

Эйлерова неустойчивость двунаправленного эффекта памяти формы в ленте из никелида титана

© Г.А. Малыгин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: malygin.ga@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 20 мая 2003 г.)

В рамках теории размытых мартенситных переходов обсуждается механизм возникновения эйлеровой неустойчивости двунаправленного эффекта памяти формы в ленте из никелида титана. Неустойчивость формы ленты и ее пластическое прощелкивание в интервале температур прямого и обратного мартенситных переходов обусловлены дополнительным изгибающим моментом из-за стеснения движения концов ленты при шарнирном их закреплении.

Двунаправленный эффект памяти формы (ЭПФ) возникает в тонких лентах-полосках [1,2] и пластинках [3] из никелида титана (TiNi) с повышенным содержанием атомов никеля по сравнению с их эквиатомной концентрацией, если ленту или пластинку предварительно подвергнуть специальной термомеханической обработке, а именно отжигу в изогнутом состоянии при температурах 600–800 К. В результате такой операции в сжатом и растянутом слоях ленты или пластинки возникают по-разному ориентированные когерентные выделения интерметаллида Ti_3Ni_4 [4–6], что приводит к упругому изгибу пластинки после снятия изгибающего усилия. Релаксация связанных с выделениями микронапряжений в интервале температур двухступенчатого фазового превращения $B2 \rightarrow R \rightarrow B19'$ сопровождается, как показывает опыт, изменением направления изгиба ленты (пластинки) на противоположное исходному. При обратном мартенситном превращении первоначальное направление изгиба ленты восстанавливается. Так проявляется двунаправленный ЭПФ.

В работе [7] рассчитано распределение напряжений, индуцированных отдельным дискообразным выделением Ti_3Ni_4 в матрице, и определена величина средних напряжений в сжатом слое ленты (пластинки) в зависимости от объемной концентрации частиц Ni_3Ti_4 в сплаве. Полученные результаты использованы в [8] для анализа механизма двунаправленного ЭПФ в тонкой ленте-полоске из никелида титана на основе теории размытых мартенситных переходов (РМП) [9,10]. При расчетах предполагалось, что концы ленты свободны, т. е. к ней не приложены внешние силы и изгибающие моменты. В настоящей работе проанализирован случай закрепления концов ленты с помощью подвижных шарниров, ограничивающих ее выпрямление при ЭПФ и создающих в ленте дополнительный изгибающий момент. Этот момент аналогичен возникающему в стержне при приложении к нему сжимающей силы, приводящей при определенных критических условиях к эйлеровой неустойчивости упругой деформации стержня, а в случае закрепленных тонких биметаллических лент и пластинок — к их упругому прощелкиванию [11,12]. Опыты [2,3] с двунаправленным ЭПФ показали, что эффект прощелкивания

имеет место в условиях ограничения движения концов арки-полоски из никелида титана при ее нагреве в интервале температур двухступенчатого мартенситного перехода $B19' \rightarrow R \rightarrow B2$ и образования соответственно M - и R -модификаций мартенсита. Очевидно, что это явление имеет важное прикладное значение, поскольку расширяет функциональные возможности материалов с памятью формы, резко сужая температурный интервал срабатывания исполнительных и сенсорных устройств.

В настоящей работе на основе полученных в [8] результатов проанализированы условия возникновения эйлеровой неустойчивости двунаправленного ЭПФ в тонкой арке-полоске из никелида титана. В разделе 1 рассмотрены дополнительные напряжения в полоске из-за ограничения (стеснения) свободного движения ее концов при ЭПФ. В разделе 2 проанализировано изменение радиуса кривизны и прогиба ленты вследствие связанного с этим стеснением дополнительного изгибающего момента. В разделе 3 обсуждаются условия возникновения в ней явления прощелкивания и эйлеровой неустойчивости ЭПФ.

1. Изгибные напряжения в ленте

Как и в [8], рассмотрим ленту из никелида титана с размерами $2h \ll b \ll 2l$, где $2h$ — толщина, b — ширина, $2l$ — длина ленты. Радиус изгиба ленты при отжиге $R_0 > 2l$. Поместим ленту-полоску в подвижный шарнирный захват, ограничивающий ее продольное движение (выпрямление) при двунаправленном ЭПФ. В результате ограничения движения концов лента приобретает дополнительную кривизну [11,12]

$$R_G^{-1}(x, T) = -\frac{M(x, T)}{EJ},$$

$$M(x, T) = W_0(x, T)P(T), \quad (1)$$

где $M(x, T)$ — изгибающий момент, $W_0(x, T)$ — прогиб ленты при свободном, нестесненном ЭПФ [8], $P(T) = EA\varepsilon(T)$ — продольная сжимающая сила, прило-

женная к ленте на ее концах, $\varepsilon(T) = (l_0 - L_0(T))/l$ — деформация сжатия ленты вследствие ограничения ее движения, $2L_0(T)$ — текущее расстояние между концами ленты [8], $2l_0$ — свободное расстояние между шарнирными опорами ($2l_0 < 2l$), $A = 2hb$ — площадь сечения ленты, $J = b(2h)^3/12$ — момент инерции ее сечения, E — модуль упругости, T — температура, x — координата вдоль хорды, стягивающей концы ленты. При точном решении задачи эйлеровой неустойчивости двунаправленного ЭПФ прогиб ленты $W(x, T)$ является не заданной, а искомой величиной и может быть численно найден, например методом последовательных приближений (итераций). Свободный прогиб ленты $W_0(x, T)$ служит при этом в качестве нулевого приближения. Далее ограничимся только первым приближением.

С моментом $M(x, T)$ связаны дополнительные упругие напряжения в ленте и вызванная ими пластическая (мартенситная) деформация. Подставляя $M(x, T)$ в условие равновесия изгибающих моментов, приложенных к ленте-полоске, находим аналогично [8] распределение напряжений в ленте по ее длине и толщине (в направлении оси y)

$$\sigma(x, y, T) = \sigma'_0(x, y) - \sigma_p(x, y, T), \quad (2a)$$

$$\sigma'_0(x, y, T) = \frac{1}{2} E |\varepsilon_0| \left(\frac{3y}{2h} \pm 1 \right) - \frac{3}{2} \frac{M(x, T)}{bh^2} \frac{y}{h}, \quad (2b)$$

$$\sigma_p(x, y, T) = E \left(\varepsilon_p(x, y, T) + \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_p(x, T) - \frac{3}{2} \tilde{\tilde{\varepsilon}}(x, T) \frac{y}{h} \right). \quad (2c)$$

Здесь $\sigma'_0(x, y, T)$ — упругие напряжения в ленте вследствие ее изгиба под действием момента $M(x, T)$ и внутренних напряжений из-за анизотропного распределения частиц Ti_3Ni_4 в ленте [8] (ε_0 — связанная с частицами упругая деформация ленты), $\sigma_p(x, y, T)$ — величина мартенситной релаксации напряжений в результате образования R - и M -вариантов мартенсита. Величина усредненных по толщине ленты деформаций

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_p(x, T) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varepsilon_p(x, y, T) dy, \\ \tilde{\tilde{\varepsilon}}(x, T) &= \frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \varepsilon_p(x, y, T) y dy \end{aligned} \quad (3)$$

зависит от распределения мартенситной деформации в ленте следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(x, y, T) &= [\varepsilon_R \varphi_R(\sigma'_0(x, y, T), T) \\ &+ \varepsilon_M \varphi_M(\sigma'_0(x, y, T), T)] \text{sign} [\sigma'_0(x, y, T)], \end{aligned} \quad (4)$$

где φ_R и φ_M — объемные доли соответственно R - и M -мартенсита, $\varepsilon_R = n_R m_R f \xi_R$, $\varepsilon_M = n_M m_M f \xi_M$, ξ_R и ξ_M — сдвиговые деформации решетки при ее перестройке соответственно в R - и M -модификации, f — объемная концентрация частиц Ti_3Ni_4 в ленте, m_R и m_M — ориентационные факторы, n_R и n_M — число вариантов мартенсита, имеющих одинаковые ориентационные факторы.

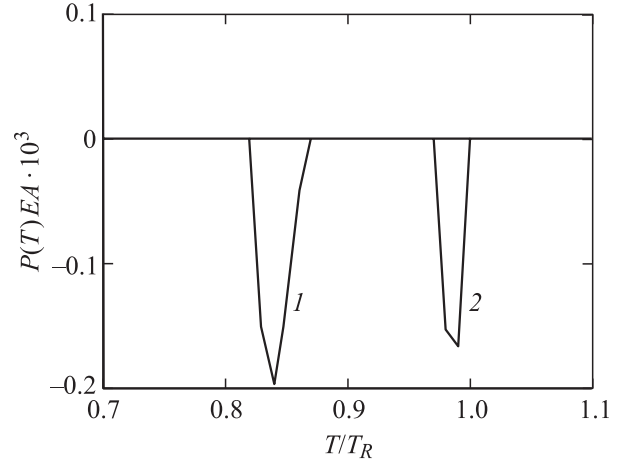


Рис. 1. Температурная зависимость сжимающих усилий в ленте из никелида титана при стесненном ЭПФ в процессе понижения (1) и повышения (2) температуры.

При наличии двух видов мартенсита их объемные доли φ_R и φ_M при температуре T и напряжении $\sigma'_0(x, y, T)$, согласно теории РМП, соответственно равны [8]

$$\varphi_R = \frac{\exp(-\Delta U_R/kT)}{1 + \exp(-\Delta U_R/kT) + \exp(-\Delta U_M/kT)}, \quad (5a)$$

$$\varphi_M = \frac{\exp(-\Delta U_M/kT)}{1 + \exp(-\Delta U_R/kT) + \exp(-\Delta U_M/kT)}, \quad (5b)$$

$$\frac{\Delta U_R}{kT} = B_R (t - 1 - m_R a_R |S'_0(\bar{x}, \bar{y}, t)| \pm \tau_{fR}/\tau_R), \quad (5c)$$

$$\frac{\Delta U_M}{kT} = B_M (ct - 1 - m_M a_M |S_0(\bar{y})| \pm \tau_{fM}/\tau_M), \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma'_0(x, y, T)}{E |\varepsilon_0|} &= S'_0(\bar{x}, \bar{y}, t) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \bar{y} \pm 1 \right) + 3 \frac{W_0(\bar{x}, t)}{h} \frac{|\varepsilon(t)|}{|\varepsilon_0|} \bar{y}, \end{aligned} \quad (5e)$$

где $t = T/T_R$, $\bar{y} = y/h$, $\bar{x} = x/L_0$, $c = T_R/T_M$, $a_R = \xi_R |\varepsilon_0| (E/q_R)$, $a_M = \xi_M |\varepsilon_0| (E/q_M)$, $\tau_R = q_R/\xi_R$, $\tau_M = q_M/\xi_M$. Здесь параметры B_R и B_M определяют величину размытия соответствующих переходов по температуре, τ_{fR} и τ_{fM} — гистерезис превращений, T_R и T_M — их температурный диапазон, q_R и q_M — теплоту превращений.

На рис. 1 показана температурная зависимость силы сжатия ленты $P(T)$ в результате ограничения движения ее концов при двунаправленном ЭПФ

$$\begin{aligned} \frac{P(T)}{EA} &= \varepsilon(T) = \frac{l_0 - L_0(T)}{l}, \\ L_0(T) &= R_0(T) \sin \frac{l}{R_0(T)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $R_0(T)$ — текущий радиус кривизны ленты при ЭПФ в свободных условиях [8]. При расчете использовались

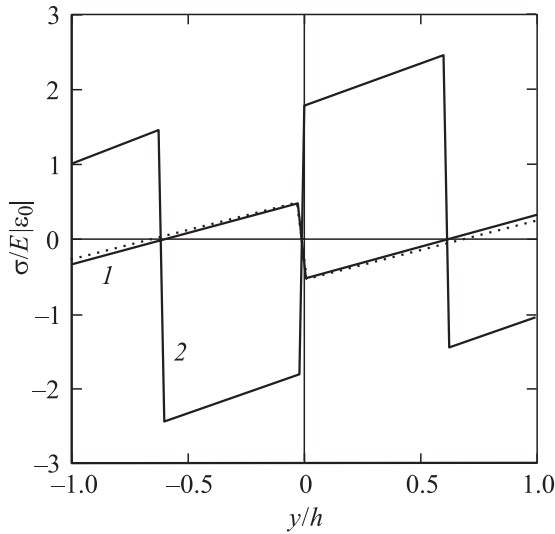


Рис. 2. Распределение упругих напряжений по толщине ленты при нестесненном (пунктир) и стесненном (1) ЭПФ и после мартенситной релаксации напряжений (2).

те же значения параметров ленты и мартенситных переходов, что и в [8]. Максимальная деформация упругого сжатия ленты при полном ее выпрямлении определяется формулой $\epsilon_m = (l_0 - l)/l = -2 \cdot 10^{-4}$. Видно, что при указанной величине деформации ϵ_m сжимающие усилия отличны от нуля в довольно узких температурных интервалах как при прямом, так и обратном мартенситных переходах. Вне этих интервалов концы ленты перемещаются свободно.

Рис. 2 демонстрирует распределение согласно (5е) упругих напряжений по толщине ленты в средней ее части ($x = 0$) при $T = 0.84T_R$ в процессе снижения температуры в отсутствие (пунктир) и при наличии (кривая 1) ограничения движения концов ленты. Фигурирующий в (5е) прогиб ленты при нестесненном ЭПФ равен [8]

$$W_0(x, T) = R_0(T) \left[\sqrt{1 - (x/R_0(T))^2} - \sqrt{1 - (L_0(T)/R_0(T))^2} \right]. \quad (7)$$

Видно, что в результате ограничения движения концов ленты ее нижний слой испытывает упругое сжатие, которое сменяется растяжением (кривая 2) в результате мартенситной релаксации упругих напряжений. Кривая 2 на рис. 2 показывает распределение напряжений согласно выражению (2а), учитывающему это обстоятельство, а также то, что в (2с) деформация $\tilde{\epsilon}_p(x, T) = 0$.

2. Стесненный эффект памяти формы

С учетом внутреннего (из-за анизотропного распределения частиц Ti_3Ni_4) и внешнего (из-за стеснения концов ленты) изгибающих моментов полная кривизна ленты

равна

$$R^{-1}(x, T) = R_0^{-1} + R_e^{-1} + R_p^{-1}(x, T) + R_G^{-1}(x, T), \quad (8a)$$

где R_0^{-1} — кривизна ленты, задаваемая при отжиге, $R_e^{-1} = -(3/4h)|\epsilon_0|$ и $R_p^{-1} = -(3/2h)\tilde{\epsilon}_p(x, T)$ — изменение кривизны в результате соответственно упругой [8] и мартенситной (см. (2)–(5)) релаксации напряжений в ленте, $R_G^{-1}(x, T)$ — упругий вклад в кривизну вследствие стеснения движения концов ленты. Для количественного расчета кривизну (8а) удобнее записать в развернутом виде и в приведенной форме

$$\frac{R_0}{R(x, T)} = 1 - \frac{3R_0}{2h} \left(\frac{1}{2}|\epsilon_0| + \tilde{\epsilon}_p(x, T) \right) + 3 \left(\frac{R_0}{h} \right)^2 \frac{W_0(x, T)}{R_0} |\epsilon(T)|. \quad (8b)$$

На рис. 3, а и б показаны температурные зависимости приведенной кривизны в средней части ленты ($x = 0$)

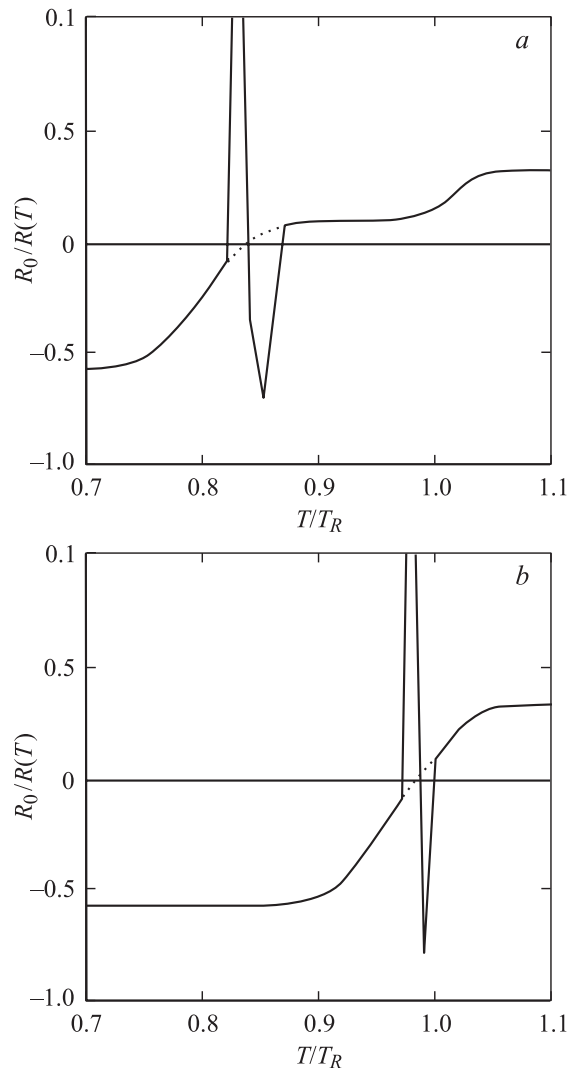


Рис. 3. Температурные зависимости приведенной кривизны ленты (8b) в условиях стесненного ЭПФ при понижении (а) и повышении (б) температуры.

соответственно при снижении и повышении температуры ($R_0/h = 3 \cdot 10^2$, $l/R_0 = 0.5$, остальные параметры см. [8]). Пунктирные кривые демонстрируют температурную зависимость кривизны в отсутствие стеснения движения концов ленты [8]. Видно, что в узких температурных интервалах, где кривизна ленты в условиях свободного ЭПФ близка к нулю, кривизна стесненной ленты вследствие сжимающего усилия на ее концах резко меняет знак и величину. Очевидно, что в указанных температурных интервалах деформация ленты испытывает эйлерову неустойчивость. После прохождения этих интервалов кривизна ленты принимает значения, характерные для ЭПФ в ленте со свободными концами.

Для того чтобы проследить за формой ленты в процессе ее неустойчивой деформации, воспользуемся известным уравнением, связывающим радиус кривизны ленты с производными по координате от ее прогиба $W(x, T)$,

$$R^{-1}(x, T) = -\frac{W''}{(1 + W'^2)^{3/2}}, \quad (9)$$

где $W' = dW/dx$, $W'' = dW'/dx$. Знак минус в формуле (9) означает, что положительной считается кривизна выпуклой ленты. Угол поворота сечений ленты $\Omega(x, T) = W'(x, T)$, поэтому, предполагая выполнение гипотезы плоских сечений в процессе неустойчивой деформации ленты, получаем после однократного интегрирования (9)

$$\frac{\Omega}{(1 + \Omega^2)^{1/2}} = \omega(x, T),$$

$$\omega(x, T) = \omega_1(T) - \int_{-L_0(T)}^x \frac{dx}{R(x, T)},$$

$$\omega_1(T) = \int_{-L_0(T)}^0 \frac{dx}{R(x, T)}, \quad (10)$$

где $\omega_1(T)$ — постоянная интегрирования, определяемая из условия $\Omega(x, T) = 0$, когда $x = 0$; $2L_0(T)$ — расстояние между концами ленты. Из первого соотношения (10) видно, что при малых углах поворота сечений ($\Omega \ll 1$) $\Omega(x, T) \approx \omega(x, T)$.

Согласно (10), в общем случае $\Omega = \omega/\sqrt{1 - \omega^2}$; следовательно, прогиб ленты в зависимости от координаты x и температуры T определяется интегралом

$$W(x, T) = \int_{-L_0(T)}^x \frac{\omega(x, T) dx}{\sqrt{1 - \omega^2(x, T)}}. \quad (11)$$

Из (11) при $\omega(x, T) = x/R_0(T)$, т.е. в условиях отсутствия стеснения ЭПФ, следует, в частности, формула (7). Рис. 4 демонстрирует изменение согласно (11) прогиба ленты в процессе ее нагрева в свободных (кривые 1 и 2) и стесненных (кривые 3 и 4) условиях при температурах

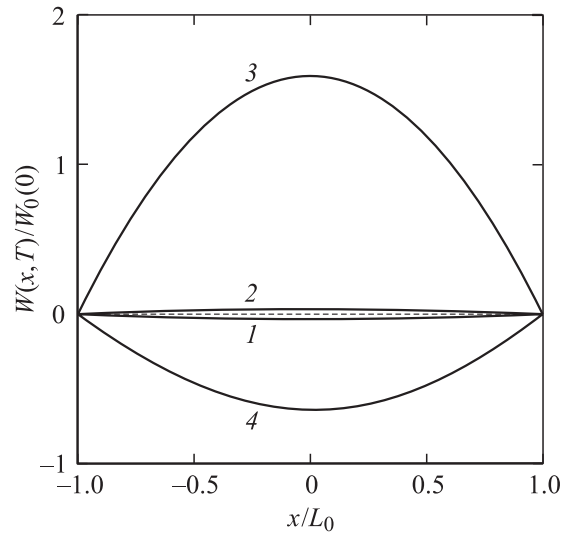


Рис. 4. Изменение формы ленты в процессе повышения температуры в свободных (1, 2) и стесненных (3, 4) условиях при температурах $0.98T_R$ (1, 3) и $0.99T_R$ (2, 4).

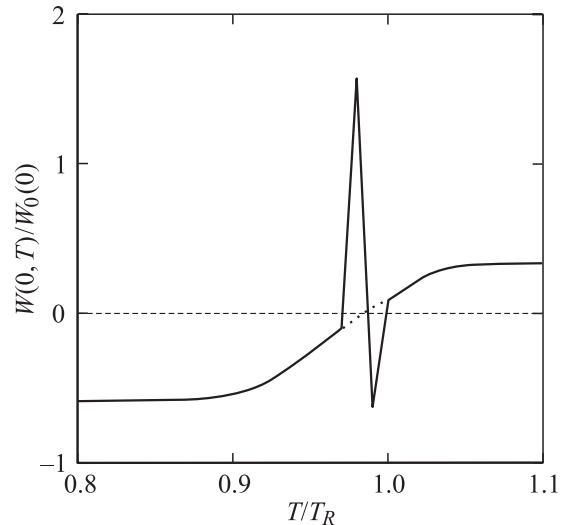


Рис. 5. Температурная эволюция максимального прогиба ленты в стесненных условиях при повышении температуры.

$0.98T_R$ (кривые 1 и 3) и $0.99T_R$ (кривые 2 и 4). Из рис. 3 видно, что при этих температурах кривизна ленты и ее прогиб в процессе обратного мартенситного превращения $B19' \rightarrow R \rightarrow B2$ испытывают резкие колебания из-за стеснения движения ее концов.

В свободных условиях при температуре $0.98T_R$ прогиб ленты в средней ее части ($x = 0$) равен $-0.1W_0(0)$ (кривая 1), а в стесненных условиях — $1.58W_0(0)$ (кривая 3), где $W_0(0) = R_0(1 - \cos \theta_0) \approx 0.12R_0$ — прогиб ленты, $2\theta_0 = 2l/R_0$ — полный угол ее изгиба при отжиге. Это означает, что, например, при длине лентополоски $2l = 20$ мм [2] ее прогиб в стесненных условиях возрастает с -0.24 до 3.8 мм. Такое резкое изменение величины и знака прогиба в узком температурном интер-

вале $(0.97-0.98)T_R$ (≈ 3 К при $T_R = 300-320$ К) свидетельствует о возникновении явления прощелкивания при двунаправленном ЭПФ.

На рис. 5 показана полная температурная эволюция максимального прогиба ленты $W(0, T)$ при повышении температуры. Видно, что если в качестве рабочей точки выбрать температуру, при которой кривизна ленты равна нулю, то небольшое отклонение от нее будет вызывать сильный прогиб полоски из никелида титана, что существенно расширяет функциональные возможности полученного на ее основе исполнительного или сенсорного устройства.

3. Эйлера неустойчивость ЭПФ

Классическая эйлера неустойчивость стержня прямоугольного сечения имеет чисто упругий характер и определяется известным критерием [11,12]

$$P_c \geq EJ \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2, \quad (12)$$

где $P_c = AE\varepsilon_c$ и ε_c — критические усилие и деформация сжатия стержня. Для рассмотренной выше тонкой ленты-полоски $\varepsilon_c \geq 0.2(h/l)^2 \approx -4.4 \cdot 10^{-5}$. При нулевой кривизне (полном выпрямлении) полоски было принято, что деформация ее упругого сжатия $\varepsilon_m = -2 \cdot 10^{-4}$. Она по абсолютной величине существенно больше критической деформации ε_c .

В результате эйлеровой неустойчивости полоска из никелида титана испытывает вначале небольшой упругий, а затем значительный (но ограниченный по величине) пластический прогиб (кривые 3 и 4 на рис. 4). Прогиб и пластическое прощелкивание являются результатом действия термодинамических сил при структурном фазовом переходе, а также действия приложенных к полоске механических напряжений.

Потеря полоской пластической устойчивости определяется условием $|\varepsilon(T)| > |\varepsilon_c|$, где $\varepsilon(T)$ — деформация сжатия полоски при двунаправленном ЭПФ (6). Принимая во внимание (6), запишем это условие в развернутом виде

$$\frac{R_0(T)}{R_0} \sin \left(\theta_0 \frac{R_0}{R_0(T)} \right) > \theta_0 [1 - |\varepsilon_m| + |\varepsilon_c|], \quad (13a)$$

$$\frac{R_0}{R_0(T)} = 1 - \frac{3R_0}{2h} \left(\frac{1}{2} |\varepsilon_0| + \bar{\varepsilon}_p(T) \right). \quad (13b).$$

Здесь $R_0/R_0(T)$ и $\bar{\varepsilon}_p(T)$ — соответственно приведенная кривизна и аналогичная (4) деформация полоски-ленты при несесненном ЭПФ [8]. Поскольку неустойчивость возникает при $R_0/R_0(T) \ll 1$, учитывая тейлоровское разложение $\sin x \approx x - x^3/6$, условию (13a) можно придать вид

$$\frac{3R_0}{2h} \left(\frac{1}{2} |\varepsilon_0| + \bar{\varepsilon}_p(T) \right) > 1 \mp \sqrt{6}\theta_0^{-1} \sqrt{|\varepsilon_m| - |\varepsilon_c|}. \quad (14)$$

При заданной величине параметров R_0/h , $|\varepsilon_m|$ и $|\varepsilon_c|$ оно определяет критические температуры T_- и T_+ ,

при достижении которых неустойчивость возникает и исчезает.

Таким образом, проведенный выше на основе теории РМП анализ показывает, что пластическая неустойчивость двунаправленного ЭПФ зависит от геометрических параметров ленты из никелида титана, угла изгиба ленты при отжиге, концентрации в ней частиц Ti_3Ni_4 , а также от структурных и термодинамических параметров мартенситного превращения, определяющих величину деформаций ε_0 и $\bar{\varepsilon}_p(T)$.

Список литературы

- [1] N. Nishida, T. Honma. Scripta Met. **18**, 11, 1293 (1984).
- [2] М.А. Хусаинов. Вестн. Новгород. ун-та **10**, 34 (1998).
- [3] М.А. Хусаинов. ЖТФ **67**, 6, 118 (1997).
- [4] T. Honma. In: Shape Memory Alloy-86 / Ed. Ch. Youyi, T.Y. Hsu, T. Ko. China Academic Publ., Guilin (1986). P. 83.
- [5] D.Y. Li, L.Q. Chen. Acta Mater. **45**, 2, 471 (1997).
- [6] L. Bataillard, J.E. Bidaux, R. Gotthardt. Phil. Mag. A **78**, 2, 327 (1998).
- [7] Г.А. Малыгин. ФТТ **45**, 8, 1491 (2003).
- [8] Г.А. Малыгин. ФТТ **45**, 9, 1700 (2003).
- [9] Г.А. Малыгин. ФТТ **36**, 5, 1489 (1994).
- [10] Г.А. Малыгин. УФН **171**, 2, 187 (2001).
- [11] Л.Е. Андреева. Упругие элементы приборов. Машиностроение, М. (1981). 344 с.
- [12] А.С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем. Наука, М. (1967). 984 с.