

03

Применение метода продолженных граничных условий к решению задачи дифракции волн на рассеивателях сложной геометрии, расположенных в однородной и неоднородной средах

© Д.В. Крысанов¹, А.Г. Кюркчан^{1,2,3}, С.А. Маненков¹

¹ Московский технический университет связи и информатики,
111024 Москва, Россия

² Фрязинский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
141190 Фрязино, Московская обл., Россия

³ Центральный научно-исследовательский институт связи,
111141 Москва, Россия

e-mail: dimok1993@mail.ru

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.

В окончательной редакции 04.12.2019 г.

Принята к публикации 23.12.2019 г.

На основе метода продолженных граничных условий предложена методика, позволяющая моделировать характеристики рассеяния для тел произвольной геометрии. В работе рассмотрена двумерная задача дифракции плоской волны на диэлектрических телах со сложной геометрией сечения, в частности на фракталоподобных телах. Проведено сравнение численных алгоритмов решения задачи дифракции на основе систем интегральных уравнений 1-го и 2-го рода. Приведено обобщение метода на задачу дифракции на цилиндрическом теле, расположенном в однородном магнитоэлектрическом полупространстве. Корректность метода подтверждена при помощи проверки выполнения оптической теоремы для различных тел и путем сравнения с результатами расчетов, полученных модифицированным методом дискретных источников.

Ключевые слова: дифракция волн на телах сложной геометрии, метод продолженных граничных условий, дифракция на телах, расположенных в плоскостной среде.

DOI: 10.21883/OS.2020.04.49199.327-19

Введение

Задача дифракции волн на диэлектрическом теле сложной геометрии является весьма актуальной и остается сравнительно слабо исследованной ввиду сложности ее решения. Результаты моделирования характеристик рассеяния волн диэлектрическими телами представляют большой интерес в таких, например, областях, как оптика неоднородных сред, лазерная дефектоскопия, проектирование поглощающих покрытий и др. [1–3]. Несмотря на то, что на данный момент разработан ряд аналитических и численных методов решения этих задач (наиболее распространенными из которых являются метод Т-матриц [4] и метод дискретных источников [5]), потребности в моделировании дифракционных процессов возрастают довольно быстро, в связи с чем вопрос разработки более универсальных методов решения задач дифракции все еще остается актуальным. Широкая популярность метода Т-матриц объясняется во многом тем, что с использованием этого метода можно сравнительно легко выполнять такую важную, например, в астрофизике процедуру, как усреднение характеристик рассеяния тела по углам его ориентации относительно падающей плоской волны. Однако традиционный (классический) вариант метода Т-матриц [4], как и некоторые его недавно разработанные модифицированные вариан-

ты [5,6], применимы к решению задач дифракции лишь на рассеивателях с аналитической границей.

В работах [7,8] было предложено обобщение метода Т-матриц на основе метода продолженных граничных условий (МПГУ) для решения задачи дифракции с условием Дирихле на границе в двумерном и трехмерном случаях. Двумерный случай был также рассмотрен для импедансного краевого условия [9]. Идея МПГУ заключается в переносе граничного условия с поверхности S рассеивателя на некоторую вспомогательную поверхность S_δ , которая располагается вне рассеивателя на некотором достаточно малом расстоянии δ от его границы. К главным достоинствам МПГУ можно отнести отсутствие ограничений на геометрию рассеивателя (в том числе он применим и для рассеивателей, имеющих изломы границы, и для тонких экранов). Кроме того, МПГУ предлагает единый подход к решению краевых задач, не зависящий от их типа, размерности, геометрии поверхности рассеивателя и характера рассеиваемого поля. Отметим также, что в рамках МПГУ задача дифракции может быть сведена к решению системы интегральных уравнений 1- или 2-рода, что невозможно также просто осуществить, например, при решении задачи методом поверхностных интегральных уравнений.

В настоящей работе предлагается обобщение описанной выше методики для решения двумерной задачи ди-

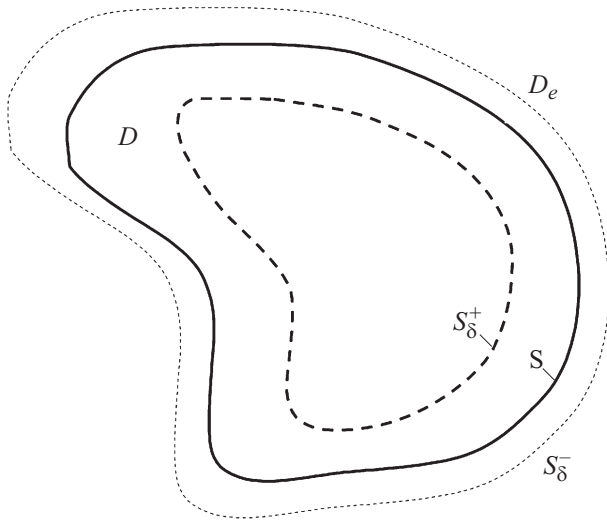


Рис. 1. Геометрия задачи дифракции на теле, расположенном в однородной среде.

фракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле. Рассмотрены примеры моделирования характеристик рассеяния волн телами с поперечным сечением сложной геометрии и фракталоподобными телами. Приведены формулы и результаты расчетов диаграммы рассеяния тел сложной геометрии, расположенных в однородном диэлектрическом полупространстве.

1. Вывод основных соотношений

Пусть на бесконечно длинный магнитодиэлектрический цилиндр с образующей, параллельной оси OZ, и с направляющей S падает первичное электромагнитное поле $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$. Геометрия задачи изображена на рис. 1. Рассмотрим случай E-поляризации, когда вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} имеет только одну составляющую E_z (ниже обозначаемую буквой U_- или U_+), параллельную образующей цилиндрического тела. Тогда на границе рассеивателя будут иметь место следующие условия сопряжения:

$$U_+|_S = U_-|_S, \quad \left. \frac{\partial U_+}{\partial n} \right|_S = \kappa \left. \frac{\partial U_-}{\partial n} \right|_S, \quad (1)$$

где U_+ — поле внутри цилиндра, $U_- = U^0 + U^1$ — полное поле вне тела, причем U^0 — падающее, а U^1 — рассеянное (вторичное) поле, $\frac{\partial}{\partial n}$ — дифференцирование по направлению внешней к S нормали, $\kappa = \mu_i/\mu_e$, μ_i и μ_e — относительные магнитные проницаемости сред внутри и вне тела соответственно. Внешняя среда ($D_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$, $\bar{D} = D \cup S$, D — область, ограниченная кривой S) и среда внутри цилиндра полагаются однородными, линейными и изотропными. На бесконечности предполагаются выполненными стандартные условия излучения для рассеянного поля.

Воспользуемся следующими представлениями для решения уравнения Гельмгольца в областях D и D_e соответственно [5]:

$$U_-(\mathbf{r}) = U^0(\mathbf{r}) + \int_S \left\{ \frac{\partial U_-(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - U_-(\mathbf{r}') \frac{\partial G_-(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n'} \right\} ds',$$

$$U_+(\mathbf{r}) = - \int_S \left\{ \frac{\partial U_+(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - U_+(\mathbf{r}') \frac{\partial G_+(\mathbf{r}; \mathbf{r}')}{\partial n'} \right\} ds', \quad (2)$$

в которых $G_{\pm}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4i} H_0^{(2)}(k_{\pm}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ — это фундаментальные решения скалярного уравнения Гельмгольца в \mathbb{R}^2 с материальными параметрами сред D_e и D соответственно, причем k_+ и k_- — волновые числа среды внутри и вне рассеивателя. Потребовав в соответствии с МПГУ выполнения условий (1) на контуре S_{δ}^- , расположенном в $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$, и на контуре S_{δ}^+ , расположенном в области D (рис. 1), с использованием соотношений (2), получим следующие системы интегральных уравнений (СИУ) Фредгольма 1-го или 2-го рода соответственно:

$$\int_S \left\{ \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} (G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}') + \kappa G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')) - U(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \right\} ds' = -U^0(\mathbf{r}_-),$$

$$\int_S \left\{ \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} \left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n} + \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n} \right) - U(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial^2 G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \right\} ds' = - \frac{\partial U^0(\mathbf{r}_-)}{\partial n}, \quad (3)$$

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} U^0(\mathbf{r}_-) + \frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} (G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}') - \kappa G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')) - U(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) \right\} ds',$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial n} = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{\partial U^0(\mathbf{r}_-)}{\partial n} + \frac{1}{1 + \kappa} \times \int_S \left\{ \frac{\partial U(\mathbf{r}')}{\partial n'} \left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n} - \kappa \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n} \right) - U(\mathbf{r}') \left(\frac{\partial^2 G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \right) \right\} ds', \quad (4)$$

где точки наблюдения $M(\mathbf{r}_{\pm})$ принадлежат контурам S_{δ}^{\pm} , а точка $M(\mathbf{r}) \in S$ и обозначена $U = U_-$. Отметим, что чаще всего в качестве S_{δ}^{\pm} [5,10] выбирают контуры,

отстоящие от S на некоторое достаточно малое расстояние δ , т.е. рассматривают эквидистантные контуры. Пусть уравнение границы S задано в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x'(t), \\ y = y'(t), t \in [0, t_{\max}]. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда уравнения смещенных контуров S^\mp записываются следующим образом:

$$\begin{cases} x = x'(t) \pm n_x(t)\delta, \\ y = y'(t) \pm n_y(t)\delta, \end{cases} \quad (6)$$

где n_x и n_y — координаты нормали к границе тела S . Для решения систем (3) и (4) используем метод Крылова–Боголюбова. Для этого запишем системы уравнений (3) и (4) в виде

$$\int_0^{t_{\max}} K_{11}(t, t')I_1(t') + K_{12}(t, t')I_2(t')dt' = b_1(t),$$

$$\int_0^{t_{\max}} K_{21}(t, t')I_1(t') + K_{22}(t, t')I_2(t')dt' = b_2(t), \quad (7)$$

$$I_1(t) + \int_0^{t_{\max}} \tilde{K}_{11}(t, t')I_1(t') + \tilde{K}_{12}(t, t')I_2(t')dt' = \tilde{b}_1(t),$$

$$I_2(t) + \int_0^{t_{\max}} \tilde{K}_{21}(t, t')I_1(t') + \tilde{K}_{22}(t, t')I_2(t')dt' = \tilde{b}_2(t), \quad (8)$$

в которых

$$I_1(t') = U(\mathbf{r}'(t')), \quad I_2(t') = \frac{\partial U(\mathbf{r}'(t'))}{\partial n'},$$

$$\xi(t') = \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2},$$

$$K_{11} = -\left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n'} + \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\xi(t'),$$

$$K_{12} = (G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}') + \kappa G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}'))\xi(t'),$$

$$K_{21} = -\left(\frac{\partial^2 G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'}\right)\xi(t'),$$

$$K_{22} = \left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n} + \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n}\right)\xi(t'),$$

$$b_1(t) = -U^0(\mathbf{r}(t)), \quad b_2(t) = -\frac{\partial U^0(\mathbf{r}_-(t))}{\partial n}, \quad (9)$$

$$\tilde{K}_{11} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n'}\right)\xi(t'),$$

$$\tilde{K}_{12} = \frac{1}{2}(G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}') + \kappa G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}'))\xi(t'),$$

$$\tilde{K}_{21} = \frac{1}{1 + \kappa}\left(\frac{\partial^2 G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} - \frac{\partial^2 G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'}\right)\xi(t'),$$

$$\tilde{K}_{22} = \frac{1}{1 + \kappa}\left(\frac{\partial G_-(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n} - \kappa \frac{\partial G_+(\mathbf{r}_+; \mathbf{r}')}{\partial n}\right)\xi(t'),$$

$$\tilde{b}_1(t) = -\frac{1}{2}U^0(\mathbf{r}_-(t)), \quad \tilde{b}_2(t) = \frac{1}{1 + \kappa} \frac{\partial U^0(\mathbf{r}_-(t))}{\partial n}. \quad (10)$$

Точка в (9) означает производную по t . Представим далее неизвестные функции $I_{1,2}(t)'$ в виде сумм

$$I_q \cong \sum_{n=1}^N c_n^q \Phi_n(t'), \quad q = 1, 2, \quad (11)$$

где $\Phi_n(t')$ — импульсные функции:

$$\Phi_n(t)' = \begin{cases} 1, & t \in [t_n - \Delta/2, t_n + \Delta/2], \\ 0, & t \notin [t_n - \Delta/2, t_n + \Delta/2]. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $t_n = \frac{t_{\max}}{N} \left(n - \frac{1}{2}\right)$, $n = \overline{1, N}$, $\Delta = \frac{t_{\max}}{N}$ — шаг сетки, N — число базисных функций. Далее, подставив (11) в системы интегральных уравнений (7) и (8) и приравняв левую и правую части в точках коллокации с координатами $(x(t_n), y(t_n))$, выбранных на кривых, получим следующие системы алгебраических уравнений относительно величин c_n^q :

$$\sum_{n=1}^N \left(K_{mn}^{11}c_n^1 + K_{mn}^{12}c_n^2\right) = b_m^1,$$

$$\sum_{n=1}^N \left(K_{mn}^{21}c_n^1 + K_{mn}^{22}c_n^2\right) = b_m^2, \quad m = \overline{1, N}, \quad (13)$$

или

$$c_m^1 + \sum_{n=1}^N (\tilde{K}_{mn}^{11}c_n^1 + \tilde{K}_{mn}^{12}c_n^2) = \tilde{b}_m^1,$$

$$c_m^2 + \sum_{n=1}^N (\tilde{K}_{mn}^{21}c_n^1 + \tilde{K}_{mn}^{22}c_n^2) = \tilde{b}_m^2, \quad m = \overline{1, N}, \quad (14)$$

где матричные элементы и правые части вычисляются по формулам

$$K_{mn}^{pq} = \int_{t_n - \Delta/2}^{t_n + \Delta/2} K_{pq}(t_m, t) dt, \quad b_m^p = b_p(t_m), \quad (15)$$

$$\tilde{K}_{mn}^{pq} = \int_{t_n - \Delta/2}^{t_n + \Delta/2} \tilde{K}_{pq}(t_m, t) dt, \quad \tilde{b}_m^p = \tilde{b}_p(t_m), \quad p, q = 1, 2. \quad (16)$$

Переходя к асимптотике рассеянного волнового поля при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ с учетом формул (2), (5), (11) и (12) получим следующее выражение для диаграммы рассеяния:

$$g(\varphi) = \frac{i\Delta}{4} \sum_{n=1}^N (c_n^2 - c_n^1) i k_-(n'_x)(t_n) \cos \varphi + n'_y(t_n \sin \varphi) \xi(t_n) e^{ik_-(x'(t_n) \cos \varphi + y'(t_n) \sin \varphi)}. \quad (17)$$

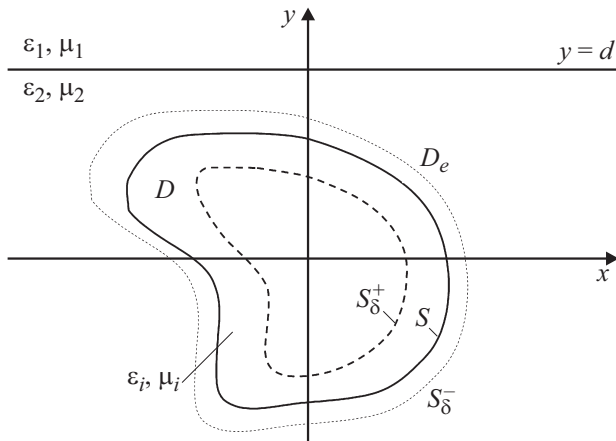


Рис. 2. Геометрия задачи дифракции на теле, расположенном в диэлектрическом полупространстве.

Формулы (13)–(17) дают два численных алгоритма (основанных на системах уравнений 1- и 2-рода) для решения сформулированной задачи дифракции.

Одним из критериев правильности полученных результатов является оптическая теорема, которая записывается в виде [11]

$$\sigma = -\text{Re}(g(\varphi = \varphi_0)), \quad (18)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (19)$$

В качестве оценки точности выполнения оптической теоремы будем рассчитывать величину, которая представляет собой относительную разность левой и правой частей в формуле (18):

$$\Delta_{ot} \equiv \frac{|\sigma + \text{Re}(g(\varphi_0))|}{\sigma}. \quad (20)$$

2. Рассеяние на цилиндрическом теле, погруженном в однородное диэлектрическое полупространство

Обобщим предлагаемую методику на случай, когда рассеивающее препятствие расположено в однородном магнитоэлектрическом полупространстве. Геометрия задачи изображена на рис. 2. Обозначим материальные параметры сред при $y > d$ и $y < d$ через ϵ_1, μ_1 и ϵ_2, μ_2 соответственно ($y = d$ — граница раздела сред). На границе раздела предполагаются выполненными условия сопряжения

$$U|_{y=d} = U_-|_{y=d}, \quad \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=d} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial U_-}{\partial n} \Big|_{y=d}, \quad (21)$$

где U и U_- — полное поле в верхнем и нижнем полупространстве соответственно. В качестве падающего

поля рассмотрим плоскую волну, падающую из верхнего полупространства $y > d$.

Как и в случае дифракции на теле, в однородной среде полное поле в нижнем полупространстве, в котором расположено тело, и поле внутри рассеивателя имеют вид (2), где функция Грина $G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ заменяется на следующую:

$$\begin{aligned} G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(k_-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(w) \\ &\times \exp(-i\gamma_-(2d - y - y') - iw(x - x')) \frac{dw}{\gamma_-} \\ &= G_-^I(\mathbf{r}; \mathbf{r}') + G_-^{II}(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (22)$$

где $R(w) = \frac{\gamma_- - \mu_{21}\gamma}{\gamma_- + \mu_{21}\gamma}$, $\gamma_- = \sqrt{k_-^2 - w^2}$, $\gamma = \sqrt{k^2 - w^2}$. При этом знак корня выбирается так, чтобы его мнимая часть была неположительна. В приведенных формулах обозначено $k = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$, $k_- = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$, $\mu_{12} = \mu_1/\mu_2$, $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1$.

Дальнейшее решение задачи вновь сводится к СИУ относительно поля и его нормальной производной на границе рассеивателя. Будем решать задачу дифракции, используя, например, СИУ 2-го рода. В результате получим СИУ в виде (8), причем ядра интегральных уравнений записываются следующим образом:

$$\tilde{K}_{pq} = \tilde{K}_{pq}^I + \tilde{K}_{pq}^{II}, \quad p, q = 1, 2, \quad (23)$$

где первые слагаемые такие же, как для тела в однородной среде с волновым числом k_- , а добавочные слагаемые, обусловленные наличием границы раздела, имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11}^{II} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G_-^{II}(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}')}{\partial n'} \xi(t'), \quad \tilde{K}_{12}^{II} = \frac{1}{2} G_-^{II}(\mathbf{r}_-; \mathbf{r}') \xi(t'), \\ \tilde{K}_{21}^{II} &= -\frac{1}{1 + \kappa} \frac{\partial^2 G_-^{II}(\mathbf{r}_-, \mathbf{r}')}{\partial n \partial n'} \xi(t'), \\ \tilde{K}_{22}^{II} &= \frac{1}{1 + \kappa} \frac{\partial G_-^{II}(\mathbf{r}_-, \mathbf{r}')}{\partial n} \xi(t'). \end{aligned} \quad (24)$$

Кроме того, в отличие от случая дифракции на теле в однородной среде при дифракции на теле в полупространстве, первичное поле записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} U^0(\mathbf{r}) &= \frac{2k \cos \theta_0}{k \cos \theta_0 + \mu_{12} \sqrt{k_-^2 - k^2 \sin^2 \theta_0}} \\ &\times \exp(ikd \cos \theta_0 - id \sqrt{k_-^2 - i^2 \sin^2 \theta_0}) \\ &\times \exp(-ikx \sin \theta_0 + iy \sqrt{k_-^2 - k^2 \sin^2 \theta_0}), \end{aligned} \quad (25)$$

где θ_0 — угол падения плоской волны. СИУ вновь решается методом Крылова–Боголюбова, однако в силу

того, что добавочные ядра интегральных уравнений являются медленно меняющимися функциями координат, матричные элементы СЛАНУ можно вычислять по приближенной формуле

$$\tilde{K}_{mn}^{pq} \approx \int_{t_n - \Delta/2}^{t_n + \Delta/2} \tilde{K}_{pq}^I(t_m, t) dt + \tilde{K}_{pq}^{II}(t_m, t_n) \Delta, \quad p, q = 1, 2. \quad (26)$$

Приведем формулы для расчета диаграммы рассеяния в верхнем полупространстве. Диаграмма имеет вид

$$g(\varphi) = \frac{i\Delta}{4} \frac{2k \sin \varphi}{\mu_{21} k \sin \varphi + \sqrt{k_-^2 - k^2 \cos^2 \varphi}} \times \exp(ikd \sin \varphi - id \sqrt{k_-^2 - k^2 \cos^2 \varphi}) \times \sum_{n=1}^N \left(c_n^2 - c_n^1 \left(in'_x(t_n) k \cos \varphi + in'_y(t_n) \sqrt{k_-^2 - k^2 \cos^2 \varphi} \right) \right) \times e^{i(kx'(t_n) \cos \varphi + y'(t_n) \sqrt{k_-^2 - k^2 \cos^2 \varphi})} \xi(t_n). \quad (27)$$

3. Численные результаты

Рассмотрим результаты численного моделирования. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что тело облучается плоской волной. В качестве примера рассмотрим сначала задачу дифракции на эллиптическом цилиндре, цилиндре с сечением в виде четырехлистника и цилиндре с прямоугольным сечением. Уравнение контура тела с сечением в виде четырехлистника имеет вид (в полярных координатах)

$$r = a(1 + \tau \cos 4\varphi), \quad 0 < \tau < 1. \quad (28)$$

На рис. 3–5 приведены угловые зависимости диаграммы рассеяния для соответствующей геометрии, полученные для следующих значений параметров задачи: $k\delta = 10^{-4}$, $\varphi_0 = 0$, $\mu_i = 1$, $\varepsilon_i = 4$ (материальные параметры внешней среды всюду $\mu_e = 1$, $\varepsilon_e = 1$). Размеры тел имели следующие значения: полуоси эллипса или половины длин сторон прямоугольника $ka = 5$, $kb = 1$, параметры $ka = 5$ и $\tau = 0.5$ для тела с сечением в виде четырехлистника. Результаты сравнивались с диаграммами, построенными при помощи модифицированного метода дискретных источников (ММДИ) [5,12]. Отметим, что ММДИ не может быть непосредственно применен к задаче дифракции на телах, имеющих изломы границы, поэтому для решения задачи при помощи ММДИ проводилась аппроксимация контура осевого сечения тела гладким контуром [12]. Отметим также, что ММДИ обеспечивает высокую точность расчета для тел с гладкой границей таких, как эллипс, многолистник и т.д.

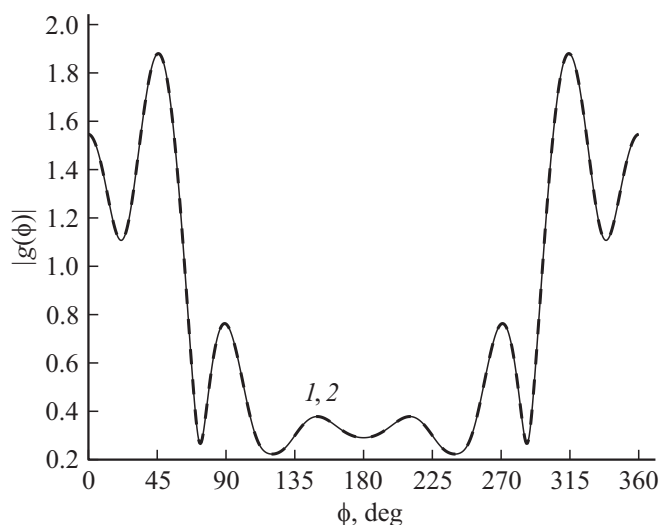


Рис. 3. Угловая зависимость диаграммы рассеяния эллиптического цилиндра. Кривая 1 — ММДИ, кривая 2 — МПГУ.

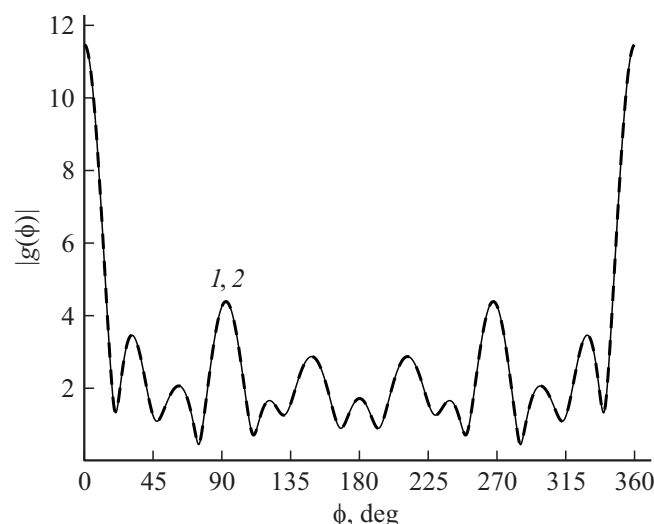


Рис. 4. Угловая зависимость диаграммы рассеяния тела с сечением в виде четырехлистника. Кривая 1 — ММДИ, кривая 2 — МПГУ.

Таблица 1. Сравнение результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ. Дифракция на эллиптическом цилиндре

N	СИУ 1-го рода		СИУ 2-го рода	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
48	$1.295 \cdot 10^{-2}$	2.038%	$1.453 \cdot 10^{-1}$	24.297%
96	$1.904 \cdot 10^{-3}$	0.230%	$4.183 \cdot 10^{-2}$	7.238%
192	$6.096 \cdot 10^{-4}$	0.067%	$1.144 \cdot 10^{-2}$	2.003%
288	$5.834 \cdot 10^{-4}$	0.075%	$5.539 \cdot 10^{-3}$	0.977%
384	$5.607 \cdot 10^{-4}$	0.075%	$3.450 \cdot 10^{-3}$	0.612%

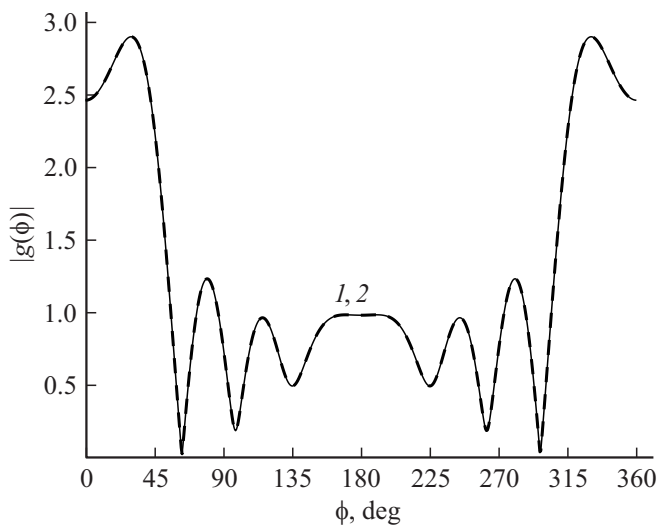


Рис. 5. Угловая зависимость диаграммы рассеяния тела с прямоугольным сечением. Кривая 1 — ММДИ, кривая 2 — МПГУ.

Таблица 2. Сравнение результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ. Дифракция на теле с сечением в виде четырехлистника

N	СИУ 1-го рода		СИУ 2-го рода	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
48	$1.643 \cdot 10^{-1}$	10.411%	$3.836 \cdot 10^{-1}$	21.169%
96	$2.499 \cdot 10^{-2}$	1.442%	$9.462 \cdot 10^{-2}$	5.125%
192	$5.802 \cdot 10^{-3}$	0.325%	$2.534 \cdot 10^{-2}$	1.370%
288	$2.984 \cdot 10^{-3}$	0.166%	$1.143 \cdot 10^{-2}$	0.619%
384	$2.176 \cdot 10^{-3}$	0.121%	$6.474 \cdot 10^{-3}$	0.351%

Таблица 3. Сравнение результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ. Дифракция на теле с прямоугольным сечением

N	СИУ 1-го рода		СИУ 2-го рода	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
48	$3.498 \cdot 10^{-2}$	4.781%	$5.035 \cdot 10^{-2}$	6.795%
96	$1.466 \cdot 10^{-2}$	1.956%	$1.417 \cdot 10^{-2}$	1.715%
192	$7.358 \cdot 10^{-3}$	0.879%	$4.773 \cdot 10^{-3}$	0.466%
288	$5.229 \cdot 10^{-3}$	0.561%	$3.122 \cdot 10^{-3}$	0.248%
384	$4.219 \cdot 10^{-3}$	0.429%	$2.641 \cdot 10^{-3}$	0.208%

В табл. 1–3 приведены разности модуля диаграммы рассеяния для указанной геометрии, полученные двумя методами: при помощи ММДИ и МПГУ. Как видно из табл. 1–3, разность результатов при увеличении числа используемых базисных функций, уменьшается. Из приведенных данных также следует, что для тел с гладкой границей использование уравнений 1-го рода

является более предпочтительным в силу более быстрой сходимости. В случае тела с прямоугольным сечением использование уравнений 2-го рода дает лучшие результаты.

На рис. 6 приведена геометрия фракталоподобных цилиндров с сечением в виде снежинки Коха и кривой Серпинского (1 итерация) [13]. Рисунки 7 и 8 иллюстрируют угловые зависимости диаграммы рассеяния для указанных цилиндров для следующих параметров задачи $k\delta = 10^{-4}$, $\mu_i = 1$, $\varepsilon_i = 4$. Максимальный поперечный размер тела с сечением в виде снежинки Коха и тела с сечением в виде кривой Серпинского по оси x составлял $kL = 10$. Рассматривалось два различных угла падения: $\varphi_0 = 0^\circ$ и $\varphi_0 = 45^\circ$. Как следует из рисунков для исследуемой геометрии точки максимума угловых зависимостей диаграммы рассеяния примерно совпадают с углами падения плоской волны. Видно также, что зависимость диаграммы как для тела с сечением в виде снежинки Коха, так и для тела с сечением в виде

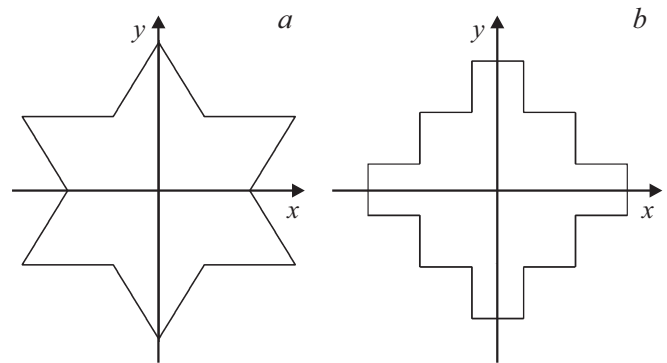


Рис. 6. Геометрия тела с сечением в виде снежинки Коха (a) и кривой Серпинского (b).

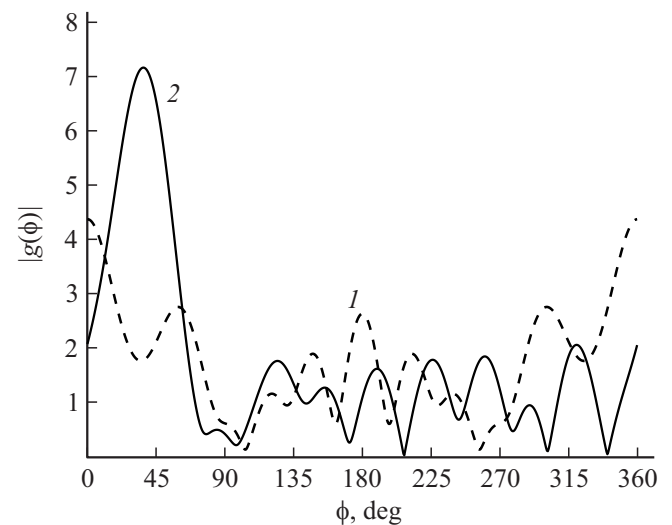
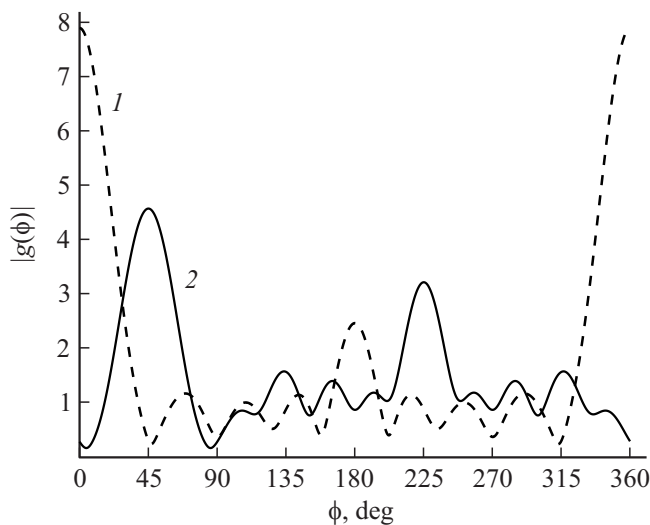


Рис. 7. Угловая зависимость диаграммы рассеяния тела с сечением в виде снежинки Коха. Кривая 1 — угол падения волны $\varphi_0 = 0^\circ$, кривая 2 — угол падения $\varphi_0 = 45^\circ$.

Таблица 4. Сравнение результатов, полученных при помощи ММДИ и МПГУ. Дифракция на теле, расположенном в диэлектрическом полупространстве

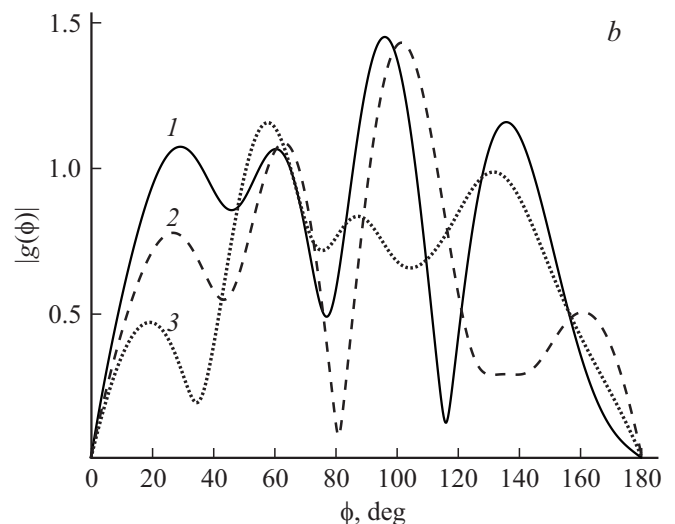
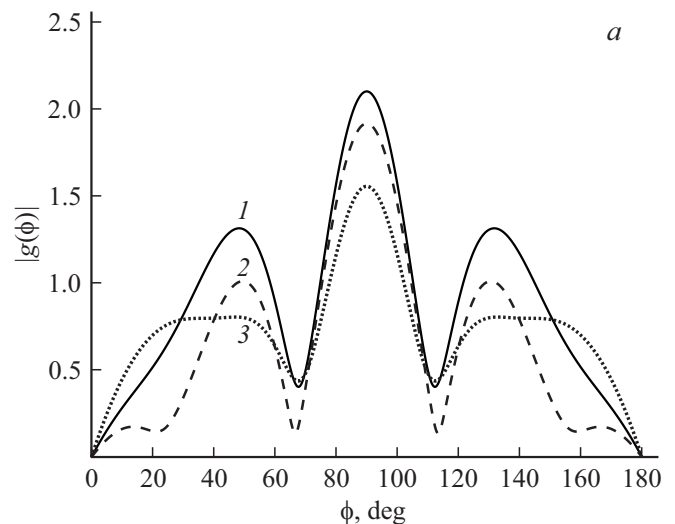
N	Эллиптический цилиндр		Цилиндр с сечением четырехлистика		Цилиндр с прямоугольным сечением	
	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
48	$3.616 \cdot 10^{-2}$	9.047%	$3.414 \cdot 10^{-1}$	51.927%	$2.146 \cdot 10^{-2}$	6.856%
96	$1.057 \cdot 10^{-2}$	2.622%	$1.235 \cdot 10^{-1}$	18.859%	$4.928 \cdot 10^{-3}$	1.611%
192	$3.073 \cdot 10^{-3}$	0.735%	$3.609 \cdot 10^{-2}$	5.696%	$2.432 \cdot 10^{-3}$	0.359%
288	$1.616 \cdot 10^{-3}$	0.368%	$1.687 \cdot 10^{-2}$	2.670%	$2.121 \cdot 10^{-3}$	0.354%
384	$1.099 \cdot 10^{-3}$	0.238%	$9.829 \cdot 10^{-3}$	1.548%	$2.630 \cdot 10^{-3}$	0.377%

**Рис. 8.** Угловая зависимость диаграммы рассеяния тела с сечением в виде кривой Серпинского. Кривая 1 — угол падения волны $\varphi_0 = 0^\circ$, кривая 2 — угол падения $\varphi_0 = 45^\circ$.

кривой Серпинского имеет достаточно большие боковые лепестки.

Была проведена проверка точности выполнения оптической теоремы для рассмотренной выше геометрии рассеивателей. Во всех случаях мы выбирали число базисных функций так, что $N_\lambda = 25$, где N_λ — число точек коллокации на одной длине волны. При этом относительная диэлектрическая проницаемость среды тела варьировалась в пределах от $\epsilon_i = 4$ до $\epsilon_i = 10^3$, а относительная магнитная проницаемость выбиралась равной единице. В результате расчетов получили, что относительная разность правой и левой частей равенства (18) — величина Δ_{ot} (см. формулу (20)) — не превосходит $5 \cdot 10^{-3}$, т.е. мала.

В табл. 4 приведены результаты расчета диаграммы рассеяния, полученные при помощи МПГУ и ММДИ. Рассматривалась дифракция на теле, расположенном в диэлектрическом полупространстве. Размеры тел были выбраны такими же, как и в случае дифракции в

**Рис. 9.** Угловая зависимость диаграммы рассеяния тела, расположенного в диэлектрическом полупространстве. Кривая 1 — цилиндр с сечением в виде кривой Серпинского, кривая 2 — цилиндр с сечением в виде снежинки Коха, кривая 3 — цилиндр с сечением в виде правильного шестиугольника. Угол падения $\theta_0 = 0$ (a) и 45° (b).

однородной среде, а материальные параметры сред для верхнего и нижнего полупространств и цилиндрического тела имели следующие значения: $\mu_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\varepsilon_2 = 2 - i \cdot 10^{-3}$, $\mu_i = 1$, $\varepsilon_i = 6$. Величина d была выбрана так, что кратчайшее расстояние от границы всех тел до границы раздела сред составляло 1. Параметр $k\delta = 10^{-4}$. Из таблицы следует, что относительная разность результатов, полученных при помощи МПГУ и ММДИ, не превосходит 1.6%. На рис. 9 приведены угловые зависимости диаграммы рассеяния для цилиндров с сечением в виде правильного шестиугольника, снежинки Коха и кривой Серпинского (1 итерация), расположенных в однородном полупространстве. Зависимости диаграммы приведены для верхнего полупространства. Рассматривалось два различных угла падения плоской волны: $\theta_0 = 0$ и $\theta_0 = 45^\circ$. Как следует из рисунка, в случае нормального падения плоской волны диаграмма рассеяния для всех тел имеет главный лепесток (в направлении обратного рассеяния) и два боковых лепестка. В случае наклонного падения волны график диаграммы имеет осциллирующий характер.

Заключение

При помощи МПГУ разработаны два численных алгоритма на основе СИУ 1-го и 2-го рода, позволяющие рассчитывать характеристики рассеяния магнитодиэлектрических тел произвольной геометрии. Получены результаты расчета диаграммы рассеяния для большого набора тел с разной геометрией, в том числе фракталоподобных рассеивателей. Проведено сравнение методов на основе МПГУ с результатами, полученными при помощи ММДИ. МПГУ позволяет получать результаты расчета диаграммы рассеяния с достаточно высокой точностью. В случае гладкой границы тела метод на основе уравнений 1-го рода позволяет получать результаты с большей точностью. Проведена проверка точности выполнения оптической теоремы для рассматриваемой геометрии. Точность выполнения оптической теоремы составляет $5 \cdot 10^{-3}$. Сравнение ММДИ и МПГУ для случая дифракции на цилиндрическом теле, расположенном в диэлектрическом полупространстве, показало хорошее совпадение результатов расчета. Построены угловые зависимости диаграммы рассеяния для тел, имеющих изломы границы, расположенных в диэлектрическом полупространстве.

Финансирование работы

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-02-00961, 19-02-00654).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986.; *Bohren K.F., Huffman D.R.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles. N.Y.: John Wiley & Sons, 1983.
- [2] *Захарьев Л.Н., Леманский А.А.* Рассеяние волн „черными“ телами. М.: Сов. радио, 1972.
- [3] *Mishchenko M.I., Zakharova N.T., Khlebtsov N.G., Videen G., Wriedt T.* // J. Quant. Spectr. Rad. Trans. 2017. V. 202. P. 240.
- [4] *Waterman P.C.* // Proc. IEEE. 1965. V. 53. P. 805.
- [5] *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ИД Медиа Паблишер, 2014; *Kyurkchan A.G., Smirnova N.I.* Mathematical Modeling in Diffraction Theory Based on A Priori Information on the Analytical Properties of the Solution. Amsterdam: Elsevier, 2016
- [6] *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И., Чиркова А.П.* // РЭ. 2015. Т. 60. № 3. С. 247; *Kyurkchan A.G., Smirnova N.I., Chirkova A.P.* // J. Commun. Technol. Electron. 2015. V. 60. N 3. P. 232.
- [7] *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 476; *Kyurkchan A.G., Smirnova N.I.* // J. Commun. Technol. Electron. 2017. V. 62. N 5. P. 502.
- [8] *Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Смирнова Н.И.* // Опт. и спектр. 2019. Т. 126. № 5. С. 547; *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A., Smirnova N.I.* // Opt. and Spectrosc. 2019. V. 126. N 5. P. 466.
- [9] *Крысанов Д.В., Кюркчан А.Г.* // Т-Comm. Телекоммуникации и транспорт. 2017. Т. 11. № 7. С. 17.
- [10] *Кюркчан А.Г., Аниютин А.П.* // ДАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 309; *Kyurkchan A.G., Anyutin A.P.* // Doklady Mathematics. 2002. V. 66. N 1. P. 132.
- [11] *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.
- [12] *Kyurkchan A.G., Manenkov S.A.* // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 2012. V. 113. P. 2368.
- [13] *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000; *Crownover R.M.* Introduction to Fractals and Chaos. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995.