению распространения волны. В качестве примеров можно привести самофокусировку света, предсказанную Аскарьяном [3,4], неустойчивость типа разбиения волны на пакеты и самосжатия волновых пакетов — модуляционную неустойчивость, которая была впервые изучена Лайтхиллом [5]. Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в оптических волокнах описывается неустойчивостью решений нелинейного уравнения Шредингера [6], в распределенных джозефсоновских переходах — неустойчивостью решений уравнения sine-Gordon [7,8]. Явление модуляционной неустойчивости не только вызывает теоретический интерес, но и имеет также ряд практических приложений. Например, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотой повторения [6], а также для разработки новых логических устройств [9].

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать пространственно нелокальные модификации нелинейного уравнения Шредингера [10] и уравнения sine-Gordon [11–22].

Так, в работах [11,12] показано, что эффекты нелокальности могут быть существенными даже в контактах массивных сверхпроводников с большой толщиной $d \gg \lambda$ (λ — лондоновская глубина проникновения) вдоль магнитного поля (по направлению вихрей), т. е. в ситуациях, до того рассматривавшихся в локальном приближении. В противоположном предельном случае контактов в тонких пленках, когда $d \ll \lambda$, локальный

предел отсутствует, а нелокальность очень существенна и становится определяющим фактором. Соответствующие уравнения получены и изучались в работах [13–16]. Как показали исследования в [17–19], для джозефсоновской электродинамики тонких пленок магнитных (двумерных и трехмерных) сверхпроводников наряду с нелокальностью существенными становятся и эффекты запаздывания. Джозефсоновский переход между двумя сверхпроводящими слоями конечной толщины в направлении, ортогональном магнитному полю вихрей, изучался в работе [20]. В [21,22] осуществлено рассмотрение контакта „встык“ и наклонного (скошенного) перехода конечной толщины вдоль магнитного поля вихрей при произвольном отношении d/λ .

Из-за различных геометрий задач в перечисленных выше работах [11–22] уравнения джозефсоновской электродинамики отличаются видом ядра интегрального оператора, описывающего эффект нелокальной связи. Однако во всех этих работах нелокальность уравнений для разности фаз возникает вследствие нелокальной связи поля на границе раздела и в сверхпроводнике. Такая причина нелокальности является универсальной для электродинамики джозефсоновских контактов, а сама нелокальность становится скорее правилом, чем исключением.

Модуляционная неустойчивость в рамках нелокальной джозефсоновской электродинамики контакта из массивных сверхпроводников впервые рассмотрена в [11]. В этой работе показано, что процесс нарастания малых возмущений амплитуды и фазы отвечает развитию модуляционной неустойчивости электромагнитной волны конечной постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты и с законом дисперсии линейного приближения. Выявлено стабилизирующее влияние нелокальности на модуляционную устойчивость. В работе [23] для джо-

зефсоновского перехода также из массивных сверхпроводников исследована модуляционная неустойчивость осциллирующей с джозефсоновской частотой плоской нелинейной однородной (недиспергирующей) электромагнитной волны конечной амплитуды, обусловленная нарастанием малых амплитудных возмущений и приводящая к разбиению такой волны на пакеты.

Как в [11], так и в [23] область модуляционной неустойчивости для возмущений с волновым вектором \mathbf{Q} имеет вид $0 < Q < Q_B$, где Q_B — некоторый пограничный волновой вектор. Поэтому актуальная длинноволновая область волновых векторов возмущений $Q \rightarrow 0$ всегда являлась неустойчивой.

Как показано далее, нелокальность уравнения джозефсоновской электродинамики в тонких пленках для волн с дисперсией препятствует развитию модуляционной неустойчивости относительно нарастания малых амплитудных возмущений именно в актуальной длинноволновой области $0 \leq Q \leq Q_{B1}(k)$. Тем более актуальным становится исследование модуляционной неустойчивости диспергирующих электромагнитных волн в рамках нелокальной электродинамики Джозефсона в тонких двумерных сверхпроводящих пленках, которое до сих пор не проводилось.

2. Примером нелинейной системы, в которой проявляется модуляционная неустойчивость, может служить переход Джозефсона в ультратонкой пленке сверхпроводника толщиной $d \ll \lambda$.

В джозефсоновском переходе, состоящем из тонких сверхпроводящих пленок толщиной $d \ll \lambda$, динамика разности фаз волновых конденсатных функций на берегах контакта $\varphi(x, t)$ в бездиссипативном пределе описывается нелинейным нелокальным уравнением sine-Gordon [16]

$$\frac{1}{\omega_J^2} \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} + \sin \varphi(x, t) = L_J \int_{-\infty}^{\infty} dx' K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) \frac{\partial^2 \varphi(x', t)}{\partial x'^2}, \quad (1)$$

где $L_J = \lambda_J^2/\lambda$; ω_J и λ_J — джозефсоновские частоты и длина соответственно; $\lambda_{\text{eff}} = \lambda^2/d$ — пирловская длина, а нелокальное ядро $K\left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}}\right)$ имеет вид

$$K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) = \frac{2\lambda_{\text{eff}}}{\pi} \int_0^{\infty} dq \frac{J_0 q(x-x')}{1+2q\lambda_{\text{eff}}}, \quad (2)$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Диспергирующие волны бесконечно малой амплитуды

$$\varphi(x, t) = \varphi_0 \exp[i(kx - \omega t)], \quad |\varphi_0| \ll 1, \quad (3)$$

распространяющиеся вдоль перехода Джозефсона с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , в силу уравнения (1)

и аппроксимации $\sin \varphi(x, t) \approx \varphi(x, t)$ обладают в линейном приближении вещественным спектром

$$\frac{\omega(k)}{\omega_J} = \left[1 + \frac{L}{\pi} (2k\lambda_{\text{eff}})^2 J(2k\lambda_{\text{eff}}) \right]^{1/2}, \quad (4)$$

где $L = L_J/2\lambda_{\text{eff}}$, а $J(q)$ можно выразить через интеграл:

$$J(q) = 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{q \operatorname{ch} x + 1}, \quad \text{который равен}$$

$$J(q) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-q^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1-q^2}}{1 - \sqrt{1-q^2}}, \quad q \leq 1, \\ J(q) = \frac{4}{\pi \sqrt{q^2-1}} \arctan \frac{\sqrt{q^2-1}}{q+1}, \quad q \geq 1. \quad (5)$$

Рассмотрим эволюцию нелинейных диспергирующих электромагнитных волн малой, но конечной амплитуды в переходе. Представим разность фаз $\varphi(x, t)$ в виде

$$\varphi(x, t) = u(x, t) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} + u^*(x, t) \exp\{-i[kx - \omega(k)t]\}, \quad u(x, t) \ll 1, \quad (6)$$

где несущая мода является диспергирующей волной линейного приближения (3) со спектром (4).

Аппроксимируя $\sin \varphi(x, t) \approx \varphi(x, t) - \varphi^3(x, t)/3!$ [24], учтем в уравнении (1) нижайший порядок нелинейности на фазе основной несущей гармоники и ограничимся приближением медленно меняющейся во времени амплитуды $u(x, t)$, когда справедливо неравенство $|\partial^2 u(x, t)/\partial t^2| \ll 2\omega(k)|\partial u(x, t)/\partial t|$. Тогда из уравнения (1) при подстановке в него поля (6) для амплитуды $u(x, t)$ получаем следующее уравнение:

$$i2 \frac{\omega(k)}{\omega_J^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega(k)^2}{\omega_J^2} - 1 + \frac{1}{2} |u(x, t)|^2 \right] u(x, t) + L_J \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) \left[\frac{\partial^2 u(x', t)}{\partial x'^2} + 2ik \frac{\partial u(x', t)}{\partial x'} - k^2 u(x', t) \right] \exp[-ik(x-x')] dx' = 0. \quad (7)$$

Это нелинейное нелокальное уравнение имеет точное решение вида нелинейной плоской однородной волны постоянной амплитуды A с нелинейным сдвигом частоты

$$u_0(t) = A \exp[i\omega_J^2 A^2 t/4\omega(k)], \quad A \ll 1. \quad (8)$$

Исследуем устойчивость такого решения. О характере распада плоской волны (8) можно судить по развитию ее малых возмущений. С этой целью допустим, что случайно возникло малое возмущение амплитуды $\psi(x, t)$:

$$u(x, t) = [A + \psi(x, t)] \exp[i\omega_J^2 A^2 t/4\omega(k)], \\ |\psi(x, t)| \ll A. \quad (9)$$

Из уравнения (7) для малого возмущения $\psi(x, t)$ следует линейное уравнение

$$i \frac{2\omega(k)}{\omega_J^2} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2} - 1 \right] \psi(x, t) + \frac{A^2}{2} [\psi(x, t) + \psi^*(x, t)] + L_J \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) \times \left[\frac{\partial^2 \psi(x', t)}{\partial x'^2} + i2k \frac{\partial \psi(x', t)}{\partial x'} - k^2 \psi(x', t) \right] \times \exp[-ik(x-x')] dx' = 0. \quad (10)$$

Полагая в уравнении (10) $\psi(x, t) = v(x, t) + iw(x, t)$, для действительной и мнимой частей возмущения получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega(k)}{\omega_J^2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2} - 1 \right] w(x, t) \\ & + L_J \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) \left[\frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial x'^2} + 2k \frac{\partial v(x', t)}{\partial x'} - k^2 w(x', t) \right] \exp[-ik(x-x')] dx' = 0, \\ & - \frac{2\omega(k)}{\omega_J^2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \left[\frac{\omega^2(k)}{\omega_J^2} - 1 + A^2 \right] v(x, t) \\ & + L_J \int_{-\infty}^{\infty} K \left(\frac{x-x'}{2\lambda_{\text{eff}}} \right) \left[\frac{\partial^2 v(x', t)}{\partial x'^2} - 2k \frac{\partial w(x', t)}{\partial x'} - k^2 v(x', t) \right] \exp[-ik(x-x')] dx' = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для амплитудных возмущений вида (произвольные возмущения можно представить как суперпозицию таких полей)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= V(Q, \Omega) \exp[i(Qx - \Omega t)], \\ w(x, t) &= W(Q, \Omega) \exp[i(Qx - \Omega t)], \end{aligned} \quad (12)$$

распространяющихся вдоль перехода Джозефсона с волновым вектором \mathbf{Q} и частотой Ω , из системы уравнений (11) следует дисперсионное соотношение $\Omega = \Omega(Q)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(\tilde{Q}) &= \frac{L\tilde{Q}\tilde{k}}{\pi\tilde{\omega}(\tilde{k})} J(\tilde{Q} + \tilde{k}) \pm \frac{1}{2\tilde{\omega}(\tilde{k})} \\ & \times \left[\tilde{\omega}^2(\tilde{Q} + \tilde{k}) - \tilde{\omega}^2(\tilde{k}) - \frac{2L}{\pi} \tilde{Q}\tilde{k}J(\tilde{Q} + \tilde{k}) \right]^{1/2} \\ & \times \left[\tilde{\omega}^2(\tilde{Q} + \tilde{k}) - \tilde{\omega}^2(\tilde{k}) - \frac{2L}{\pi} \tilde{Q}\tilde{k}J(\tilde{Q} + \tilde{k}) - A^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (13)$$

определяющее инкремент нарастания $\tilde{\gamma}(\tilde{Q}) = \text{Im} \tilde{\Omega}(\tilde{Q})$, где $\tilde{\gamma}(\tilde{Q}) = \text{Im} \Omega(\tilde{Q})/\omega_J$, $\tilde{k} = 2k\lambda_{\text{eff}}$, $\tilde{Q} = 2Q\lambda_{\text{eff}}$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_J$, $\tilde{\Omega} = \Omega/\omega_J$, а $\tilde{\omega}(\tilde{k})$ задается формулой (4) с учетом (5).

Согласно выражению (13), которое всегда имеет решение $\tilde{\Omega}(\tilde{Q}) = \text{Re} \tilde{\Omega}(\tilde{Q}) + i \text{Im} \tilde{\Omega}(\tilde{Q})$ с положительной мнимой частью, амплитудные возмущения (12) с волновым числом Q будут нарастать с инкрементом $\gamma(Q)$. Процесс нарастания малых возмущений амплитуды отвечает развитию модуляционной неустойчивости волны постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты (8) и с законом дисперсии волн линейного приближения (4). Заметим, что инкремент нарастания $\gamma(Q)$ из дисперсионного соотношения (13) определяется не производной от групповой скорости волн $\partial^2 \omega(k)/\partial k^2$, как в работе [11], а непосредственно спектром $\omega(k)$ волн линейного приближения (4).

3. Для волн (4) без дисперсии (при величине $k = 0$) частота $\omega(k) \equiv \omega_J$, и дисперсионное соотношение (13) записывается в виде

$$\tilde{\Omega}(\tilde{Q}) = \pm i \frac{L^{1/2}}{2\pi^{1/2}} \tilde{Q} J^{1/2}(\tilde{Q}) \left[A^2 - \frac{L}{\pi} \tilde{Q}^2 J(\tilde{Q}) \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Дисперсионное уравнение (14) с учетом (5) для инкремента нарастания возмущения имеет положительное решение $\tilde{\gamma}(\tilde{Q}) > 0$ в области волновых векторов $0 < \tilde{Q} < \tilde{Q}_B$, в которой малые возмущения амплитуды (12) будут нарастать со временем и при этом будет развиваться модуляционная неустойчивость плоской нелинейной электромагнитной волны (5) со спектром $\tilde{\omega}(\tilde{k} \equiv 0) \equiv 1$. В области волновых векторов $\tilde{Q} \geq \tilde{Q}_B$ $\tilde{\gamma}(\tilde{Q}) \equiv 0$, и волна является устойчивой. Пограничный волновой вектор \tilde{Q}_B определяется из уравнения

$$\tilde{Q}_B^2 J(\tilde{Q}_B) = \frac{\pi A^2}{2L}. \quad (15)$$

Максимальное значение инкремента нарастания возмущений равно

$$\tilde{\gamma}_{\text{max}}(\tilde{Q}_m) = A^2/4 \quad (16)$$

и достигается при значении волнового вектора \tilde{Q}_m , являющемся корнем уравнения

$$\tilde{Q}_m^2 J(\tilde{Q}_m) = \frac{\pi A^2}{4L}. \quad (17)$$

Результаты этого раздела подтверждают результаты работы [25].

4. Учет дисперсии несущих волн линейного приближения (3) со спектром (4) кардинальным образом видоизменяет, во-первых, зависимость инкремента нарастания $\tilde{\gamma}(\tilde{Q})$ от величины волнового вектора \tilde{Q} и, во-вторых, ту область изменения волнового вектора, где $\tilde{\gamma}(\tilde{Q})$ отлична от нуля и положительна. Для волн с дисперсией при $k \neq 0$ дисперсионное уравнение (13) с учетом (5) удастся исследовать лишь численно. В области волновых векторов $2k\lambda_{\text{eff}} \approx 1$, в которой очень существенна пространственная нелокальность, при выполнении неравенства $L \ll 1$ численный анализ показал существование двух областей устойчивости волн ($0 \leq Q \leq Q_{B1}(k)$ и

$Q \geq Q_{B2}(k, A, L)$) и одной области их неустойчивости ($Q_{B1}(k) < Q < Q_{B2}(k, A, L)$). Под областью модуляционной неустойчивости следует понимать ту область волновых векторов малых амплитудных модуляций, для которой величина инкремента их нарастания $\tilde{\gamma}(\tilde{Q})$ положительна и отлична от нуля.

На рис. 1 показаны области модуляционной неустойчивости при фиксированных значениях величин амплитуды A и параметра L для четырех значений величины приведенного волнового вектора \tilde{k} .

Из рис. 1 видно, что существует уникальная возможность управления областью модуляционной неустойчивости с помощью волнового вектора несущей волны (моды линейного приближения) \tilde{k} (или соответствующей ему частоты $\tilde{\omega}(\tilde{k})$), с увеличением которого область неустойчивости смещается как целое в сторону больших величин \tilde{Q} . Поэтому при $\tilde{k} \neq 0$, т.е. для волн с дисперсией, актуальная область волновых векторов $0 \leq \tilde{Q} \leq \tilde{Q}_{B1}(k)$ всегда является устойчивой.

На рис. 2 изображены области модуляционной неустойчивости при фиксированных величинах волнового вектора \tilde{k} и амплитуды A для четырех значений параметра L . Видно, что с ростом параметра L величина области модуляционной неустойчивости по волновому вектору \mathbf{Q} сужается, а величина максимального значения инкремента нарастания несколько уменьшается.

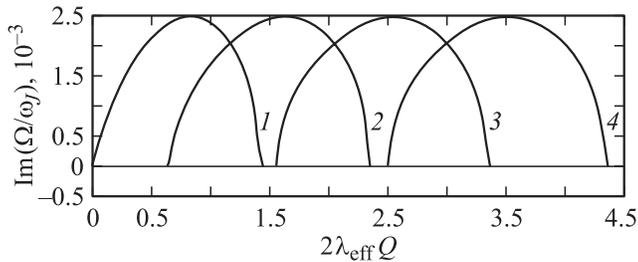


Рис. 1. Области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной диспергирующей электромагнитной волны (8) при фиксированных значениях амплитуды $A = 10^{-1}$ и параметра $L = 10^{-2}$ для значений приведенного волнового вектора $\tilde{k} = 0$ (1), 1 (2), 2 (3), и 3 (4).

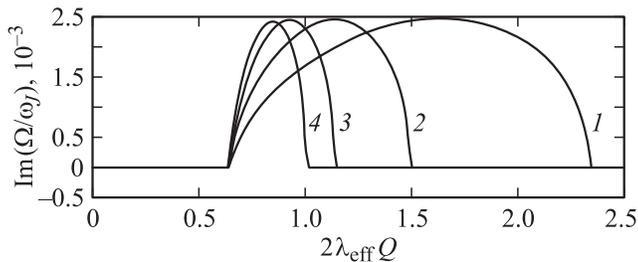


Рис. 2. Области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной диспергирующей электромагнитной волны (8) при фиксированных значениях волнового вектора $\tilde{k} = 1$ и амплитуды $A = 10^{-1}$ для значений параметра $L = 10^{-2}$ (1), $2.5 \cdot 10^{-2}$ (2), $5 \cdot 10^{-2}$ (3) и $7.5 \cdot 10^{-2}$ (4).

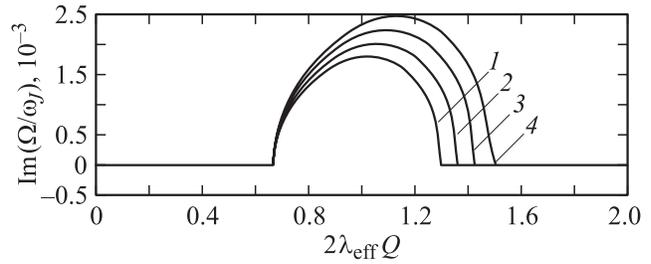


Рис. 3. Области модуляционной неустойчивости плоской нелинейной диспергирующей электромагнитной волны (8) при фиксированных значениях волнового вектора $\tilde{k} = 1$ и параметра $L = 2.5 \cdot 10^{-2}$ для значений амплитуды $A = 0.85 \cdot 10^{-1}$ (1), $0.9 \cdot 10^{-1}$ (2), $0.95 \cdot 10^{-1}$ (3) и 10^{-1} (4).

На рис. 3 показаны области модуляционной неустойчивости при фиксированных величинах волнового вектора \tilde{k} и параметра L для четырех значений амплитуды A . С ростом A область модуляционной неустойчивости расширяется, а максимальное значение инкремента нарастания увеличивается.

5. Итак, нелокальность уравнения для разности фаз оказывается очень существенной для нелинейных плоских диспергирующих волн постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты. Во-первых, для волн с дисперсией актуальная область крупномасштабных возмущений амплитуды всегда является устойчивой. Во-вторых, существует уникальная возможность управления областью модуляционной неустойчивости при помощи параметра дисперсии — волнового вектора \mathbf{k} или частоты $\omega(k)$, что весьма важно при проведении соответствующих экспериментальных исследований.

Важно помнить, что в теории джозефсоновских переходов частота $\omega(k)$ должна быть меньше предельной Δ [26], определяющейся шириной энергетической щели $\Delta(T)$.

Экспериментально развитие модуляционной неустойчивости можно наблюдать в длинных переходах Джозефсона, состоящих из ультратонких сверхпроводящих пленок, при возбуждении в них диспергирующих волн конечной амплитуды с малой ее модуляцией. Диспергирующая плоская нелинейная волна постоянной амплитуды с нелинейным сдвигом частоты в процессе развития модуляционной неустойчивости будет эволюционировать в цепочку импульсов — волновых пакетов, частота повторения которых обусловлена периодом модуляции амплитуды исходной волны $L_0 = 2\pi/Q$, для волновых векторов \mathbf{Q} , определяемых неравенством $Q_{B1}(k) < Q < Q_{B2}(k, A, L)$. Поскольку мы не учитывали фазовые модуляции, а ограничились лишь рассмотрением модуляций амплитуды, самосжатия волновых пакетов наблюдаться не будет.

Аналогичное поведение областей модуляционной неустойчивости диспергирующих волн следует ожидать также и в джозефсоновских переходах из массивных сверхпроводников толщиной $d \gg \lambda$.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю признательность Ю.В. Медведеву и И.Б. Краснюку за полезные обсуждения, внимание и поддержку.

Список литературы

- [1] В.И. Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Наука, М. (1973). 176 с.
- [2] Б.Б. Кадомцев. Коллективные явления в плазме. Наука, М. (1976). 240 с.
- [3] Г.А. Аскарьян. ЖЭТФ **42**, 6, 1567 (1962).
- [4] В.И. Беспалов, В.И. Таланов. Письма в ЖЭТФ **3**, 12, 471 (1966).
- [5] M.J. Lighthill. J. Inst. Math. Appl. **1**, 2, 269 (1965); Proc. Roy. Soc. A **229**, 1, 28 (1967).
- [6] A. Hasegawa. Opt. Lett. **9**, 3, 288 (1984).
- [7] Н.Н. Ахмедиев, В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин. Изв. вузов. Радиофизика **31**, 2, 244 (1988).
- [8] N.M. Ercolani, M.G. Forest, D.W. McLaughkin. Lett. Appl. Math. **23**, 1, 149 (1986).
- [9] M. Islam. Ultra fast optical devices. Oxford University Press, Oxford (1993).
- [10] M. Alfimov, V.M. Eleonsky, N.E. Kulagin. Chaos **2**, 4, 454 (1992).
- [11] Ю.М. Алиев, В.П. Силин, С.А. Урюпин. Сверхпроводимость **5**, 2, 228 (1992).
- [12] A. Gurevich. Phys. Rev. B **46**, 5, 3187 (1992).
- [13] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. Письма в ЖЭТФ **51**, 2, 100 (1990).
- [14] Yu.M. Ivanchenko, T.K. Soboleva. Phys. Lett. A **147**, 1, 65 (1990).
- [15] Ю.М. Иванченко, Т.К. Соболева. ФТТ **32**, 7, 2029 (1990).
- [16] R.G. Mints, I.V. Snapiro. Phys. Rev. B **51**, 5, 3054 (1995).
- [17] А.И. Ломтев. Письма в ЖЭТФ **69**, 2, 132 (1999).
- [18] А.И. Ломтев. ФТТ **42**, 1, 16 (2000).
- [19] А.И. Ломтев. ЖТФ **70**, 9, 63 (2000).
- [20] И.О. Кулик, И.К. Янсон. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. Наука, М. (1970). 272 с.
- [21] Ю.Е. Кузовлев, А.И. Ломтев. ЖЭТФ **111**, 5, 1803 (1997).
- [22] А.И. Ломтев. ЖЭТФ **113**, 6, 2256 (1998).
- [23] Ф.Х. Абдуллаев. Письма в ЖТФ **23**, 2, 8 (1997).
- [24] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Мир, М. (1988). 694 с.
- [25] А.И. Ломтев. Письма в ЖТФ **29**, 8, 72 (2003).
- [26] А.И. Ларкин, Ю.Н. Овчинников. ЖЭТФ **51**, 5(11), 1535 (1966).