

01

## Сравнение методов Радона-Никодима и многостадийной модели релаксации при анализе динамики флуоресценции ансамбля холодных атомов

© С.В. Божокин, А.С. Курапцев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: bsvjob@mail.ru, aleksej-kurapcev@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.05.2019 г.

В окончательной редакции 28.05.2019 г.

Принята к публикации 11.06.2019 г.

Вычислена флуоресценция холодных атомов, охлажденных до сверхнизких температур и возбуждаемых импульсным лазерным излучением. Флуоресценция холодных атомов рассчитана на основе решения нестационарного уравнения Шредингера для объединенной системы атомов и электромагнитного поля. В работе предложена универсальная функция, показывающая отклонение затухания флуоресценции по окончании импульса от одноэкспоненциальной модели. Для анализа динамики флуоресценции применен метод Радона-Никодима, основанный на изучении собственных чисел матрицы, построенной на основе сигнала флуоресценции. Показана корреляция между параметром асимметрии распределения собственных чисел матрицы сигнала и законом спада флуоресценции по времени. В качестве альтернативного метода анализа флуоресценции используется многостадийная модель релаксации, обусловленная коллективными многоатомными эффектами. Найдены значения характерных амплитуд и времен релаксации как на малых временах („сверхизлучение“), так и на больших временах („субизлучение“).

**Ключевые слова:** флуоресценция, холодные атомы, метод Радона-Никодима, многоэкспоненциальный распад.

DOI: 10.21883/OS.2019.11.48508.204-19

### Введение

Явление флуоресценции является одним из наиболее эффективных методов исследования физических процессов, возникающих в различных веществах под действием света [1,2]. В настоящее время большое количество исследований посвящено флуоресценции в атомных ансамблях холодных атомов, приготовленных в специальных ловушках. Такие атомные ансамбли, охлажденные до субдопплеровских температур, обладают целым рядом уникальных физических свойств и имеют широкое применение во многих задачах стандартизации частоты, квантовой метрологии и квантовой информации [3–20]. Динамика спада флуоресценции ансамбля холодных атомов имеет сложный характер. На малых временах наблюдается явление сверхизлучения, и скорость затухания превышает скорость спонтанного распада свободных атомов. На больших временах имеет место эффект субизлучения, и основной вклад в кинетику затухания флуоресценции дают долгоживущие коллективные состояния, возникающие в плотном ансамбле холодных атомов. Анализ сложной динамики затухания интенсивности вторичного излучения позволяет оценить времена жизни различных коллективных состояний.

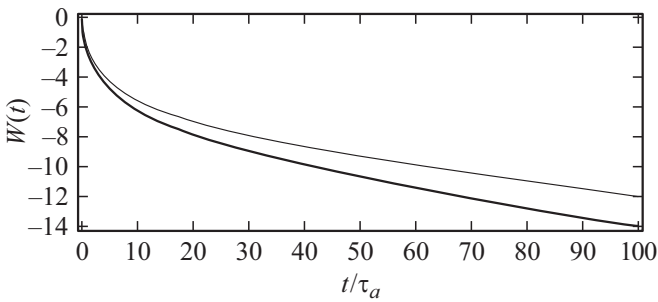
Обычно для описания динамики флуоресценции используют различные методы интерполяции функций [21,22]. В работах [23–25] для анализа деградации

литиевых аккумуляторов был применен спектральный метод Радона-Никодима, исследующий собственные числа матрицы сигнала.

Целью настоящей работы является вычисление количественных параметров, которые бы описывали сложную динамику спада сигнала флуоресценции в плотном ансамбле холодных атомов как для нулевого внешнего электрического поля, так и в сильном электрическом поле. Найдена универсальная функция, которая отличает сложные процессы релаксации от простых одноэкспоненциальных процессов. Продемонстрированы различные подходы к вычислению параметров этой функции (метод Радона-Никодима, многоэкспоненциальная модель). Найдены амплитуды и времена спада флуоресценции ансамбля холодных атомов как для случая суперизлучения, так и для случая субизлучения.

### Затухание интенсивности флуоресценции ансамбля холодных атомов

Свойства атомных облаков в ловушках рассчитываются с помощью модели неподвижных рассеивателей и допускают последовательное квантовое микроскопическое описание, основанное на решении нестационарного уравнения Шредингера [11,12,19–22]. Это уравнение



**Рис. 1.** Зависимость  $W(t) = \ln(I(t)/I_0)$  от безразмерного времени  $t/\tau_a$ . Тонкая линия соответствует нулевому электрическому полю  $E_0 = 0$ , толстая линия —  $E_0 \neq 0$ .

решается для объединенной системы, состоящей из атомов и электромагнитного поля. Такой подход позволяет в рамках единого формализма учесть взаимодействие атомов с внешним электромагнитным излучением, резонансное диполь-дипольное взаимодействие между атомами и спонтанный распад их возбужденных состояний.

Конкретные компьютерные расчеты были проведены для атомных облаков, имеющих сферически симметричное гауссово распределение атомов. В задаче было проведено усреднение по ансамблю случайных конфигураций атомов. Радиус облака  $R = 10 \lambda$ , а концентрация атомов  $n_0$  удовлетворяет соотношению  $n_0 \lambda^3 = 0.2$ , где  $\lambda = 1/k$  ( $k$  — волновое число падающего излучения). При такой концентрации ансамбль холодных атомов представляет собой единый большой кластер, в котором сильны коллективные эффекты. Возбуждающий импульс считался циркулярно поляризованным. Длительность возбуждающего импульса  $\tau_L$  выбрана много меньше времени жизни  $\tau_a$  возбужденных состояний,  $\tau_L/\tau_a = 0.1$ . Выбор величины  $\tau_L$  позволяет эффективно возбуждать такие коллективные состояния в достаточно широком спектральном диапазоне. Несущая частота возбуждающего импульса полагалась равной частоте атомного перехода изолированного атома. Временное поведение сигналов флуоресценции было вычислено для различных углов  $\theta = \{\pi/20; \pi/4; \pi/2; \pi\}$ , отсчитываемых от направления падающей волны. Для каждого угла была проанализирована флуоресценция как с сохраняющейся ( $H \parallel H$ ), так и с изменяющейся ( $H \perp H$ ) спиральностью. В работе будет рассмотрено временное поведение флуоресценции как в отсутствие внешнего электрического поля ( $E_0 = 0$ ), так и при приложении сильного внешнего поля ( $E_0 \neq 0$ ). Сильное поле означает, что вызванное электрическим полем расщепление уровней  $\Delta$  удовлетворяет соотношению  $\Delta \gg 1/\tau_a$ . Для всех рассматриваемых случаев получена сложная временная зависимость исследуемых сигналов флуоресценции после выключения возбуждающего импульса света.

Обозначим через  $I(t)$  убывающую со временем интенсивность флуоресценции, причем время  $t$  ограничено интервалом  $t = [0, T]$ , где  $T$  — время наблюдения.

Предположим, что период наблюдения  $T$  превосходит все характерные времена релаксации в системе  $\tau_i$ , т.е.  $T \gg \max\{\tau_i\}$ . В нулевой момент времени  $t = 0$  интенсивность имеет максимум,  $I(0) = I_{\max}$ , а на границе интервала наблюдения  $I(T) = I_{\min}$ , причем  $I_{\min} \ll I_{\max}$ . На рис. 1 в логарифмическом масштабе построена функция  $W(t) = \ln(I(t)/I_{\max})$  в зависимости от безразмерного времени  $t/\tau_a$ . Величина  $I$  представляет собой суммарную интенсивность  $I = I_{\perp} + I_{\parallel}$ , построенную для угла  $\theta = \pi/2$ . Для такого случая различие во временном поведении интенсивностей в случае внешнего электрического поля  $E_0 = 0$  (тонкая линия) и  $E_0 \neq 0$  (толстая линия) проявляется в наибольшей степени.

Интенсивность флуоресценции  $I(t)/I_{\max}$  ( $I_{\max}$  — интенсивность флуоресценции при  $t = 0$ ), изображенная на рис. 1, убывает со временем по многоэкспоненциальному закону. На малых временах  $t/\tau_a \leq 1$  скорость затухания превышает скорость спонтанного распада свободных атомов (сверхизлучение). На больших временах  $t/\tau_a \gg 1$  основной вклад дают долгоживущие коллективные состояния (субизлучение). Анализируя рис. 1, можно сделать вывод о том, что основной вклад в долговременную релаксацию флуоресценции вносят наиболее долгоживущие коллективные возбуждения, возникающие в плотных ансамблях холодных атомов. Причина такого коллективного поведения плотного ансамбля состоит в том, что при сближении атомов происходит формирование коллективных, квазимолекулярных состояний, обусловленных межатомным взаимодействием.

При таких больших плотностях,  $n_0 \lambda^3 = 0.2$ , кластер холодных атомов уже представляет собой единую квазимолекулу. Включение внешних электрических полей  $E_0$  делает систему анизотропной и в силу эффекта Штарка энергетически смещает часть атомных состояний. Кроме того, внешнее поле модифицирует коллективный лэмбовский сдвиг, обусловленный межатомным взаимодействием.

Нашей задачей является нахождение математической модели поведения  $I(t)$  с известными значениями  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  и  $T$ , а также разработка количественных характеристик такого релаксационного процесса. Для этой цели рассмотрим функцию  $z(t)$ , определенную следующим образом:

$$z(t) = \frac{\ln\left(\frac{I^2(t)}{I_{\max}I_{\min}}\right)}{\ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right)}. \quad (1)$$

Легко видеть, что для любого релаксационного процесса функция  $z(t)$  является монотонно убывающей функцией, причем  $-1 \leq z(t) \leq 1$ . В начальный момент времени  $z(0) = 1$ , на границе интервала измерения  $z(T) = -1$ . Для построения модели релаксационного процесса  $I(t)$  введем параметр релаксации  $\tau$ , имеющий размерность времени, а также введем безразмерную

функцию  $Y(t)$  согласно соотношению

$$I(t) = I_{\max} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\frac{T}{2\tau} Y(t)\right). \quad (2)$$

Различные релаксационные процессы будут характеризоваться индивидуальными функциями  $Y(t)$ , которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Из определения  $I(0) = I_{\max}$  (2) следует, что в начальный момент времени  $t = 0$  безразмерная функция  $Y(0) = 0$ . Параметр математической модели  $\tau$  выберем из условия равенства нулю функции  $Y(t)$  на границе интервала наблюдения,  $Y(T) = 0$ . Это условие определяет значение  $\tau$

$$\tau = \frac{T}{\ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right)}. \quad (3)$$

Таким образом, для релаксационного процесса  $I(t)$  необходимо определить параметр  $\tau$  с помощью соотношения (3), а также найти функцию  $Y(t)$ , удовлетворяющую условиям  $Y(0) = 0, Y(T) = 0$ . Удобно вместо аргумента времени  $t$  ( $t = [0, T]$ ) ввести в рассмотрение безразмерный аргумент времени  $x = \frac{2t}{T} - 1$ , изменяющийся в интервале  $x = [-1; 1]$ . Используя равенства (1)–(3), получаем связь между функцией  $z(x)$  и функцией  $Y(x)$ :

$$Y(x) = z(x) + x. \quad (4)$$

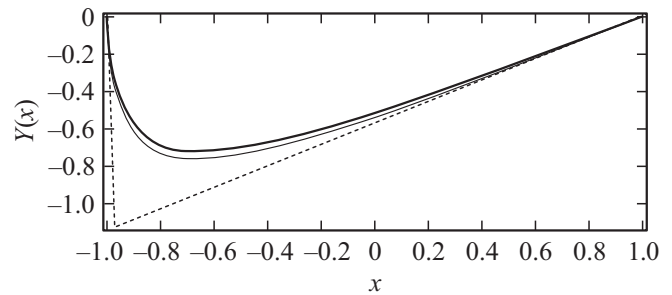
В начальный момент времени  $t = 0$  функции  $z(-1) = 1, Y(-1) = 0$ . На границе интервала наблюдения  $t = T: z(1) = -1, Y(1) = 0$ . Заметим, что для всех одноэкспоненциальных процессов  $I(t) = I_{\max} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  с различными значениями параметра  $\tau$  функция  $z(x) = -x$ . Следовательно, в этом случае функция  $Y(x)$  тождественно равна нулю ( $Y(x) = 0$ ) для всех значений аргумента безразмерного времени  $-1 \leq x \leq 1$ . Функция релаксации интенсивности флуоресценции  $W(x) = \ln(I(x)/I_{\max})$  связана с функцией  $Y(x)$  соотношением

$$W(x) = \frac{1}{2} \left[ Y(x) - x - 1 \right] \ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right). \quad (5)$$

На рис. 2 изображены функции  $Y(x)$ , характеризующие процессы затухания люминесценции без электрического поля ( $E_0 = 0$ ), с сильным электрическим полем ( $E_0 \neq 0$ ), а также линейные аппроксимации функции  $Y(x)$  на малых и больших временах для  $E_0 = 0$ . Параметры  $\tau$  для этих двух процессов приведены в табл. 1.

### Применение методов высшей алгебры для анализа поведения функции затухания флуоресценции

Применим методы Радона-Никодима, используемые в работах [23–27], для анализа функции затухания



**Рис. 2.** Тонкой линией обозначена функция  $Y(x)$  (4) без поля,  $E_0 = 0$ , толстой линией — функция  $Y(x)$  с внешним полем,  $E_0 \neq 0$ . Пунктирной линией обозначена аппроксимация прямыми линиями релаксационного процесса без поля,  $E_0 = 0$ , для случая малых ( $x \rightarrow -1$ ) и больших времен ( $x \rightarrow 1$ ).

**Таблица 1.** Параметры двухэкспоненциального приближения (3), (15)

Параметры	Нулевое электрическое поле $E_0 = 0$	Сильное электрическое поле $E_0 \neq 0$
$I_{\max}$	1.6654	1.6604
$I_{\min}$	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$
$\frac{T}{\tau_a}$	100	100
$\frac{\tau}{\tau_a}$	8.34	7.11
$ L $	39.20	35.55
$R$	0.57	0.57
$\frac{\tau_0}{\tau_a}$	0.207	0.195
$\frac{\tau_{\infty}}{\tau_a}$	19.40	16.53
$\frac{B_0}{B_{\infty}}$	926	3024

люминесценции холодных атомов  $z(x)$  (рис. 2). Рассмотрим систему ортогональных вещественных полиномов  $\{f_n(x)\}$ , для которых определено скалярное произведение  $\langle f_n(x) | f_m(x) \rangle$ :

$$\langle f_n(x) | f_m(x) \rangle = \int_{-1}^1 \rho(x) f_n(x) f_m(x) dx = \|f_n\|^2 \delta_{nm}. \quad (6)$$

Величина  $\|f_n(x)\|^2$  представляет собой квадрат нормы полиномов, а  $\rho$  — весовая функция. Такими полиномами, заданными на интервале  $[-1; 1]$  являются полиномы Лежандра, или полиномы Чебышева 1-го или 2-го рода.

Рассмотрим симметричную матрицу сигнала  $z(x)$  с матричными элементами  $A_{nm}$ , которая определяется сле-

дующим образом:

$$A_{nm}(z) = \frac{\int_{-1}^1 \rho(x) f_n(x) z(x) f_m(x) dx}{\|f_n\| \cdot \|f_m\|} \quad (7)$$

Найдем действительные собственные числа  $\lambda$  симметричной матрицы  $A_{nm}(z)$ , которые определяются из решения характеристического уравнения

$$\det|A_{nm}(z) - \lambda \delta_{nm}| = 0. \quad (8)$$

При вычислении матричных элементов симметричной матрицы  $A_{nm}(z)$  и ее собственных чисел  $\lambda$  индексы  $n$  и  $m$  изменялись в пределах  $n, m = 0, 1, 2, \dots, 100$ . Вычисления матричных элементов  $A_{nm}(z)$  были выполнены с использованием полиномов Чебышева 2-го рода. Результат вычислений показал, что распределение собственных чисел матрицы сигнала  $A_{nm}(z)$  является критерием различия релаксационных процессов  $z(x)$ . Проиллюстрируем этот вывод для простейшей модельной задачи, когда затухание флуоресценции описывается растянутой экспонентой (stretched exponential function) [28,29] с феноменологическим параметром  $R$ :

$$I(t) = I_0 \exp \left[ - \left( \frac{t}{\tau} \right)^R \right]. \quad (9)$$

Для такого поведения  $I(t)$  функция  $z(x)$  (1) имеет вид

$$z(x) = 1 - 2 \left( \frac{1+x}{2} \right)^R. \quad (10)$$

Для каждого значения параметра  $R$  в диапазоне  $R = [0.1; 1]$  в работе были найдены собственные числа  $\{\lambda_j\}$  матрицы  $A_{nm}(z)$  (6), где индекс  $j = 0, 1, \dots, n$ , а также вычислена гистограмма распределения собственных чисел  $\{H_j(\lambda)\}$ , удовлетворяющая условию нормировки  $\sum_{j=0}^n H_j = 1$ . Введем среднее

значение собственных чисел  $\langle \lambda \rangle = \sum_{j=0}^n \lambda_j H_j$ , выбороч-

ную дисперсию  $s^2 = \sum_{j=0}^n [\lambda_j - \langle \lambda \rangle]^2 H_j$ , а также момент

$\mu_3 = \sum_{j=0}^n [\lambda_j - \langle \lambda \rangle]^3 H_j$ . Для описания асимметрии гисто-

граммы распределения собственных чисел  $\lambda_j$  введем параметр  $Sk$  (Skewness), определяемый следующим образом:  $Sk = \mu_3 / s^3$ .

Вычисления показали, что для феноменологического параметра  $R = [0.1; 1]$  гистограмма распределения собственных чисел  $H$  матрицы сигнала  $z(x)$  (10) будет характеризоваться правосторонней асимметрией. Центр гистограммы смещен в область отрицательных собственных чисел,  $-1 < \langle \lambda \rangle < 0$ , причем параметр  $Sk > 0$  представляет собой монотонно падаю-

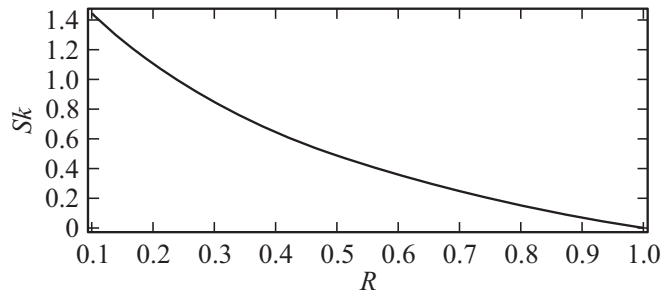


Рис. 3. Зависимости параметра асимметрии гистограммы распределения собственных чисел  $Sk$  матрицы  $A_{nm}(z)$  от параметра  $R$  для модельного сигнала (10).

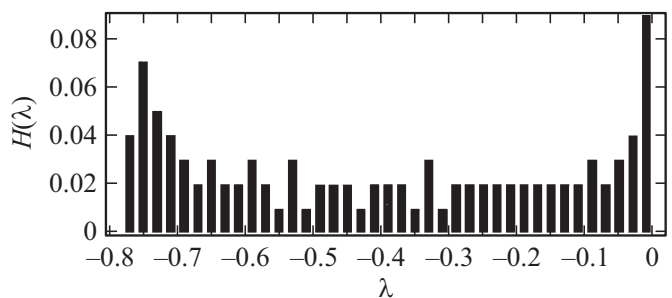


Рис. 4. Нормированная гистограмма распределения собственных чисел в нулевом поле.

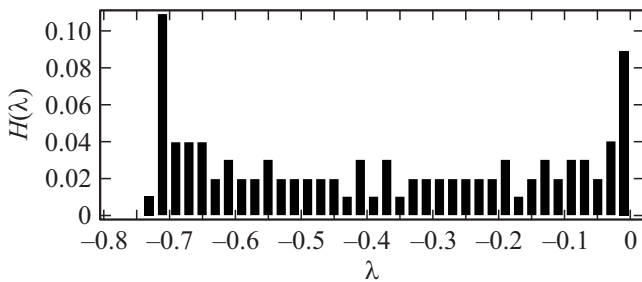
щую функцию  $Sk(R)$ . Заметим, что для простейшего случая  $R = 1$  ( $z(x) = -x$ , (10)) собственные числа матрицы  $A_{nm}(z)$  (7) могут быть найдены аналитически [23,24]. Гистограмма распределения собственных чисел  $-1 \leq \lambda_j \leq 1$  такого простейшего сигнала симметрична относительно точки  $\langle \lambda \rangle = 0$ , и параметр  $Sk(0) = 0$ . На рис. 3 для сигнала  $z(x)$  (10) представлена зависимость  $Sk(R)$ .

Таким образом, расчеты показали, что для модельного сигнала (10) существует высокая корреляция между параметром асимметрии гистограммы распределения собственных чисел  $Sk$  и показателем  $R$ , характеризующим релаксацию сигнала  $z(x)$  (10). Методы высшей алгебры были применены для анализа конкретных законов релаксации сигнала флуоресценции ансамбля холодных атомов при исследовании функции  $Y(x)$  (4) (рис. 2). Нормированные гистограммы распределения  $H(\lambda)$  собственных чисел  $\lambda$  двух релаксационных процессов представлены на рис. 4 и 5.

Различия между релаксационными кривыми  $Y(x)$  (рис. 2) проявляются в различных диапазонах собственных чисел  $\lambda$  соответствующих матриц (8),  $\lambda = [Y_{\min}; 0]$ . В нулевом электрическом поле  $Y_{\min} = -0.763$ . В сильном электрическом поле  $Y_{\min} = -0.720$ . Кроме этого, для этих двух случаев различаются гистограммы  $H(\lambda)$  распределения собственных чисел (рис. 4 и 5).

**Таблица 2.** Коэффициенты, используемые в четырехэкспоненциальной модели (11)

Электрическое поле	$B_1$	$\tau_1/\tau_a$	$B_2$	$\tau_2/\tau_a$	$B_3$	$\tau_3/\tau_a$	$B_4$	$\tau_4/\tau_a$
$E = 0$	1.56	0.58	0.098	2.68	0.0094	8.53	0.00178	19.40
$E \neq 0$	1.49	0.35	0.165	1.93	0.0062	7.86	0.00054	16.53



**Рис. 5.** Нормированная гистограмма распределения собственных чисел в сильном поле.

### Математическая модель динамики флуоресценции ансамбля холодных атомов

Представим математическую модель релаксации ансамбля холодных атомов  $I(t)$  в виде многоэкспоненциальной модели, причем каждый релаксационный процесс характеризуется своей амплитудой  $B_i$  и своим характерным временем  $\tau_i$ :

$$I(t) = \sum_{i=1}^N B_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right). \tag{11}$$

Рассмотрим вначале простейшую двухэкспоненциальную модель,  $N = 2$ , для которой будем предполагать, что на малых временах основной вклад в релаксацию вносит процесс, который характеризуется парой переменных  $\{B_0; \tau_0\}$ , а на больших временах —  $\{B_\infty; \tau_\infty\}$ . В этом случае  $I_{\max} = B_0 + B_\infty$ ;  $I_{\min} = B_0 \exp(-T/\tau_0) + B_\infty \exp(-T/\tau_\infty)$ , причем  $B_0 \gg B_\infty$ ,  $\tau_\infty \gg \tau_0$ . Предположим также, что при временах  $t$ , близких к времени завершения наблюдения  $t \rightarrow T$ , справедливо выполнение неравенства  $B_\infty \exp\left(-\frac{T}{\tau_\infty}\right) \gg B_0 \exp\left(-\frac{T}{\tau_0}\right)$ . Это неравенство эквивалентно условию  $\left(\frac{x_0}{2} \ll 1\right)$ , где величина  $x_0$  определяется выражением

$$x_0 = 2\tau_0\tau_\infty \ln(B_0/B_\infty) / (T(\tau_\infty - \tau_0)).$$

Можно показать, что асимптотическое поведение  $Y_0(x)$  функций  $Y(x)$  (4) при  $x \rightarrow -1$  и  $Y_\infty(x)$  при

$x \rightarrow 1$  имеет вид

$$Y_0(x) \approx (x + 1) \left[ 1 - \frac{1}{\frac{\tau_0}{T} \ln\left(\frac{B_0}{B_\infty}\right) + \frac{\tau_0}{\tau_\infty}} \right],$$

$$Y_\infty(x) \approx (x - 1) \frac{\frac{\tau_0}{T} \ln\left(\frac{B_0}{B_\infty}\right)}{\frac{\tau_0}{T} \ln\left(\frac{B_0}{B_\infty}\right) + \frac{\tau_0}{\tau_\infty}}. \tag{12}$$

Физический смысл величины  $x_0$  состоит в том, что в момент времени  $x^* = -1 + x_0$  происходит пересечение асимптотических прямых  $Y_0(x)$  и  $Y_\infty(x)$ . Анализируя функцию  $Y(x)$  (рис. 2) можно вычислить производные

$$\frac{dY(x = -1)}{dx} = -|L|; \quad \frac{dY(x = 1)}{dx} = R. \tag{13}$$

Сравнивая значения производных с выражениями (11), получаем значения параметров релаксационного процесса:

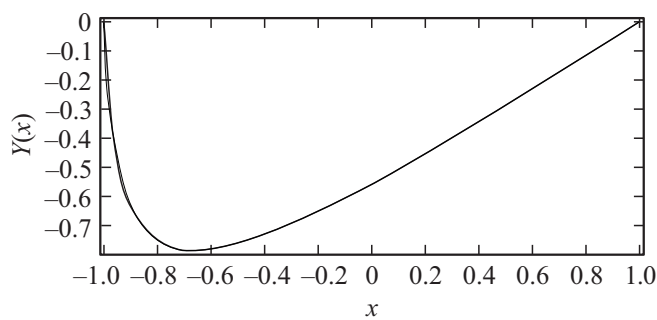
$$\frac{\tau_0}{\tau_\infty} = \frac{1 - R}{|L| + 1}, \quad \frac{\tau_0}{T} \ln\left(\frac{B_0}{B_\infty}\right) = \frac{R}{|L| + 1}. \tag{14}$$

Условие применимости двухэкспоненциального приближения  $x_0/2 \ll 1$  эквивалентно условию  $|L| \gg 1$ . Подставляя асимптотики  $Y(x)$  (11) в формулу (4), можно выразить все параметры релаксационных процессов  $\{\tau_0; \tau_\infty; B_0; B_\infty\}$  через экспериментально наблюдаемые величины  $\{T, I_{\max}, I_{\min}\}$ , а также через вычисленные значения производных функции  $Y(x)$ , равных  $\{L, R\}$  (13):

$$\tau_0 = \frac{T}{(|L| + 1) \ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right)}, \quad \tau_\infty = \frac{T}{(1 - R) \ln\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right)},$$

$$\frac{B_0}{B_\infty} = \left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}}\right)^R. \tag{15}$$

Значения параметров приведены в табл. 1 как для случая нулевого ( $E_0 = 0$ ), так и для случая сильного электрического поля ( $E_0 \neq 0$ ). На рис. 2 штриховой линией для  $E_0 = 0$  изображены две линейные зависимости (12), описывающие асимптотику спада флуоресценции для малых времен ( $x \rightarrow -1$ ,  $|L| = 39.20$ ,  $R = 0.57$ ) и больших времен ( $x \rightarrow 1$ ,  $|L| = 35.55$ ,  $R = 0.57$ ). Для  $E_0 \neq 0$  линейная асимптотика на малых временах имеет другой наклон ( $x \rightarrow -1$ ,  $|L| = 35.55$ ,  $R = 0.57$ ).



**Рис. 6.** Тонкая линия — теоретическая кривая  $Y(x)$ , толстая линия — модель (11).

Более точная аппроксимация кривой релаксации флуоресценции  $Y(x)$  холодных атомов была получена с использованием метода Ньютона решения системы нелинейных уравнений, описывающих среднее квадратичное отклонение между теоретическими расчетами и предлагаемой моделью (11). Для аппроксимации использовалась четырехэкспоненциальная модель (11) ( $N = 4$ ). Вычисленные коэффициенты  $\{B_i; \tau_i\}$  приведены в табл. 2 как для нулевого внешнего электрического поля  $E_0 = 0$ , так и для случая  $E_0 \geq 0$ . При нахождении параметров  $\{B_i; \tau_i\}$  учитывались равенства, которые подразумевают известные из эксперимента значения  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$ :  $I_{\max} = \sum_{i=1}^N B_i$ ,  $I_{\min} = \sum_{i=1}^N B_i \exp(-T/\tau_i)$  (1). Значения наибольших времен  $\tau_4 = \tau_{\infty}$ , вносящих вклад в процесс релаксации на временах  $t \rightarrow T$ , также считались известными (табл. 1). Эти значения времен были получены из простейшей двухэкспоненциальной модели (табл. 1) ( $\tau_4/\tau_a = 19.4$  для  $E_0 = 0$ ,  $\tau_4/\tau_a = 16.53$  для  $E_0 \neq 0$ ).

На рис. 6 для случая  $E_0 = 0$  приведен график аппроксимации теоретической кривой  $Y(x)$  (тонкая линия) и четырехэкспоненциальной моделью (11) (толстая линия). Среднее квадратичное отклонение  $\sigma$  между этими кривыми составляет величину  $\sigma = 0.01$ . Теоретическая и расчетная кривые практически сливаются. Это свидетельствует о том, что четырехэкспоненциальная кривая с параметрами, приведенными в табл. 2, хорошо описывает релаксацию флуоресценции холодных атомов. Аналогичный график аппроксимации получен и в случае  $E \geq 0$  (табл. 2), в этом случае  $\sigma = 0.007$ .

## Заключение

Работа посвящена анализу теоретических параметров, позволяющих описать кинетику флуоресценции ансамбля холодных атомов после выключения импульсного излучения. В работе предложена универсальная функция, показывающая отклонение затухания флуоресценции от одноэкспоненциальной модели. Применение метода Радона–Никодима для феноменологической модели релаксации показало высокую корреляцию между параметром асимметрии гистограммы распределения

собственных чисел матрицы сигнала и параметром, описывающим поведение этого процесса во времени. Выявлены отличия кинетики флуоресценции как при отсутствии внешнего электрического поля ( $E_0 = 0$ ), так и в сильном электрическом поле ( $E_0 \neq 0$ ). Рассмотрена многоэкспоненциальная модель релаксации и показано, что включение внешнего электрического поля приводит к изменению релаксационных процессов флуоресценции холодных атомов. Найдены значения характерных амплитуд и времен релаксации как на малых временах (сверхизлучение), так и на больших временах (субизлучение). На начальной стадии релаксации время релаксации сверхизлучения при включении электрического поля  $\tau_1(E)$  оказывается меньше аналогичного времени без электрического поля,  $\tau_1(E) < \tau_1(0)$ . Для сверхизлучения многостадийные процессы, описываемые многоэкспоненциальной моделью, отражают механизмы релаксации флуоресценции единого кластера холодных атомов на разных интервалах времени.

Разработанная методика анализа динамики затухания интенсивности флуоресценции при возбуждении импульсным излучением дает возможность экспериментального контроля параметров ансамбля холодных атомов, а также ансамблей примесных центров, внедренных в прозрачный диэлектрик. Предложенный анализ динамики флуоресценции позволит обнаружить различные коллективные эффекты, обусловленные обменом фотонами между атомами в плотных атомных ансамблях [28–29]. Этот метод позволяет определить времена жизни различных коллективных состояний, определяющих спада флуоресценции на разных интервалах времени после окончания возбуждения.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 17-12-01085).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Lakowicz J.R. Principles of Fluorescence Spectroscopy. Third Edition. N. Y.: Springer, 2006. 954 p.
- [2] Jameson D.M. Introduction to Fluorescence. CRC Press, 2014. 213 p.
- [3] Hau L.V. // Nature Photonics. 2008. V. 2. P. 451.
- [4] Соколов И.М., Курприянов Д.А., Хэви М. // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. С. 288; Sokolov I.M., Kupriyanov D.A., Havey M. // JETP. 2011. V. 112. P. 246.
- [5] Sokolov I.M., Kuraptshev A.S., Kupriyanov D.V., Havey M., Balik S. // J. Mod. Opt. 2013. V. 60. P. 50.
- [6] Labeyrie G., Vaujour E., Muller C. et al. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 223904.
- [7] Fioretti A., Molisch A., Muller J. // Opt. Commun. 1998. V. 149. P. 415.

- [8] *Pellegrino J., Bourgain R. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2014. V. 113. P. 133602.
- [9] *Skipetrov S.E., Sokolov I.M., Havey M.D.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 013825.
- [10] *Kuraptsev A.S., Sokolov I.M.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 022511.
- [11] *Божокин С.В., Соколов И.М.* // Опт. и спектр. 2017. Т. 123. № 6. С. 25; *Bozhokin S.V., Sokolov I.M.* // Opt. Spectrosc. 2017. V. 123. N 6. P. 858.
- [12] *Божокин С.В., Соколов И.М.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 9. С. 304; *Bozhokin S.V., Sokolov I.M.* // Opt. Spectrosc. 2018. V. 125. N 3. P. 317.
- [13] *Sokolov I.M.* // Phys Rev. A. 2018. V. 98. P. 013412.
- [14] *Araujo M.O., Kresic I., Kaiser R., Guerin W.* // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. P. 073002.
- [15] *Guerin W., Araujo M.O., Kaiser R.* // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 116. P. 083601.
- [16] *Gero A., Akkermans E.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 093601.
- [17] *Bouwmeester D., Ekert A., Zeilinger A.* The Physics of Quantum Information. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.
- [18] *Bloom B.J., Nicholson T.L., Williams J.R. et al.* // Nature. 2014. V. 506. P. 71.
- [19] *Соколов И.М.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 152. № 4 (10). С. 650; *Sokolov I.M.* // JETP. 2017. V. 125 (3). P. 384.
- [20] *Соколов И.М.* // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 106. № 5. С. 317; *Sokolov I.M.* // JETP Lett. 2017. V. 106. P. 341.
- [21] *Kuraptsev A.S., Sokolov I.M.* // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. P. 053822.
- [22] *Kuraptsev A.S., Sokolov I.M., Havey M.D.* // Phys. Rev. A. 2017. V. 96. P. 023830.
- [23] *Totik V.* Orthogonal Polynomials. Survey in Approximation Theory. 2005. N 1. P. 70.
- [24] *Nevay P.G., Freud G.* Orthogonal Polynomials. Christoffel Functions. A Case Study. // J. Approximation Theory. 1986. V. 48 (1). P. 3.
- [25] *Bobyl A., Zabrodskii A., Kompan M., Malyshkin V., Novikova O., Terukov E., Agafonov D.* (2018). Generalized Radon–Nikodym Spectral Approach. Application to Relaxation Dynamics Study. Application to Relaxation Dynamics Study. July 18, 2018. arxiv:1611.07386.
- [26] *Malyshkin V.* On Lebesgue Integral Quadrature. arxiv:1807.06007.
- [27] *Бобыль А.В., Забродский А.Г., Мальшикин В.Г., Новикова О.В., Теруков Е.И., Агафонов Д.В.* // Изв. РАН. Энергетика. 2018. № 1. С. 46.
- [28] *Berberan-Santos M.N., Bodunov E.N., Valeur B.* // Chem. Phys. 2005. V. 315. P. 171.
- [29] *Bodunov E.N., Antonov Yu.A., Simoões Gamboa A.L.* // J. Chem. Phys. 2017. V. 146. P. 114102.