

10,18

## Динамика трехкомпонентной делокализованной нелинейной колебательной моды в графене

© С.А. Щербинин<sup>1</sup>, М.Н. Семенова<sup>2</sup>, А.С. Семенов<sup>2</sup>, Е.А. Корзникова<sup>3</sup>, Г.М. Чечин<sup>1</sup>, С.В. Дмитриев<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет, Институт физики, Ростов-на-Дону, Россия

<sup>2</sup> Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Политехнический институт (филиал) в Мирном, Мирный, Саха (Якутия), Россия

<sup>3</sup> Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, Уфа, Россия

<sup>4</sup> Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск, Россия

E-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com

Поступила в Редакцию 2 апреля 2019 г.

В окончательной редакции 6 июня 2019 г.

Принята к публикации 14 июня 2019 г.

Методом молекулярной динамики исследуется динамика трехкомпонентной нелинейной делокализованной колебательной моды в графене. Данная мода, являясь суперпозицией корневой моды и двух однокомпонентных мод, является точным, симметрично обусловленным решением нелинейных уравнений движения атомов углерода. Рассчитаны зависимости частоты, энергии на атом и средних за период напряжений, возникающих в графене, как функции амплитуды корневой моды. Показано, что при определенном выборе амплитуд трех составляющих мод, колебания становятся периодическими, причем, колебания однокомпонентных мод близки к периодическим и имеют частоту в два раза выше частоты корневой моды, что заметно выше верхней границы спектра малоамплитудных колебаний решетки графена. Полученные данные расширяют наши представления о нелинейных колебаниях решетки графена.

**Ключевые слова:** нелинейная динамика, графен, делокализованные колебания, генерация второй гармоники.

DOI: 10.21883/FIT.2019.11.48423.444

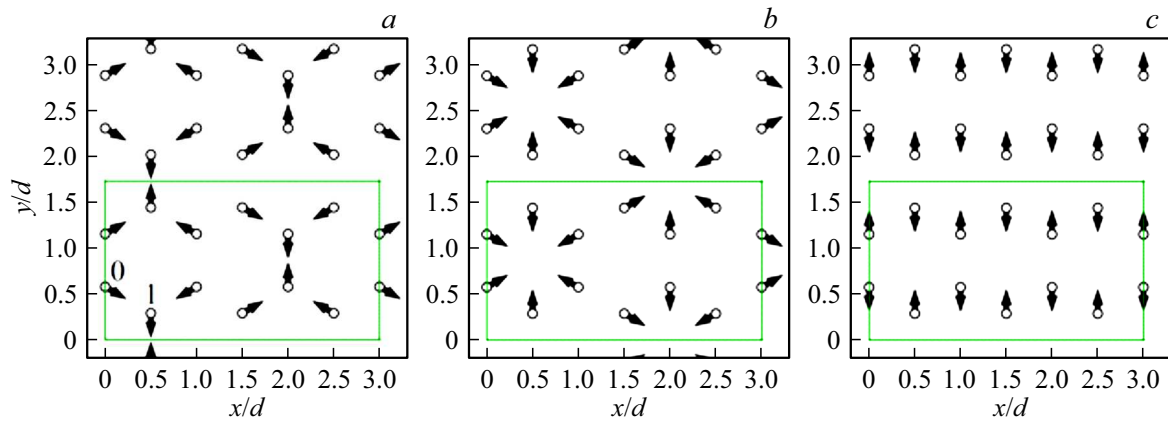
### 1. Введение

При значительных амплитудах колебаний кристаллических решеток существенную роль начинает играть нелинейность межатомных взаимодействий. Для поиска решений нелинейных уравнений движения атомов, в общем случае, не существует точных аналитических методов, однако некоторые точные решения могут быть построены исходя из анализа точечной симметрии решетки. Такой подход был развит в работе [1] и использовался для анализа нелинейных колебательных мод отдельной молекулы SF<sub>6</sub> [2], нелинейной LC цепочки [3], треугольной решетки с морзевским взаимодействием [4] и графена [5]. Суть метода состоит в симметричном анализе исследуемой динамической системы и в поиске симметрично-обусловленных колебательных мод, которые существуют для любых амплитуд колебаний и вне зависимости от типа взаимодействий между элементами системы. Для систем с трансляционной симметрией такие моды оказываются делокализованными и пространственно-периодическими. Динамика таких мод описывается  $N$  связанными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, где  $N$  — число компонент рассматриваемой делокализованной нелинейной колебательной моды (ДНКМ).

Если для двумерной гексагональной решетки (как у графена) рассматривать движение атомов только в его плоскости, то оказывается, что она поддерживает четыре однокомпонентных ДНКМ [5], двенадцать двухкомпонентных ДНКМ [5], и только одну трехкомпонентную ДНКМ. Анализ ДНКМ с большим числом компонент представляет все возрастающую сложность.

По ряду причин исследование ДНКМ представляет интерес в физике конденсированного состояния. Например, было показано, что возбуждение однокомпонентных ДНКМ в гексагональной решетке с кубической нелинейностью изменяет их константы упругости [6]. Некоторые из двумерных ДНКМ могут породить в графене отрицательное давление и привести к генерации второй гармоники с частотами заметно выше верхнего края спектра малоамплитудных фоновых колебаний [7].

Существует тесная связь между ДНКМ и пространственно локализованными нелинейными колебаниями бездефектной решетки, называемыми дискретными бризерами [8–10]. Знание ДНКМ позволяет решить задачу поиска начальных условий, приводящих к возбуждению дискретных бризеров в кристаллах в молекулярно-динамических расчетах. Если частота ДНКМ с ростом амплитуды выходит из фонового спектра кристалла, то дискретный бризер может быть возбужден наложением



**Рис. 1.** Начальные смещения атомов для корневой моды (а) и однокомпонентных делокализованных колебательных мод (b) решетки графена. Все вектора перемещений на (а) имеют длину  $A$ , а на (b) и (c) длину  $B$  и  $C$  соответственно. Примитивная трансляционная ячейка трехкомпонентной ДНКМ включает 12 атомов углерода (показана прямоугольником). Координаты  $x$  и  $y$  нормированы на расстояние  $d = \sqrt{3}\rho$ , где  $\rho = 1.418 \text{ \AA}$  — межатомное расстояние.

на ДНКМ локализирующих функций. Этот достаточно общий подход успешно применялся для возбуждения дискретных бризеров в двумерной решетке Морзе [11] и в гексагональной решетке графена [12]. Наложением локализирующей функции на одномерный дискретный бризер в ГЦК решетке описанный в работе [13], можно получить нульмерный дискретный бризер впервые найденный Хаасом и др. в никеле [14].

ДНКМ при достаточно больших амплитудах часто оказываются модуляционно неустойчивыми. Интересно, что развитие модуляционной неустойчивости ДНКМ может приводить к локализации энергии на дискретных бризерах [15], что еще раз указывает на тесную взаимосвязь между делокализованными и локализованными нелинейными колебаниями решетки. Отметим, что распад модуляционно-неустойчивой колебательной  $\pi$ -моды с образованием дискретных бризеров впервые наблюдался в работе [16] и позднее в нелинейных решетках различной размерности [12,17,18].

Свойства однокомпонентных и двухкомпонентных ДНКМ в графене были исследованы [18], однако моды с большим числом компонент до сих пор не рассматривались. В частности, для многокомпонентных мод не известно, можно ли синхронизировать компоненты таким образом, чтобы получить периодические во времени колебания? Для всех двухкомпонентных мод в решетке графена такая возможность была показана [18]. В настоящей работе анализируется единственная трехкомпонентная ДНКМ, существующая в гексагональной решетке с атомными колебаниями в плоскости решетки. Представляется важным проверить численно выводы теоретико-группового анализа [5], позволяющего строить ДНКМ различной сложности. В качестве примера рассмотрена решетка графена, динамика которой описывается реалистичными межатомными потенциалами. Выбор графена для данного исследования обусловлен

высоким потенциалом его использования в различных нанотехнологиях [19–22].

## 2. Описание компьютерного эксперимента

Графен — это двумерный кристалл атомов углерода, собранных в гексагональную решетку. Выберем декартову систему координат с осями  $x$  и  $y$ , направленными вдоль направлений зигзаг и кресло, соответственно, см. рис. 1. Рассматриваются только движения атомов в плоскости листа графена. Межатомные взаимодействия описываются потенциалом Савина [23], при использовании которого равновесное межатомное расстояние оказывается равным  $\rho = 1.418 \text{ \AA}$ .

Для запуска трехкомпонентной ДНКМ достаточно задать начальные смещения атомам, как показано на рис. 1, а, при этом начальные скорости всех атомов равны нулю. Все вектора смещений имеют одинаковую длину  $A$ . Примитивная трансляционная ячейка трехкомпонентной ДНКМ включает 12 атомов углерода (показана прямоугольником). Отметим, что координаты  $x$  и  $y$  на рис. 1 нормированы на расстояние  $d = \sqrt{3}\rho = 2.456 \text{ \AA}$ .

В расчетах использовалась ячейка, содержащая 24 атома углерода, то есть удвоенная вдоль оси  $y$  примитивная трансляционная ячейка. При изучении модуляционной неустойчивости ДНКМ размер расчетной ячейки был увеличен до  $8 \times 12$  трансляционных ячеек, то есть количество атомов возросло до 1152. Вдоль обоих координатных направлений накладывались периодические граничные условия. Использовался NVE ансамбль, то есть постоянное число частиц, постоянный объем и постоянная энергия системы.

Уравнения движения атомов интегрировались методом Штормера шестого порядка точности с шагом интегрирования  $0.1 \text{ fs}$ .

Отметим, что на рис. 1, *b* и *c* показаны начальные смещения атомов для запуска однокомпонентных ДНКМ, где все вектора перемещений имеют длину *B* и *C*, соответственно. Данные симметрично обусловленные моды являются точными решениями нелинейных уравнений движения атомов для любой амплитуды и вне зависимости от типа используемых межатомных потенциалов. Запуск данных мод, при условии, что они не теряют свою устойчивость, не приводит к возбуждению других колебательных мод решетки. Оказывается, что запуск корневой колебательной моды, показанной на рис. 1, *a*, вовлекает в движение обе однокомпонентные моды, представленные на (*b*) и (*c*), и не возбуждает никаких других мод, в случае устойчивого движения данной трехкомпонентной ДНКМ. Динамика трехкомпонентной ДНКМ может быть описана тремя амплитудами составляющих ее корневой моды (*A*) и однокомпонентных мод (*B* и *C*), следующим образом:

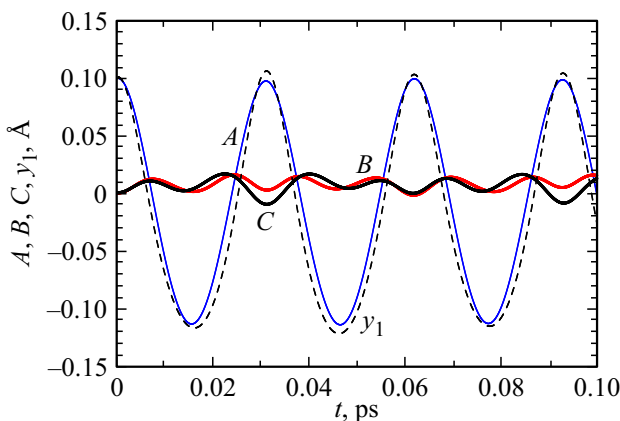
$$A = \frac{x_0}{\sqrt{3}} - \frac{y_0}{3} - \frac{y_1}{3}, \quad B = \frac{x_0}{\sqrt{3}} + \frac{y_0}{3} + \frac{y_1}{3},$$

$$C = \frac{y_1 - 2y_0}{3}, \quad (1)$$

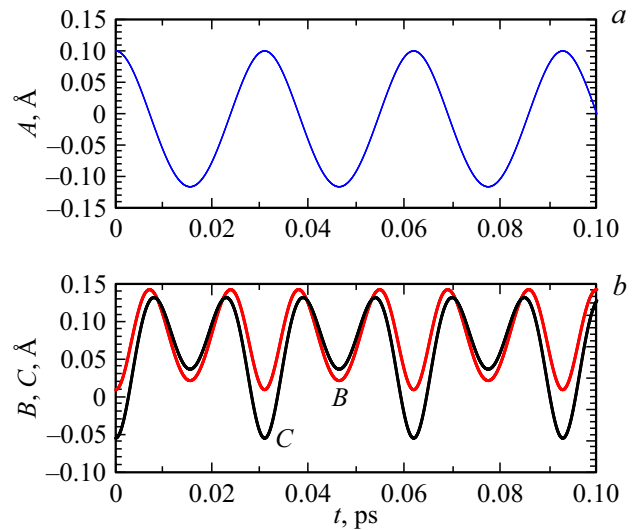
где  $(x_i, y_i), i = 0, 1$  — смещения атомов 0 и 1, отмеченных на рис. 1, *a*.

### 3. Результаты моделирования

На рис. 2 показаны как функции времени смещение атома 1,  $y_1$ , и амплитуды мод *A*, *B* и *C* для случая, когда в начальный момент времени атомы были выведены из положения равновесия согласно паттерну, изображенному на рис. 1, *a*, с длиной векторов перемещений



**Рис. 2.** Амплитуды корневой моды *A* и однокомпонентных мод *B* и *C*, а также *y*-перемещение атома 1 (отмечен на рис. 1, *a*) как функции времени. Начальные условия заданы в соответствии с паттерном перемещений, изображенном на рис. 1, *a* для случая длин векторов перемещений равных  $A = 0.1 \text{ \AA}$ . В нулевой момент времени амплитуды мод *B* и *C* равны нулю, но они неизбежно возбуждаются при запуске корневой моды с начальной амплитудой *A*.



**Рис. 3.** Амплитуды корневой моды (*a*) и однокомпонентных мод (*b*) как функции времени. В качестве начальных условий использовалась суперпозиция всех трех мод, представленных на рис. 1, *a–c*, с начальными амплитудами  $A = 0.1 \text{ \AA}$ ,  $B = 0.933 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$  и  $C = 0.5471 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$  соответственно. В результате получено периодическое движение трехкомпонентной ДНКМ с периодом 0.031 ps и частотой 32.3 THz. За один период колебания корневой моды, представленной на (*a*), однокомпонентные моды, показанные на (*b*), совершают две осцилляции на частоте 64.6 THz, что существенно выше верхнего края спектра малоамплитудных фоновых колебаний.

$A = 0.1 \text{ \AA}$ . Как видно из рисунка, возбуждение корневой моды при нулевых значениях амплитуд однокомпонентных мод *B* и *C* приводит к возбуждению этих мод. Напомним, что амплитуды мод находились из соотношений (1).

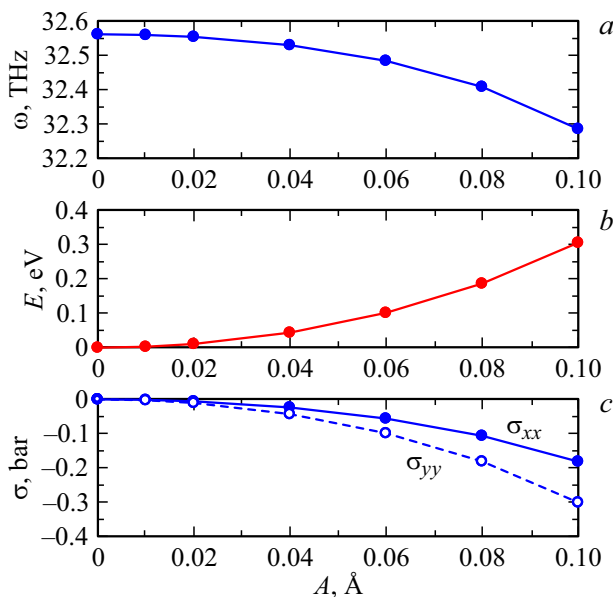
Для двухкомпонентных ДНКМ в графене было показано, что при должном выборе начальных амплитуд компонент можно добиться их синхронизации, так что результирующие колебания оказываются периодическими во времени [18]. Оказалось, что и для трехкомпонентной ДНКМ, при определенном выборе ненулевых значений амплитуд *B* и *C*, можно добиться строго периодического движения, что проиллюстрировано на рис. 3. Здесь в качестве начальных условий использовалась суперпозиция всех трех мод, представленных на рис. 1, *a–c* с начальными амплитудами  $A = 0.1 \text{ \AA}$ ,  $B = 0.933 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$  и  $C = 0.5471 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$  соответственно. Значения амплитуд *B* и *C* были найдены методом покоординатного спуска, минимизируя разницу между периодами колебаний данных однокомпонентных мод и периодом колебаний корневой моды. Отметим, что данный подход может применяться и для синхронизации ДНКМ с большим числом компонент. В результате получено периодическое движение трехкомпонентной ДНКМ с периодом 0.031 ps и частотой 32.3 THz. Из рис. 3 также видно, что за один период колебания корневой моды (см. *a*) однокомпонентные моды совершают по две осцилляции, что аналогично генерации второй

Значения амплитуд  $A$ ,  $B$  и  $C$ , при которых достигается периодическое движение изучаемой трехкомпонентной ДНКМ

$A, \text{Å}$	$B, \text{Å}$	$C, \text{Å}$
0.01	$0.969 \cdot 10^{-5}$	$-0.1318 \cdot 10^{-4}$
0.02	$0.400 \cdot 10^{-4}$	$-0.674 \cdot 10^{-4}$
0.04	$0.1724 \cdot 10^{-3}$	$-0.3944 \cdot 10^{-3}$
0.06	$0.408 \cdot 10^{-3}$	$-0.1194 \cdot 10^{-2}$
0.08	$0.7144 \cdot 10^{-3}$	$-0.27464 \cdot 10^{-2}$
0.1	$0.933 \cdot 10^{-3}$	$-0.5471 \cdot 10^{-2}$

гармоники, наблюдавшейся при изучении двухкомпонентных мод [18]. Удвоенная частота однокомпонентных мод, равная 64.6 THz, что существенно выше верхней границы спектра малоамплитудных колебаний решетки графена, располагающейся на отметке 46 THz [24,25]. В таблице приводятся значения амплитуд  $A$ ,  $B$  и  $C$ , при которых достигается периодическое движение изучаемой трехкомпонентной ДНКМ. Амплитуда корневой моды намного больше амплитуд однокомпонентных мод, причем, с ростом  $A$  относительная величина амплитуд  $B$  и  $C$  возрастает. Так, при  $A = 0.01$  амплитуды  $B$  и  $C$  на три порядка меньше  $A$ , в то время как при  $A = 0.1$  амплитуды  $B$  и  $C$  на два порядка меньше  $A$ .

Представим некоторые физические характеристики трехкомпонентной ДНКМ в режиме периодических во времени колебаний. На рис. 4, как функции амплитуды корневой моды, показаны (а) частота, (b) полная (кинетическая плюс потенциальная) энергия на атом и (c) осредненные за период колебания напряжения

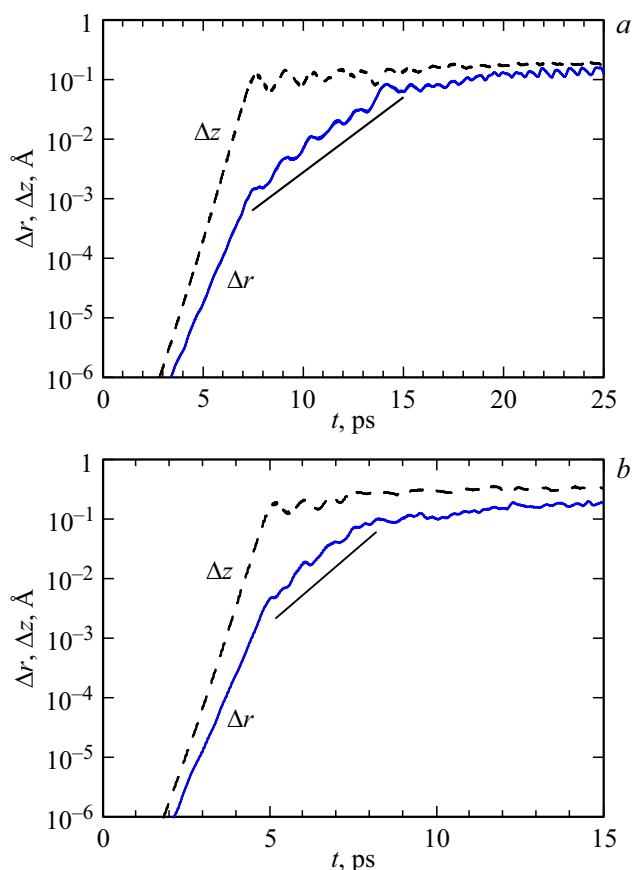


**Рис. 4.** Зависимости (а) частоты корневой моды, (b) полной энергии на атом и (c) средних за период напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , возникающих в листе графена, от амплитуды корневой моды трехкомпонентной ДНКМ в режиме периодического движения. Соответствующие амплитуды однокомпонентных мод  $B$  и  $C$  брались из табл. 1.

$\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , возникающие в листе графена в результате запуска ДНКМ. Отметим, что при расчете напряжений предполагалось, что толщина листа графена равна  $3.3 \text{Å}$ , что соответствует межплоскостному расстоянию в графите. Как следует из приведенных результатов, трехкомпонентная ДНКМ демонстрирует мягкий тип нелинейности, то есть ее частота падает с ростом амплитуды. Энергия ДНКМ возрастает пропорционально квадрату амплитуды корневой моды. С ростом амплитуды корневой моды возрастает разница между напряжениями  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ . Это означает, что возбуждение трехкомпонентной ДНКМ наводит анизотропию упругих свойств в листе графена, который является упруго-изотропным в обычном состоянии. Аномалии в виде появления отрицательного давления при возбуждении трехкомпонентной ДНКМ не наблюдается, поскольку давление, определяемое как  $p = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$ , оказывается положительным при отрицательных значениях нормальных напряжений. Результаты свидетельствуют о том, что колебания с амплитудой  $A < 0.02 \text{Å}$  можно считать малыми, поскольку в этом диапазоне амплитуд влияние трехкомпонентной ДНКМ на свойства графена пренебрежимо малы, но становятся заметными при больших амплитудах.

Исследуем развитие модуляционной неустойчивости рассматриваемой ДНКМ. Данное явление изучалось многими авторами для ДНКМ в различных нелинейных решетках [26] и в кристаллах [27], и было показано, что если амплитуда моды не слишком мала, она разрушается и ее энергия передается хаотическим тепловым колебаниям. Данная задача будет решена численно путем введения малых случайных отклонений атомов от начальных положений, соответствующих ДНКМ. То есть к начальным координатам атомов  $(x_0, y_0, z_0)$  с помощью датчика случайных чисел добавлялись величины  $\varepsilon(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ , где  $\varepsilon = 10^{-9} \text{Å}$ , а  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  — случайные числа, равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 1]$ . В невозмущенной ДНКМ атомы движутся вдоль прямолинейных отрезков. В ходе эволюции системы вычислялись величины  $\Delta r$  и  $\Delta z$ , являющиеся максимальными по всем атомам отклонениями от данных траекторий в плоскости  $xu$  и по направлению  $z$  соответственно. Примеры зависимостей  $\Delta r(t)$  и  $\Delta z(t)$  даны на рис. 5 для амплитуды корневой моды  $A = 0.04 \text{Å}$  (а) и  $A = 0.06 \text{Å}$  (б). Обратим внимание на использование логарифмической шкалы для оси ординат.

Из рис. 5 видно, что развитие модуляционной неустойчивости происходит в два этапа. На первом этапе экспоненциально со временем растут как  $\Delta r(t)$ , так и  $\Delta z(t)$ . При этом  $\Delta r(t)$  всегда на один-два порядка меньше, чем  $\Delta z(t)$ . После того, как  $\Delta z(t)$  достигает своего максимального значения, начинается второй этап, на котором скорость роста  $\Delta r(t)$  заметно падает. Заканчивается второй этап переходом в состояние близкое к тепловому равновесию, когда  $\Delta r(t)$  также достигает максимального значения. На рис. 5 показаны отрезки прямых, имеющих такой же наклон, что и кривые  $\Delta r(t)$



**Рис. 5.** Развитие неустойчивости трехкомпонентной ДНКМ для амплитуды корневой моды (а)  $A = 0.04$  и (б)  $A = 0.06$  Å. Сплошные линии показывают максимальные отклонения атомов от начальных траекторий в плоскости  $xy$  ( $\Delta r$ ), а пунктирные — по нормали к листу графена ( $\Delta z$ ). Показаны отрезки прямых, имеющих такой же наклон, что и кривые  $\Delta r(t)$  на участке, когда  $\Delta z(t)$  достигает своего максимума.

на втором участке. Их можно аппроксимировать зависимостью  $\Delta r(t) \sim \exp(\alpha t)$ , где  $\alpha$  — показатель критической экспоненты. Известно, что  $\alpha$  уменьшается линейно с уменьшением амплитуды ДНКМ [26,27]. Для амплитуд  $A = 0.04$  Å и  $A = 0.06$  Å получены значения  $\alpha = 0.56$  и  $1.1$  соответственно. Экстраполяция на значение  $\alpha = 0$  позволяет найти максимальную амплитуду устойчивой ДНКМ, в нашем случае она равна  $A^* = 0.016$  Å.

Проведенный анализ модуляционной неустойчивости свидетельствует о слабой связи между продольными и поперечными колебаниями атомов в графене при не слишком больших амплитудах ДНКМ. Это следует, в частности, из того, что при максимально возможных амплитудах колебаний  $z$ -компоненты на втором этапе развития модуляционной неустойчивости, ДНКМ продолжает существовать в течении 7 и 3 ps для амплитуд  $A = 0.04$  Å и  $A = 0.06$  Å соответственно. Также можно сделать вывод и об обособленности исследуемой ДНКМ от других колебательных мод в плоскости листа графена. Действительно, при развитии модуляционной неустойчивости на первом этапе лидирует  $z$ -компонента, и она

„вытягивает“ за собой  $xy$ -компоненты. Это означает, что канал накачки  $xy$ -компонент рассматриваемой ДНКМ от хаотических малых колебаний слабее чем канал накачки  $z$ -компоненты.

#### 4. Заключение

Метод молекулярной динамики, базирующийся на хорошо апробированных межатомных потенциалах Савина [23], применен к анализу трехкомпонентной ДНКМ в графене. В полном соответствии с теоретическими предсказаниями, основанными на применении точечных групп симметрии [5], установлено, что при запуске в гексагональной решетке графена корневой колебательной моды, представленной на рис. 1, а, неизбежно возбуждаются две однокомпонентные ДНКМ, показанные на рис. 1, б, с, и не возбуждаются другие колебательные моды.

Показано, что амплитуды всех трех компонент рассматриваемой моды можно подобрать таким образом, что колебания становятся периодическими. В режиме периодических колебаний, в исследованном интервале амплитуд ( $A \leq 0.1$  Å), амплитуда корневой моды  $A$  на порядки превышает амплитуды однокомпонентных мод  $B$  и  $C$ , при этом, с ростом  $A$  наблюдается относительный рост амплитуд  $B$  и  $C$  (см. таблицу).

Изучены некоторые физические свойства трехкомпонентной ДНКМ в режиме периодического движения, в зависимости от амплитуды корневой моды  $A$ , см. рис. 4. Частота ДНКМ падает с ростом амплитуды, полная энергия на атом растет с амплитудой пропорционально  $A^2$ , возбуждение ДНКМ превращает упруго-изотропный графен в анизотропный (ортотропный) двумерный материал, поскольку для осредненных по периоду колебаний значений нормальных напряжений имеем  $\sigma_{xx} \neq \sigma_{yy}$ . Что касается частоты ДНКМ, на рис. 4 она определялась по динамике корневой моды (см. рис. 3, а), в то время как дополнительные однокомпонентные моды совершают ангармонические колебания с удвоенной частотой (см. рис. 3, б). Частота корневой моды близка к 32 THz, следовательно, удвоенная частота равна 64 THz, что значительно выше максимальной частоты малоамплитудных фононных колебаний графена, которая составляет 46 THz [24,25]. Таким образом, трехкомпонентная ДНКМ демонстрирует эффект генерации второй гармоники, когда в системе возникают собственные нелинейные колебания, не поддерживаемые в линейном режиме.

Подчеркнем еще раз, что исследованная здесь трехкомпонентная ДНКМ существует в любой гексагональной решетке, независимо от типа межатомных потенциалов, но конкретные физические свойства моды зависят от потенциалов.

Обсудим возможности экспериментальной верификации динамики многокомпонентных ДНКМ в гексагональных решетках. Можно опереться на факт существования ДНКМ в любых нелинейных решетках и

рассмотреть, например, макроскопическую модель взаимодействующих грузов или магнитов, собранных в гексагональную решетку. Модели такого типа используются в образовательных и демонстрационных целях, а также для экспериментального подтверждения теоретических выводов [28,29]. В этом случае возбуждение ДНКМ осуществляется заданием начальных отклонений частиц от положения равновесия подобно тому, как это делалось в настоящей работе для атомов углерода в решетке графена. Возбуждение трехкомпонентной ДНКМ в листе графена представляет собой намного более сложную техническую задачу. Наиболее вероятный путь связан со значительным прогрессом лазерных технологий. Например, в работе [30] обосновывается возможность возбуждения дискретных бризеров в кристаллах импульсными лазерами, работающими на частоте выше фононного спектра. Учитывая, что вторая гармоника трехкомпонентной ДНКМ лежит выше фононного спектра графена, возбуждение решетки на частоте второй гармоники может приводить к накачке ДНКМ. И хотя основная гармоника лежит в фононном спектре, учитывая обособленность ДНКМ от других мод в силу ее высокой симметрии (см. обсуждение результатов модуляционной неустойчивости ДНКМ), можно ожидать, что заметная часть подведенной энергии будет расходоваться на возбуждение трехкомпонентной ДНКМ.

Необходимо коснуться и того факта, что при учете нелинейности межатомных взаимодействий колебания в плоскости листа графена оказываются связанными с колебаниями перпендикулярно плоскости [31,32] и возникает вопрос о правомерности рассмотрения ДНКМ с колебаниями только в плоскости. Однако при не слишком больших амплитудах колебаний эта связь остается слабой, как это было показано при изучении модуляционной неустойчивости ДНКМ, и, кроме того, поперечные колебания могут подавляться наличием подложки.

Таким образом, полученные результаты расширяют наши представления, в частности, о нелинейной динамике гексагональной решетки графена и, в общем, о многокомпонентных ДНКМ в нелинейных решетках.

### Финансирование

Работа А.С. Семенова (выполнение расчетов, обсуждение результатов) выполнялась при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда 18-72-00006. Е.А. Корзникова благодарит Российский фонд фундаментальных исследований, грант 18-32-20158 мол\_а\_вед, за финансовую поддержку (обсуждение результатов, написание статьи). Работа частично поддержана государственным заданием ИПСМ РАН.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] G.M. Chechin, V.P. Sakhnenko. *Physica D* **117**, 1–4, 43 (1998).
- [2] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin. *Phys. Rev. E* **92**, 012907 (2015).
- [3] G.M. Chechin, S.A. Shcherbinin. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **22**, 244 (2015).
- [4] М.Н. Семёнова, А.С. Семёнов, Ю.В. Бебихов, Д.С. Рябов, Г.М. Чечин, Ж.Г. Рахматуллина, Е.А. Корзникова, С.В. Дмитриев. *Фундаментальные проблемы современного материаловедения* **15**, 2, 257 (2018).
- [5] G.M. Chechin, D.S. Ryabov, S.A. Shcherbinin. *Lett. Mater.* **6**, 1, 9 (2016).
- [6] S.V. Dmitriev, E.A. Korznikova, D.I. Bokij, K. Zhou. *Phys. Status Solidi B* **253**, 7, 1310 (2016).
- [7] E.A. Korznikova, S.A. Shcherbinin, D.S. Ryabov, G.M. Chechin, E.G. Ekomasov, E. Barani, K. Zhou, S.V. Dmitriev. *Phys. Status Solidi B* **256**, 1, 1800061 (2019).
- [8] S. Flach, C.R. Willis. *Phys. Rep.* **295**, 181 (1998).
- [9] S. Flach, A.V. Gorbach. *Phys. Rep.* **467**, 1 (2008).
- [10] S.V. Dmitriev, E.A. Korznikova, Y.A. Baimova, M.G. Velarde. *Physics-Uspekhi* **59**, 5, 446 (2016).
- [11] E.A. Korznikova, S.Y. Fomin, E.G. Soboleva, S.V. Dmitriev. *JETP Lett.* **103**, 4, 277 (2016).
- [12] E. Barani, I.P. Lobzenko, E.A. Korznikova, E.G. Soboleva, S.V. Dmitriev, K. Zhou, A. Moradi Marjaneh. *Eur. Phys. J. B* **90**, 3, 38 (2017).
- [13] O.V. Bachurina. *Comp. Mater. Sci.* **160**, 217 (2019).
- [14] M. Haas, V. Hizhnyakov, A. Shelkan, M. Klopov, A.J. Sievers. *Phys. Rev. B* **84**, 144303 (2011).
- [15] E.A. Korznikova, D.V. Bachurin, S.Y. Fomin, A.P. Chetverikov, S.V. Dmitriev. *Eur. Phys. J. B* **90**, 2, 23 (2017).
- [16] V.M. Burlakov, S.A. Kiselev, V.I. Rupasov. *JETP Lett.* **51**, 9, 544 (1990).
- [17] T. Cretegny, T. Dauxois, S. Ruffo, A. Torcini. *Physica D* **121**, 109 (1998).
- [18] L.Z. Khadeeva, S.V. Dmitriev. *Phys. Rev. B* **81**, 214306 (2010).
- [19] D.G. Papageorgiou, I.A. Kinloch, R.J. Young. *Prog. Mater. Sci.* **90**, 75 (2017).
- [20] X. Li, L. Tao, Z. Chen, H. Fang, X. Li, X. Wang, J.B. Xu, H. Zhu. *Appl. Phys. Rev.* **4**, 2, 021306 (2017).
- [21] R. Zhang, W. Chen. *Biosens. Bioelectron.* **89**, 249 (2017).
- [22] Y. Dong, Z.S. Wu, W. Ren, H.M. Cheng, X. Bao. *Sci. Bull.* **62**, 10, 724 (2017).
- [23] A.V. Savin, Y.S. Kivshar, B. Hu. *Phys. Rev. B* **82**, 195422 (2010).
- [24] J. Zimmermann, P. Pavone, G. Cuniberti. *Phys. Rev. B* **78**, 045410 (2008).
- [25] D.L. Nika, A.A. Balandin. *Rep. Progr. Phys.* **80**, 036502 (2017).
- [26] Y.S. Kivshar, M. Peyrard. *Phys. Rev. A* **46**, 3198 (1992).
- [27] L.Z. Khadeeva, S.V. Dmitriev. *Phys. Rev. B* **81**, 214306 (2010).
- [28] Y. Watanabe, T. Nishida, Y. Doi, N. Sugimoto. *Phys. Lett. A* **382**, 30, 1957 (2018).
- [29] F.M. Russell, Y. Zolotaryuk, J.C. Eilbeck, T. Dauxois. *Phys. Rev. B* **55**, 6304 (1997).
- [30] T. Rössler, J.B. Page. *Phys. Rev. B* **62**, 11460 (2000).
- [31] I.V. Gornyi, V.Yu. Kachorovskii, A.D. Mirlin. *Phys. Rev. B* **86**, 165413 (2012).
- [32] I.V. Gornyi, V.Yu. Kachorovskii, A.D. Mirlin. *Phys. Rev. B* **92**, 155428 (2015).

Редактор Т.Н. Василевская