

01

## Широкополосные хаотические колебания в слабосвязанном ансамбле автоколебательных осцилляторов

© Н.В. Станкевич<sup>1-3</sup>, Е.С. Попова<sup>1,2</sup>, А.П. Кузнецов<sup>2</sup>, Е.П. Селезнев<sup>2,4</sup><sup>1</sup> Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия<sup>2</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия<sup>3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия<sup>4</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: stankevichnv@mail.ru

Поступило в Редакцию 8 июля 2019 г.

В окончательной редакции 8 июля 2019 г.

Принято к публикации 17 сентября 2019 г.

Представлено численное исследование связанных в кольцо осцилляторов ван дер Поля. Проведено исследование особенностей хаотической динамики с помощью анализа спектров Фурье и спектра показателей Ляпунова. Показано, что хаотическая динамика, возникающая при разрушении многочастотных торов, обладает широкополосным спектром.

**Ключевые слова:** ансамбли взаимодействующих осцилляторов, хаотические колебания, показатели Ляпунова, широкополосность.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.24.48796.17967

Одним из перспективных направлений прикладного использования радиофизических генераторов являются системы скрытой коммуникации на базе синхронизации хаотических сигналов [1–3]. Такого рода задачи предъявляют определенные требования к генераторам сложных сигналов. Одним из важнейших свойств является широкополосность генерируемого сигнала. Свойство широкополосности может быть связано со сценарием, в результате которого формируется хаотический сигнал. Так, например, при формировании хаотического сигнала в результате разрушения многочастотных торов спектр будет содержать компоненты разрушенных торов. В данном контексте можно вспомнить о сценарии Ландау–Хопфа, когда хаотическая динамика возникает в результате вовлечения большего числа частотных компонент [4]. Наиболее удобными моделями для реализации устойчивых многочастотных квазипериодических колебаний являются многоконтурные генераторы [5] или ансамбли взаимодействующих автоколебательных систем [6,7]. В работе [6] была разработана модель, представляющая собой ансамбль связанных осцилляторов ван дер Поля, в котором наблюдалась последовательность квазипериодических бифуркаций. Однако в такой модели области хаотической динамики в пространстве параметров малы. В рамках настоящей работы предлагается исследование ансамбля связанных осцилляторов ван дер Поля, в котором наблюдается формирование хаоса в результате разрушения многочастотного тора, и особое внимание уделено спектральным характеристикам хаотических аттракторов.

Объектом исследования настоящей работы является ансамбль взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля со связью типа „кольцо“, математическую модель

которого можно записать в следующем виде:

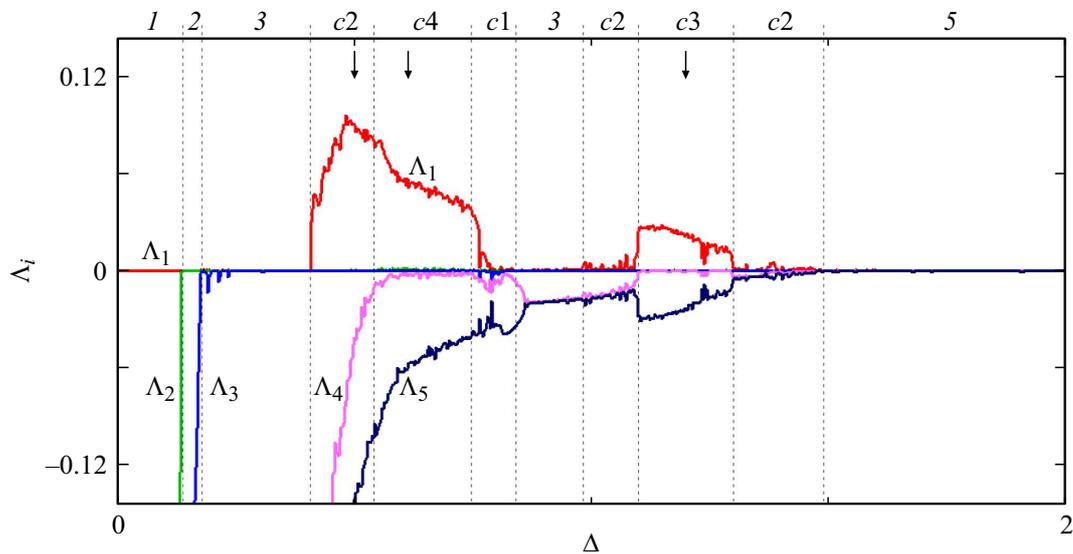
$$\begin{aligned} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2)\dot{x} + x + \frac{\mu}{2}(2x - w - y) &= 0, \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2)\dot{y} + \left(1 + \frac{\Delta}{4}\right)y + \frac{\mu}{2}(2y - x - z) &= 0, \\ \ddot{z} - (\lambda_3 - z^2)\dot{z} + \left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)z + \frac{\mu}{2}(2z - y - v) &= 0, \\ \ddot{v} - (\lambda_4 - v^2)\dot{v} + \left(1 + \frac{3\Delta}{4}\right)v + \frac{\mu}{2}(2v - z - w) &= 0, \\ \ddot{w} - (\lambda_5 - w^2)\dot{w} + (1 + \Delta)w + \frac{\mu}{2}(2w - v - x) &= 0. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь  $x, y, z, v, w$  — динамические переменные осцилляторов,  $\lambda_i$  — параметры, отвечающие за возбуждение автоколебаний в каждом индивидуальном осцилляторе ван дер Поля,  $\Delta$  — частотная расстройка между осцилляторами,  $\mu$  — коэффициент связи. В работе [6] рассматривался подобный ансамбль, только с глобальной связью. Частоты генераторов распределены эквидистантно по кольцу. Обязательным условием для возникновения последовательности квазипериодических бифуркаций Хопфа была неидентичность по параметрам возбуждения  $\lambda_i$ . В случае идентичности по параметрам возбуждения в системе возникают вырождения, и таким образом можно сохранить в пространстве параметров области многочастотных квазипериодических колебаний. В нашей работе мы зафиксируем идентичными все параметры возбуждения  $\lambda_i = \lambda = 0.5$  и рассмотрим особенности динамики системы при малой силе связи и вариации параметра частотной расстройки.

Основной инструментарий, позволяющий идентифицировать сложные колебательные режимы, включая

**Таблица 1.** Список возможных динамических режимов, соответствие их сигнатуры спектра показателей Ляпунова и обозначения

Режим	Сигнатура спектра показателей Ляпунова	Обозначение
Периодический	(0, -, -, -, -, -, -)	1
Двухчастотный квазипериодический	(0, 0, -, -, -, -, -)	2
Трехчастотный квазипериодический	(0, 0, 0, -, -, -, -)	3
Четырехчастотный квазипериодический	(0, 0, 0, 0, -, -, -, -)	4
Пятичастотный квазипериодический	(0, 0, 0, 0, 0, -, -, -)	5
Хаос	(+, 0, -, -, -, -, -)	c1
Хаос с одним дополнительным нулевым показателем Ляпунова	(+, 0, 0, -, -, -, -)	c2
Хаос с двумя дополнительными нулевыми показателями Ляпунова	(+, 0, 0, 0, -, -, -)	c3
Гиперхаос	(+, +, 0, -, -, -, -)	c4

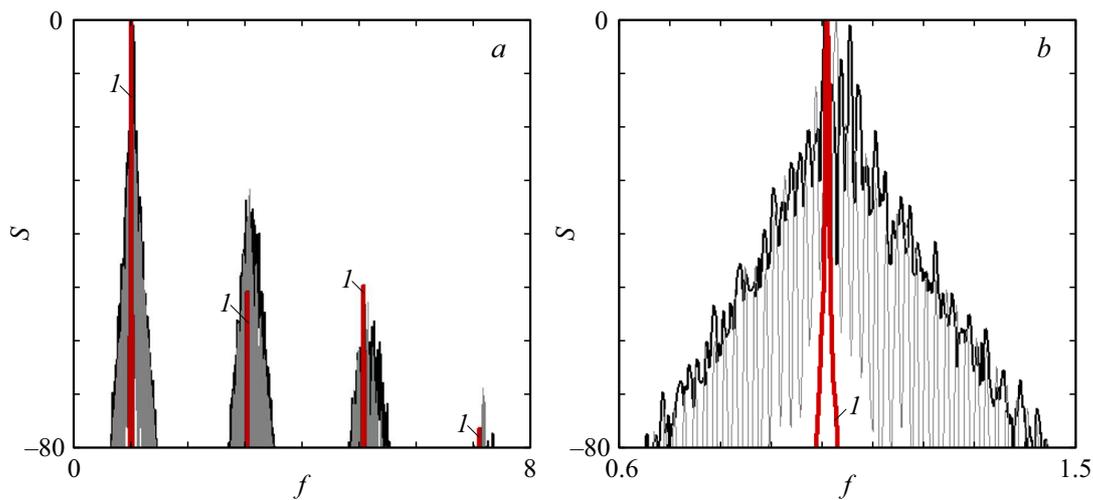


**Рис. 1.** Зависимости пяти старших показателей Ляпунова ансамбля взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля (1) при  $\lambda = 0.5, \mu = 0.12$ . Пунктирными линиями отмечены области различных динамических режимов в соответствии с обозначениями, приведенными в табл. 1.

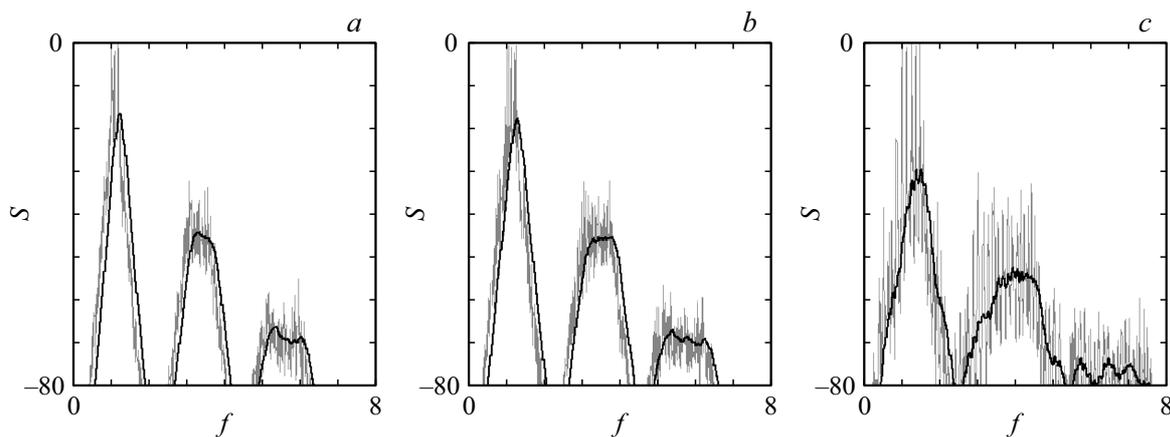
хаос, гиперхаос, и классифицировать многочастотные квазипериодические режимы, — это спектр показателей Ляпунова. Для модели (1) был рассчитан спектр показателей Ляпунова с помощью алгоритма Бенеттина и ортогонализации по Грамму–Шмидту.

Поскольку сложные колебательные режимы и квазипериодические колебания с различным числом частотных компонент сохраняются только при малой силе связи взаимодействия в ансамбле, мы зафиксировали этот параметр как  $\mu = 0.12$ . На рис. 1 представлен однопараметрический график зависимости пяти старших показателей Ляпунова при вариации частотной расстройки между осцилляторами в ансамбле (оставшиеся пять показателей всегда отрицательны). На представленном графике по сигнатуре спектра показателей Ляпунова можно выделить девять типов динамического поведения, которые детально описаны в табл. 1. При малой частот-

ной расстройке реализуются периодические колебания. При небольшом увеличении частотной расстройки наблюдаются две бифуркации седло–узел, в результате которых происходит переход от периодических колебаний к трехчастотным квазипериодическим. После этого наблюдается разрушение трехчастотного тора с формированием хаотической динамики. Хаос, возникший в результате разрушения высокочастотных торов, обладает своей спецификой: в спектре показателей Ляпунова такого режима могут присутствовать дополнительные нулевые экспоненты, отвечающие за нейтральные направления, сохранившиеся при разрушении высокочастотных торов. Таким образом, в результате разрушения трехчастотного тора в ансамбле (1) формируется хаос с одним положительным и двумя нулевыми показателями Ляпунова. При дальнейшем увеличении параметра  $\Delta$ , отвечающего за частотную расстройку, одна из нуле-



**Рис. 2.** Спектры Фурье ансамбля взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля (1),  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.12$ , при переходе от периодических колебаний к трехчастотным квазипериодическим:  $\Delta = 0.12$  — периодический режим (линия  $I$ );  $\Delta = 0.15$  — двухчастотный квазипериодический режим (обозначено серым);  $\Delta = 0.2$  — трехчастотный квазипериодический режим (обозначено черным).  $a$  — полный спектр,  $b$  — увеличенный фрагмент.



**Рис. 3.** Спектры Фурье ансамбля взаимодействующих осцилляторов ван дер Поля (1) для различных хаотических режимов при  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.12$ .  $\Delta = 0.5$  (a),  $0.61$  (b) и  $1.2$  (c). Соответствующие значения параметров указаны стрелками на рис. 1.

вых экспонент становится положительной, и в системе наблюдается гиперхаос. Далее наблюдается переход к хаосу с одним положительным и одним нулевым показателем, который при дальнейшем увеличении частотной расстройки трансформируется в трехчастотные квазипериодические колебания. Затем происходит разрушение трехчастотного тора, и возникает сначала хаос с одним положительным и двумя нулевыми показателями Ляпунова, а далее развивается хаос с одним положительным и тремя нулевыми показателями в спектре. После этого на графике наблюдается постепенное уменьшение старших показателей Ляпунова, происходит переход к хаосу с одним положительным и двумя нулевыми показателями, и далее все пять показателей приходят к нулевому значению, при этом шестой показатель остается отрицательным (не показан на рис. 1). Таким образом, в итоге формируется пятичастотный квазипериодический

режим, который и остается устойчивым при дальнейшем увеличении частотной расстройки.

В настоящей работе мы концентрируемся на спектральных свойствах наблюдаемых хаотических режимов с различной сигнатурой спектра показателей Ляпунова. Прежде всего обсудим особенности формирования хаотической динамики. Как было упомянуто ранее, при увеличении частотной расстройки происходят две седлоузловые бифуркации, в результате которых появляется трехчастотный тор. На рис. 2 представлены спектры Фурье при плавном увеличении частотной расстройки и переходе от периодических колебаний к трехчастотному тору. На рисунке линией  $I$  отмечен спектр Фурье для периодического режима; как и ожидалось, данный спектр представляет собой набор дискретных компонент, соответствующих основной частоте и кратным нечетным гармоникам, как это характерно для осциллятора ван дер

**Таблица 2.** Точные значения пяти старших показателей Ляпунова для различных хаотических аттракторов

$\Delta$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$	$\Lambda_5$
0.5	0.0075	0.0	0.0	-0.0038	-0.0124
0.61	0.0045	0.0002	0.0	-0.0001	-0.0049
1.2	0.0018	0.0	0.0	0.0	-0.0018

Поля. При  $\Delta \approx 0.1371$  в системе появляется двухчастотный тор, на графике показателей Ляпунова наблюдаются два нулевых показателя. На рис. 2 серым цветом показан пример спектра Фурье для  $\Delta = 0.15$ , соответствующий двухчастотному тору. Как видно из рисунка, в этом случае в окрестности каждой частотной компоненты появляются компоненты-спутники, а также хорошо видно, что основной пик раздваивается. При дальнейшем увеличении частотной расстройки при  $\Delta \approx 0.1771$  возникает трехчастотный тор, пример спектра Фурье которого показан на рис. 2 черным цветом для  $\Delta = 0.2$ . В этом случае в окрестности компонент двухчастотного тора появляются дополнительные компоненты, что хорошо видно на увеличенном фрагменте (рис. 2, *b*). Таким образом, в системе в результате последовательности бифуркаций седло–узел возникает трехчастотный режим, спектр которого содержит довольно большое количество дискретных компонент.

При  $\Delta \approx 0.4086$  трехчастотный тор разрушается и возникает хаос, чему соответствует появление положительной экспоненты Ляпунова в спектре. При этом в спектре показателей Ляпунова сохраняется одна дополнительная нулевая экспонента. На рис. 3, *a* приведен пример спектра Фурье для такого динамического режима при  $\Delta = 0.5$ , серым цветом показан спектр, а черным — линия, отвечающая усреднению по 120 соседним значениям. В табл. 2 представлены значения пяти старших показателей Ляпунова. Как видно из рисунка, для хаотического сигнала спектр Фурье становится непрерывным, хотя некоторые дискретные компоненты сохраняются. В окрестности пика основной частоты, а также кратного трем и пяти формируются полосы сплошного спектра. Для основной частоты, а это частота первого генератора  $f_1$ , ширина полосы составляет около  $0.2f_1$ , на частоте утроенной гармоники ширина полосы составила  $0.7f_1$ , а на частоте пятой гармоники ширина полосы —  $1.1f_1$ . Таким образом, для всех трех рабочих частотных полос можно говорить о формировании широкополосного хаотического сигнала.

При  $\Delta \approx 0.5516$  второй показатель Ляпунова становится положительным и таким образом формируется гиперхаос. На рис. 3, *b* представлен пример спектра Фурье гиперхаотического режима. Форма спектра Фурье в этом случае остается такой же, следует отметить небольшое расширение полос на всех частотах и более равномерную спектральную плотность мощности.

Также рассмотрим третий вид хаотического аттрактора, который наблюдается в рассматриваемом ансамбле осцилляторов, когда в спектре показателей Ляпунова присутствуют один положительный и три нулевых показателя Ляпунова. Спектр Фурье такого динамического режима показан на рис. 3, *c*. Для этого режима характерно наличие большого количества дискретных компонент в спектре, уменьшение амплитуды для всех частотных компонент.

Таким образом, показано, что в ансамбле взаимодействующих осцилляторов возможно возникновение хаотической динамики с различным спектром показателей Ляпунова в результате разрушения многочастотных квазипериодических колебаний. Хаотические колебания, возникающие таким образом, характеризуются широкополосным спектром.

### Финансирование работы

Работа Е.П.С. и А.П.К. выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, работа Н.В.С. и Е.С.П. — при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых МК-31.2019.8.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
- [2] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // УФН. 2009. Т. 179. № 12. С. 1281–1310.
- [3] Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.
- [4] Ландау Л.Д. // ДАН СССР. 1944. Т. 44. № 8. С. 339–342. [Collected Papers of L.D. Landau / Ed. D. ter Haar. Oxford: Pergamon, 1965. P. 387–391.]
- [5] Станкевич Н.В., Астахов О.В., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. В. 10. С. 46–54.
- [6] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V. // Phys. Lett. A. 2013. V. 377. P. 3291–3295.
- [7] Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Shchegoleva N.A., Stankevich N.V. // Physica D. 2019. V. 398. P. 1–12.