03

Капиллярная неустойчивость цилиндрической струи феррожидкости, находящейся в однородном продольном магнитном поле

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,
119192 Москва, Россия
e-mail: verazhan@yandex.ru

Поступило в Редакцию 6 августа 2019 г.
В окончательной редакции 17 октября 2019 г.
Принято к публикации 3 декабря 2019 г.

Сформулированная постановка задачи дает возможность исследовать как в слабых, так и в сильных полях влияние магнитных сил на капиллярную неустойчивость струи феррожидкости с заданными физическими характеристиками. Диапазон напряженности поля включает значения, которым на графике кривой намагничивания феррожидкости соответствует интервал, в котором происходит выход кривой на величину намагниченности насыщения. Проведено сравнение найденных скоростей роста и длин волн наиболее быстро растущих возмущений формы поверхности струи при сильных и слабых полях.

Ключевые слова: капиллярная неустойчивость, феррожидкость, магнитное поле, кривая намагничивания.

DOI: 10.21883/JTF.2020.05.49170.297-19

Введение

Имеющееся в литературе [1–3] решение задачи о капиллярной неустойчивости соосной магнитному полю $\mathbf{H}_0$ струи изотермической феррожидкости получено в предположении, что магнитная восприимчивость рассматриваемой феррожидкости является заданной константой χ_ι. Ввиду этого в [1–3] использован линейный закон намагничивания. Такой подход оправдан лишь в случае слабых полей.

На практике кривые намагничивания, получаемые с использованием сильных полей, показывают нелинейную зависимость намагниченности феррожидкости от величины приложенного магнитного поля.

В настоящей работе применена аппроксимация экспериментальной кривой намагничивания функцией Ланжевена от модифицированного аргумента, выраженного через величину напряженности приложенного магнитного поля H_0, начальную магнитную восприимчивость χ_ι и намагниченность насыщения M_s.

При численном исследовании влияния величины H_0 на скорость роста амплитуд неустойчивых волн и длину наиболее быстро растущей волны взяты физические характеристики феррожидкости, использовавшейся при экспериментальном исследовании явлений на поверхности раздела феррожидкости с воздухом [4,5].

1. Постановка задачи

Используется рэлеевская формулировка задачи о капиллярной неустойчивости струи [6,7], дополненная расчетом объемных и поверхностных магнитных сил и их учетом соответственно в уравнении движения и в динамическом граничном условии. В невозмущенном состоянии, реализованном в момент времени $t = 0$, вертикальная струя магнитной жидкости (область *1* на рис. 1) моделируется жидким цилиндрическим объемом радиуса a, движущимся вниз с постоянной скоростью. Жидкий цилиндр находится внутри длинного соленоида радиуса $R \gg a$. Оси этого цилиндра и соленоида совпадают. Давление в окружающем струю воздухе (область *2*) постоянно. Магнитное поле, создаваемое соленоидом, обозначим $\mathbf{H}_0$. Векторы магнитной индукции и намагниченности в области *1* обозначим через $\mathbf{B}_{01}$, $\mathbf{M}_0 = \chi\mathbf{H}_0$, где $\chi = \chi(H_0)$ — магнитная восприимчивость.

При $t > 0$ вследствие развития начальных бесконечно малых возмущений форма поверхности струи изменяется. В случае $\mathbf{H}_0 = 0$ амплитуды осесимметричных волн с длинами $\lambda > 2\pi a$ растут с ростом времени, что приводит к распаду струи, а все имевшиеся в момент $t = 0$ неосесимметричные волны устойчивы [6,7].

Известно [2], что продольное магнитное поле оказывает стабилизирующее воздействие как на осесимметричные, так и на неосесимметричные волны. Ввиду этого при исследовании распада струи достаточно изучить влияние поля на осесимметричные волны.

Введем цилиндрическую систему координат r, ϑ, z, в которой при $t = 0$ все жидкие частицы покоятся. Пусть при $t > 0$ уравнение $r = a + \xi(z, t)$ описывает форму поверхности струи.

Возмущенные магнитные поля в феррожидкости и в газе обозначим через $\mathbf{H}_j(r, z, t) = (H_{jr}, 0, H_{jr})$, $j = 1, 2$. Индексами $j = 1, 2$ отмечаются физические величины, относящиеся к феррожидкости $(j = 1)$ и к газу $(j = 2)$. Используются обозначения: $\mathbf{B}_1(r, z, t) = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}_1)$, $\mathbf{B}_2(r, z, t) = \mu_0\mathbf{H}_2$ — векторы магнитной индукции, $\mathbf{M}(r, z, t) = \chi(H_1)\mathbf{H}_1$ — вектор намагниченности, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — магнитная постоянная. Учи-

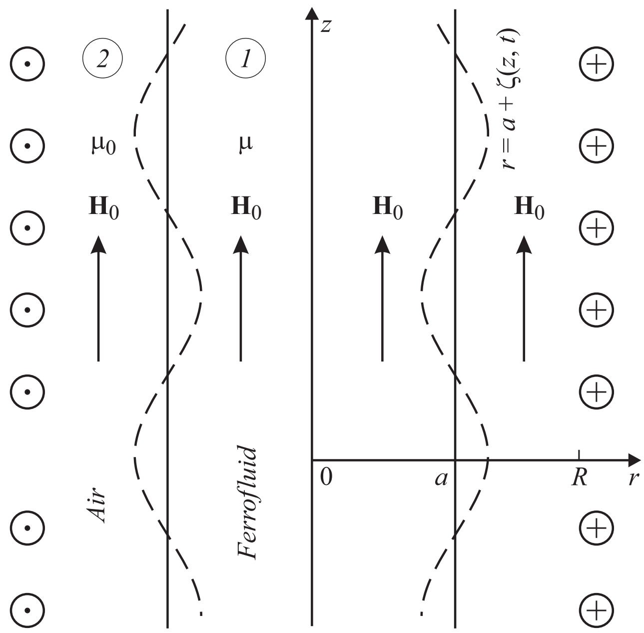

Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

тывается зависимость магнитной восприимчивости χ от $H_1 = \sqrt{H_{1r}^2 + H_{1z}^2}$. Используются также дифференциальная проницаемость $\mu_t(H_1) = dB_1/dH_1$ и дифференциальная магнитная восприимчивость $\chi_t(H_1) = dM/dH_1$, причем $\mu_t(H_1) = \mu_0[1 + \chi_t(H_1)]$. Реализующиеся в экспериментах кривые намагничивания феррожидкостей $M = \chi(H_1)H_1$ являются выпуклыми кверху, ввиду чего $\chi_t(H_1) < \chi(H_1)$.

Введем потенциал магнитного поля $f_j(r, z, t)$. Имеем

$$\mathbf{H}_j = \operatorname{grad} f_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial r}, 0, \frac{\partial f_j}{\partial z}\right), \quad \mathbf{B}_1 = \mu(1+\chi) \operatorname{grad} f_1,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \operatorname{grad} f_2, \quad \mathbf{M} = \chi \operatorname{grad} f_1.$$

С использованием функций $f_j(r, z, t)$ условие соленоидальности вектора магнитной индукции записывается следующим образом:

$$\mu \Delta f_1 = \frac{\mu_t - \mu}{|\operatorname{grad} f_1|} \operatorname{grad}|\operatorname{grad} f_1| \cdot \operatorname{grad} f_1, \quad \Delta f_2 = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Полагая $f_j(r, z, t) = H_0 z + \psi_j(r, z, t)$ и считая $|\operatorname{grad} \psi_j| \ll H_0$, после линеаризации первого уравнения (1) получаем

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta \psi_2 = 0, \tag{2}$$

где $\sigma = \sqrt{\frac{1+\chi_t(H_0)}{1+\chi(H_0)}}$. Для вычисления σ требуются полученные из эксперимента параметры $\chi(H_0)$, $\chi_t(H_0)$. При слабых полях имеем $\sigma = 1$.

На поверхности раздела магнитная жидкость−газ граничные условия магнитостатики в линейном приближении записываются следующим образом:

$$r = a: \quad \psi_1 = \psi_2, \quad \mu_1(H_0)\frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \mu_0 M_0 \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$M_0 = \chi(H_0) H_0. \tag{3}$$

Вдали от поверхности раздела возмущение магнитного поля исчезает.

Аппроксимируем экспериментальную кривую намагничивания функцией Ланжевена $L_\infty(x) = \operatorname{cth} x - 1/x$ [8] от модифицированного аргумента $x = 3\chi_\iota H_1/M_s$ [9], где $\chi_\iota = \chi$ при $H_1 \to 0$ и $M_s = M$ при $H_1 \to \infty$. В результате получаем

$$M(H_1) = M_s L_\infty(3\chi_\iota H_1/M_s), \tag{4}$$

$$\chi_t(H_1) = \frac{1}{3\chi_\iota H_1^2}\left\{M_s^2 - \left[3\chi_\iota H_1 \operatorname{cosech}\left(\frac{3\chi_\iota H_1}{M_s}\right)\right]^2\right\}.$$

Используя разложение функции Ланжевена при малых значениях аргумента

$$L_\infty(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5), \quad x \ll 1$$

в случае слабых полей имеем

$$M(H_1) = \chi_\iota H_1\left[1 - 0.6(\chi_\iota H_1/M_s)^2\right]$$

$$\text{при} \quad H_1 \ll M_s/(3\chi_\iota).$$

Опуская в этом выражении малую величину, приходим к линейному закону намагничивания.

Линеаризованные уравнения гидродинамики записываются следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p + \mathbf{f}_m. \tag{6}$$

Здесь ρ — плотность феррожидкости, $p = p(r, z, t)$ — давление, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, z, t) = (u_r, 0, u_z)$ — скорость. После отбрасывания малых величин выражение для плотности объемных магнитных сил $\mathbf{f}_m(r, z, t)$ принимает вид $\mathbf{f}_m = \mu_0 M_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$.

Запишем линеаризованные кинематическое и динамическое условия на поверхности струи

$$r = a: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r, \quad p = \alpha\left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right), \tag{7}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Следует отметить, что известный в феррогидродинамике магнитный скачок давления [10] в динамическом условии на поверхности струи — последнее выражение в (7) — ввиду малости опущен.

Рассмотрим струю использовавшейся в экспериментах [4,5] феррожидкости с $\chi_\iota = 0.69$, $M_s = 16.9\,\text{kA/m}$, $\rho = 1324\,\text{kg/m}^3$. У этой феррожидкости на границе

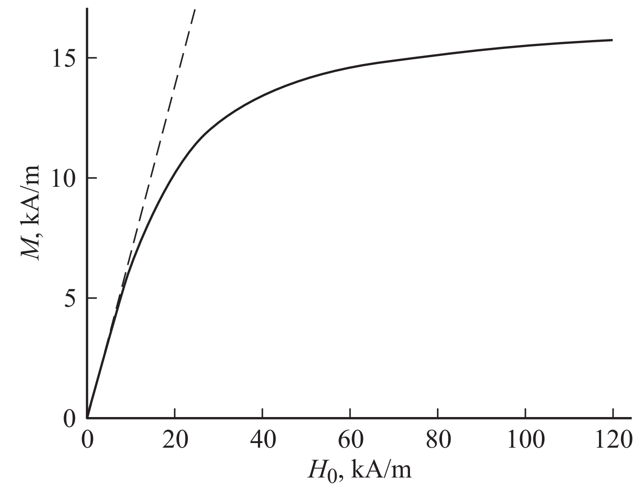

Рис. 2. Законы намагничивания феррожидкости.

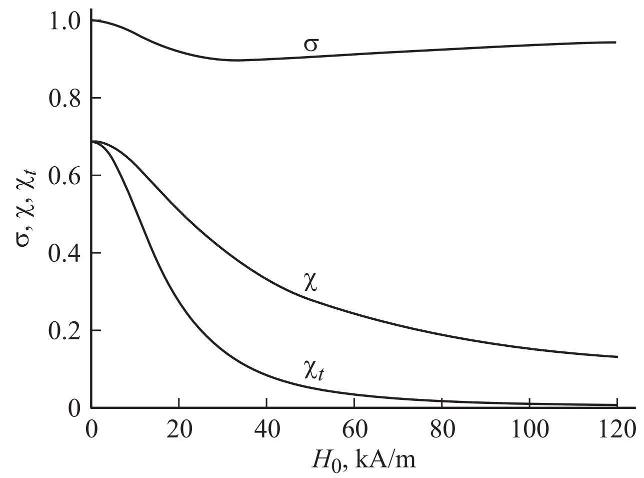

Рис. 3. Графики зависимости безразмерных параметров χ_t, χ, σ от напряженности приложенного магнитного поля.

с воздухом коэффициент поверхностного натяжения $\alpha = 0.059\,\mathrm{N/m}$. Пусть струя имеет радиус $a = 0.5\,\mathrm{mm}$.

На рис. 2 сплошная линия представляет кривую ланжевеновского намагничивания (4) рассматриваемой феррожидкости, находящейся в магнитном поле с напряженностью $H_1 = H_0$. Штриховой прямой показан линейный закон намагничивания.

На рис. 3 показаны графики функций $\chi_t = \chi_t(H_0)$, $\chi = \chi(H_0)$ и $\sigma = \sigma(H_0)$.

После введения потенциала скорости $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\varphi$ задача (5)−(7) записывается следующим образом:

$$\Delta\varphi = 0, \quad r = a: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

$$-\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu_0 M_0\,\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = \alpha\left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right). \qquad (8)$$

Далее рассматривается задача (2), (3), (8).

2. Влияние магнитного поля на капиллярный распад струи

Методом нормальных мод [6,7] исследуем поведение решения сформулированной задачи при возрастании времени. С этой целью выведем дисперсионное соотношение.

Представим решение в виде суперпозиции нормальных мод

$$\{\xi(z,t), \varphi(r,z,t), \psi_1(r,z,t), \psi_2(r,z,t)\}$$
$$= \{Z(k), \Phi(r), \Psi_1(r), \Psi_2(r)\}\exp[s(k)t + ikz]. \qquad (9)$$

Здесь i — мнимая единица, k — действительный положительный параметр (волновое число), а $s(k)$ является искомой функцией.

В классической задаче (случай $H_0 = 0$) об устойчивости цилиндрической струи радиуса a выражение $s^2(k)$ в точке $k = a^{-1}$ при возрастании k изменяет знак с плюса на минус [6,7].

С использованием (9) после разделения переменных в задаче (2), (3), (8) получаем

$$\frac{d^2\Psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\Psi_1}{dr} - (\sigma k)^2\Psi_1 = 0,$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\Psi_2}{dr} - k^2\Psi_2 = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\Phi}{dr} - k^2\Phi = 0, \qquad (11)$$

$$r = a: \quad \Psi_1 = \Psi_2, \quad \mu\,\frac{d\Psi_1}{dr} - \mu_0\,\frac{\Psi_2}{dr} = ik\mu_0 M_0 Z,$$

$$sZ = \frac{d\Phi}{dr}, \qquad (12)$$

$$r = a: \quad i\rho s\Phi + k\mu_0 M_0\Psi_1 = i\alpha\left(\frac{1}{a^2} - k^2\right)Z. \qquad (13)$$

Ограниченные при $r/a \to 0$ решения уравнений (10), (11), удовлетворяющие граничным условиям (12), выражаются через модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ [11]

$$\Psi_1(r) = q(H_0)K_0(\kappa)I_0(\sigma kr),$$

$$\Psi_2(r) = q(H_0)I_0(\sigma\kappa)K_0(kr),$$

$$\Phi(r) = \frac{sZ}{kI_1(\kappa)}\,I_0(kr),$$

$$q(H_0) = \frac{iZM_0}{I_0(\sigma\kappa)K_1(\kappa) + (1+\chi)\sigma I_1(\sigma\kappa)K_0(\kappa)}, \quad \kappa = ka.$$

После подстановки найденных решений в преобразованное кинематическое условие на поверхности струи (13) получаем дисперсионное соотношение

$$s^2 = \frac{\alpha}{\rho a^3}\left[-\frac{W\kappa^2}{I_0(\kappa)}\cdot\frac{I_0(\sigma\kappa)I_1(\kappa)K_0(\kappa)}{I_0(\sigma\kappa)K_1(\kappa)+\sigma(1+\chi)I_1(\sigma\kappa)K_0(\kappa)}\right.$$

$$\left. + \frac{\kappa(\kappa^2-1)I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)}\right],$$

$$W = \frac{a\mu_0}{\alpha}M_0^2. \qquad (14)$$

В случае слабых полей $\sigma = 1$, $\chi = \chi_t$. Поскольку

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x},$$

то выражение (14) принимает вид

$$s^2 = \frac{\alpha}{\rho a^3}\left[\frac{\kappa(1-\kappa^2)I_1(\kappa)}{I_0(\kappa)} - \frac{W\kappa^3 I_1(\kappa)K_0(\kappa)}{1+\chi_t I_1(\kappa)K_0(\kappa)}\right].$$

Применительно к численным значениям параметров струи рассматриваемой феррожидкости на рис. 4 показаны графики безразмерной функции $S^2(\kappa) = \rho a^3\alpha^{-1}s^2(\kappa)$ при различных величинах напряженности приложенного магнитного поля H_0. Из этих графиков видно, что при увеличении H_0 точка пересечения построенной кривой с осью κ смещается в сторону более длинных волн. В результате увеличивается диапазон безразмерных волновых чисел κ, в котором функция $S(\kappa)$ является чисто мнимой, т.е. диапазон устойчивых мод расширяется.

На рис. 5 представлены графики безразмерной скорости роста $S(\kappa)$ при различных H_0. Максимумы этой функции определяют безразмерные волновые числа κ_m мод, наиболее быстро растущих при выбранной величине H_0. Кривая *1* соответствует задаче Рэлея о капиллярной неустойчивости струи [6,7]. Экспериментальные данные, полученные в работе [12] для струи

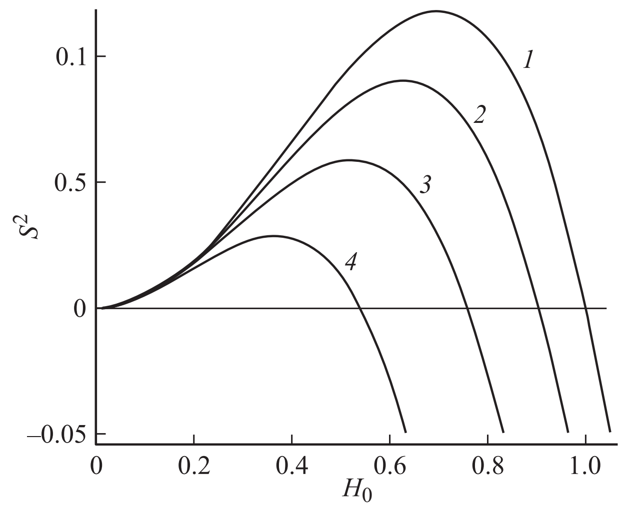

Рис. 4. Графики зависимости квадрата безразмерной скорости роста от безразмерного волнового числа при различных H_0: кривая *1* — 0, *2* — 10; *3* — 20, *4* — 120 kA/m.

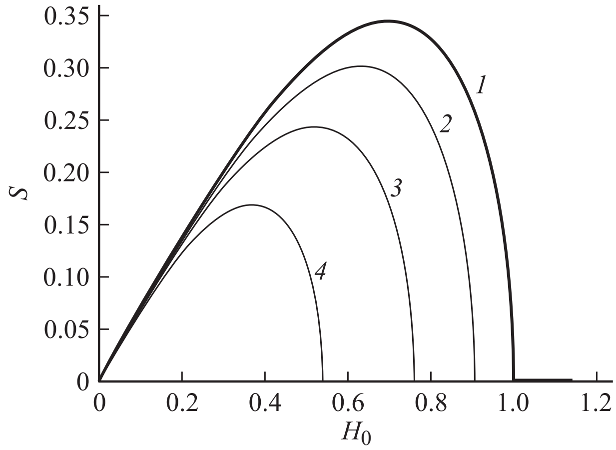

Рис. 5. Графики зависимости безразмерной скорости роста от безразмерного волнового числа при различных H_0: кривая *1* — 0, *2* — 10, *3* — 20, *4* — 120 kA/m.

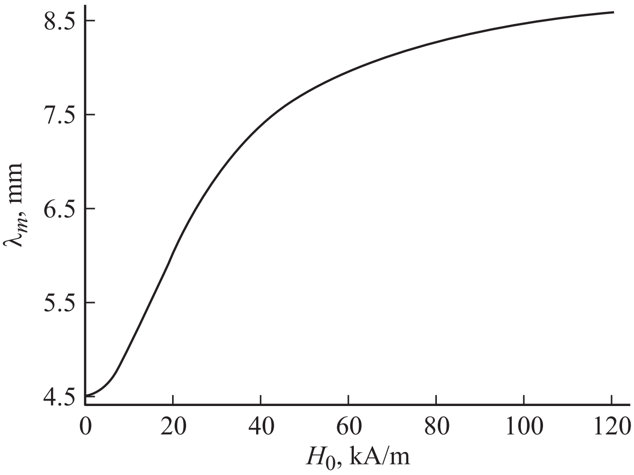

Рис. 6. График зависимости длины наиболее быстро растущей волны от напряженности приложенного магнитного поля.

воды диаметром 6.35 mm, дают хорошее согласование с кривой *1*. Из рис. 5 видно, что увеличение H_0 вызывает уменьшение скорости роста моды, наиболее быстро растущей при заданной величине напряженности поля.

На рис. 6 представлена зависимость длины волны $\lambda_m = 2\pi a/\kappa_m$ наиболее быстро растущей моды от H_0. Из этого графика видно, что эффект нелинейного намагничивания феррожидкости в сильных полях вызывает существенное увеличение длины волны λ_m.

Заключение

Предложена методика исследования влияния продольного магнитного поля любой напряженности, технически реализуемой в экспериментах, на капиллярную неустойчивость цилиндрической струи феррожидкости. Показано, что при намагниченности феррожидкости, близкой к намагниченности насыщения M_s, длина волны наиболее быстро растущей моды существенно превышает максимальное значение, рассчитанное с использованием линейного закона намагничивания.

Финансирование работы

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00056).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Тактаров Н.Г.* // Магнитная гидродинамика. 1975. № 2. С. 35–38.
[2] *Баштовой В.Г., Краков М.С.* // ПМТФ. 1978. № 4. С. 147–153.
[3] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
[4] *Dorbolo S., Falcon E.* // Phys. Rev. E. 2011. Vol. E83. P. 046303.
[5] *Boyer F., Falcon E.* // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. P. 244502.
[6] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford University Press: Clarendon Press. 1961. 652 p.
[7] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 287 с.
[8] *Сивухин Д.В.* Электричество. М.: Наука, 1983. 688 с.
[9] *Abou B., Néron de Surgy G., Wesfreid J.E.* // J. Phys. II France. 1997. Vol. 7. N 8. P. 1159–1171.
[10] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
[11] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
[12] *Donnelly R.J., Glaberson W.* // Proc. Roy. Soc. London. 1966. Vol. A. 290. P. 547–556.