03

К вопросу определения интегральных характеристик рассеяния

© О.Н. Гапоненко

Институт ядерных исследований РАН,
117312 Москва, Россия

e-mail: olgapone@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
В окончательной редакции 27.12.2019 г.
Принята к публикации 17.01.2020 г.

Рассмотрены вопросы, связанные с определением интегральных характеристик индикатрисы рассеяния для сред с остронаправленной в направлении вперед функцией рассеяния. Показано, что в стандартном методе вычисления среднего косинуса угла рассеяния, как правило, не учитывается вклад, важный для рассеяния в направлении малых углов. Приведена методика, позволяющая получить необходимые поправки для интегральных характеристик рассеяния в этом случае.

Ключевые слова: прикладная оптика, поглощение света, рассеяние света, индикатриса рассеяния, средний косинус угла рассеяния.

DOI: 10.21883/OS.2020.05.49321.303-19

Определение характеристик рассеяния естественных сред имеет важное значение как для теории, так и для прикладных аспектов. Так, например, на протяжении долгого времени на озере Байкал ведется сооружение нейтринного телескопа, разные варианты которого (НТ-36, НТ-72, НТ-144, НТ-200, НТ+, Дубна, Baikal GVD) были введены в эксплуатацию и использовались для регистрации нейтрино высоких энергий, см., например, [1–4]. Принцип регистрации в этих установках основан на детектировании света от черенковского излучения, возникающего при распространении высокоэнергетичных заряженных частиц в водной среде озера Байкал.

Известно, что распространение света сопровождается процессами поглощения, в результате которых число фотонов в первичном световом пучке убывает, и процессами рассеяния, в результате которых фотоны изменяют направление распространения. Интенсивность первого процесса принято характеризовать длиной поглощения λ_{abs}, которая имеет смысл средней длины между актами поглощения; для второго процесса характеристиками служат длина рассеяни λ_{scat} (средняя длина между актами рассеяния фотонов) и индикатриса (функция) рассеяния $\chi(\theta)$, которая определяет вероятность отклонения фотонов от первоначального направления в элементарный телесный угол в окрестности полярного угла θ (здесь мы рассматриваем распространенный случай, когда рассеяние не зависти от азимутального угла ϕ, последнее может не выполняться для кристаллов, однако не вносит принципиально новых моментов в излагаемый в настоящей работе метод).

Для прикладных целей важным является определение оптических характеристик *in situ*, т. е. непосредственно в месте проведения эксперимента. Так, например, для Байкальского нейтринного телескопа для корректного восстановления траектории регистрируемых частиц необходимо знать характеристики поглощения и рассеяния в месте локации оптических детекторов, непосредственно в озере Байкал, на глубине примерно 1300 m, что значительно усложняет измерения по сравнению со случаем лабораторных испытаний [5–7]. Другим фактором, приводящим к значительным сложностям при расчете характеристик рассеянии, является то, что индикатриса рассеяния чистой байкальской воды сильно вытянута в направлении прямо вперед и может меняться на несколько порядков при изменении угла на доли градуса (рис. 1) [7]. Часто вместо индикатрисы рассеяния на практике пользуются интегральными характеристиками, такими, например, как транспортная длина рассеяния

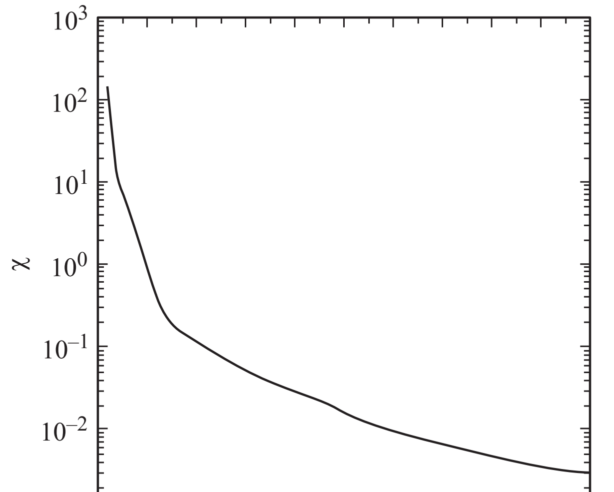

Рис. 1. Индикатриса рассеяния глубинной байкальской воды по данным работы [7].

(см., например, [8–11]):

$$L_{tr} = \frac{\lambda_{scat}}{1 - \langle\cos(\theta)\rangle}. \quad (1)$$

Здесь $\langle\cos(\theta)\rangle$ — средний косинус угла рассеяния:

$$\langle\cos(\theta)\rangle = \frac{\int_0^\pi \cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}{\int_0^\pi \chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}, \quad (2)$$

интеграл в знаменателе в этом выражении учитывает нормировку экспериментально полученной функции рассеяния на единицу (вероятность рассеяния в полный диапазон углов по всему телесному углу должна равняться 1).

Применение формулы (2) для расчета среднего косинуса угла рассеяния требует знания индикатрисы рассеяния во всем диапазоне углов θ, от 0 и до π. Как правило, функция рассеяния определяется в эксперименте начиная с некоторого минимального угла $\theta_{\min}$, поэтому формула (2) для экспериментально найденной индикатрисы рассеяния принимает вид

$$\langle\cos(\theta)\rangle_{\exp} = \frac{\int_{\theta_{\min}}^\pi \cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}{\int_{\theta_{\min}}^\pi \chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}. \quad (3)$$

Было найдено (см., например, [6,7]), что в месте нахождения Байкальского нейтринного телескопа для светового излучения с длиной волны 490 nm $\lambda_{\text{abs}} = 20$ m, $\lambda_{scat} = 22.5$ m, $\cos(\theta)\rangle_{\exp} \cong 0.95$ здесь минимальный угол составил $\theta_{\min} = 2^\circ$ в связи с тем, что продвижение в область меньших углов связано с огромными трудностями в измерении сильно меняющейся в этом диапазоне функции рассеяния (рис. 1). Столь близкое к единице значение среднего косинуса рассеяния связано с преобладанием рассеяния в воде естественного водоема на частичках примесей крупных размеров, по-видимому, это в основном органические образования (микроскопические водоросли). К сожалению, для байкальской глубинной воды до сих пор отсутствуют единая теория и подробные данные о распределении этих частичек по их размерам и их прозрачности для различных длин волн видимого света. Для указных значений параметров рассеяния транспортная длина (1) оказывается равной $L_{tr} = 450$ m. Столь большое значение транспортной длины вовсе не экзотика, а связано с тем, что средний косинус угла рассеяния очень близок к единице для сред, где преобладает рассеяние в направлении прямо вперед, такая ситуация встречается не только при изучении распространения света в естественных водоемах, но и в различных биомедицинских исследованиях [9–11].

Найденное по формуле (3) численное значение для среднего косинуса угла рассеяния не учитывает вклад от области малых углов $\theta < \theta_{\min}$. Вместе с тем несложно показать (рис. 1), что вклад от этой области углов является весьма ощутимым. Например, интеграл от индикатрисы рассеяния по области шириной в $\theta_{\min}$:

$$\int_{2^\circ}^{4^\circ} \chi(0)\sin(\theta)d\theta,$$

дает вклад более 30% в интеграл от полного измеренного в эксперименте на рис. 1 диапазона углов. В силу того, что в воде преобладает рассеяние на малые углы, следует ожидать, что вклад от области углов от 0° до 2° (т. е. такой же ширины, как и в предыдущем интеграле) будет еще больше. Как правило, для расчета параметров рассеяния в малоугловой области пользуются различными моделями индикатрис, см., например, [12,13]. Однако при таком подходе часто получаются весьма различные результаты в зависимости от выбранной модели, к тому же даже в рамках одной модели применения модельного подхода к водной среде естественного водоема может оказаться малопригодным. Поэтому возникает задача оценки вклада малоугловой области в значение среднего косинуса рассеяния и уточнения найденного по формуле (3) численного значения непосредственно по измеренным в эксперименте данным. Для этого поступим следующим образом: в точной формуле (2) представим числитель и знаменатель в виде двух слагаемых, первое из которых учитывает вклад от области углов от 0 и до $\theta_{\min}$, а второе — от области углов от $\theta_{\min}$ и до π:

$$\langle\cos(\theta)\rangle =$$
$$= \frac{\int_0^{\theta_{\min}} \cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta + \int_{\theta_{\min}}^\pi \cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}{\int_0^{\theta_{\min}} \chi(\theta)\sin(\theta)d\theta + \int_{\theta_{\min}}^\pi \chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}. \quad (4)$$

В силу того, что $\theta_{\min}$ обычно мал, в первом интеграле можно заменить $\cos\theta$ его значением для нулевого угла, $\cos(\theta) \approx 1$, это не внесет сколько-нибудь заметной ошибки, точный расчет показывает, что возникающая при этом погрешность во всяком случае много меньше экспериментальных ошибок при измерении индикатрисы $\big(\cos(\theta_{\min}) = \cos(2^\circ) = 0.9994 \approx 1\big)$. Также отметим, что это предположение не является необходимым для излагаемого здесь метода, несложно показать, что можно оставить в первом слагаемом в числителе формулы (4) $\cos(\theta)$ и проводить дальнейшие оценки с этим точным выражением, сделанное здесь упрощение нужно нам лишь для того, чтобы сделать дальнейший вывод более наглядным. С учетом сделанного замечания соотношение (4) принимает

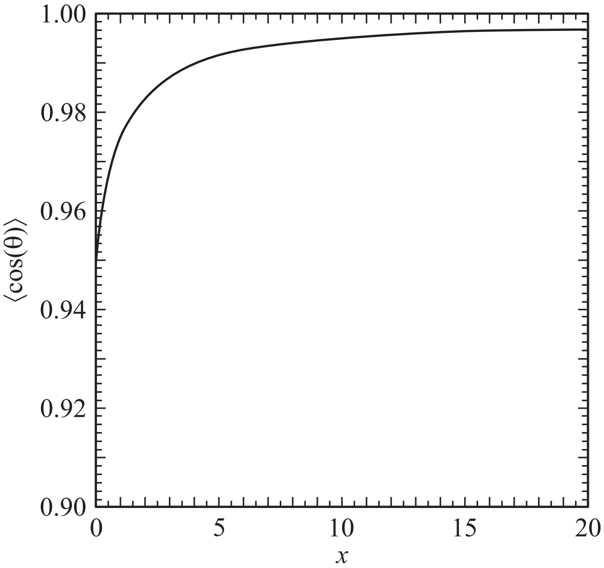

Рис. 2. Средний косинус угла рассеяния как функция параметра x, см. формулы (5) и (6) в тексте.

вид

$$\begin{aligned}\langle\cos(\theta)\rangle &\approx \frac{\int\limits_0^{\theta_{\min}} \chi(\theta)\sin(\theta)d\theta + \int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}{\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta + \int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\begin{array}{c}\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta \\ +\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\cos(\theta)\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\end{array}}{1+\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta} \\ &= \frac{\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta + \langle\cos(\theta)\rangle_{eksp}}{1+\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta} \\ &= 1-\frac{1-\langle\cos(\theta)\rangle\big|_{\exp}}{1+\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Bigg/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta}.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\langle\cos(\theta)\rangle|_{\exp}$ – найденное по формуле (3) экспериментально значение для среднего косинуса рассеяния. Будем рассматривать отношение $\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta$ как некоторый параметр x.

Нетрудно видеть, что x может находиться в диапазоне $0 \le x < \infty$. На рис. 2 показан график уравнения (5) как функция параметра. Точке $x = 0$ на графике соответствует ситуация, когда угол $\theta_{\min}$ настолько мал, что вся малоугловая область была измерена в эксперименте, как видно из графика, в этом случае $\langle\cos(\theta)\rangle|_{\exp}$ в точности совпадает с ожидаемым $\langle\cos(\theta)\rangle$. Противоположный случай больших значений параметра x, $x \gg 1$, описывает ситуацию, когда преобладающий вклад в средний косинус угла рассеяния происходит от очень малых углов, и, как и следовало ожидать, в этом случае $\langle\cos(\theta)\rangle \to 1$ (рис. 2). Таким образом, найденный по формуле (3) $\langle\cos(\theta)\rangle|_{\exp}$ является всего лишь оценкой снизу для истинного $\langle\cos(\theta)\rangle$. Как видно из формулы (4) добавление вклада от малоугловой области одновременно увеличивает и числитель, и знаменатель при расчете среднего значения косинуса угла рассеяния. Нужно учесть, что хотя физически очевидно, что малоугловая область содержит все меньшие углы и в связи с этим косинус углов этой области является возрастающей функцией, при расчете этой величины на практике исходят из ненормированной функции рассеяния, полученной в эксперименте по относительному изменению интенсивности света для разных углов регистрации рассеянного света, и кроме возрастания числителя в формуле (4), в ней изменяется и знаменатель. Поэтому полученное на рис. 2 поведение среднего косинуса угла рассеяния как функции параметра x является результатом конкурирующего влияния двух указанных факторов. Чтобы получить более точную оценку среднего косинуса угла рассеяния, необходимо знать значение параметра $x = \int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta$. Для его оценки поступим следующим образом. Поскольку индикатриса рассеяния является вероятностью рассеяния в телесный угол, а в области малых углов вероятность такого рассеяния становится все больше, то $\chi(\theta)$ является возрастающей функцией. Тогда интеграл $\int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta$ можно оценить снизу, взяв в качестве $\chi(\theta)$ ее минимальное значение в области интегрирования, $\chi(\theta_{\min})$, которое известно из эксперимента. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= \int\limits_0^{\theta_{\min}}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta \\ &\approx \chi(\theta_{\min})\int\limits_0^{\theta_{\min}}\sin(\theta)d\theta\Big/\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}\chi(\theta)\sin(\theta)d\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Для экспериментальных данных рис. 1 расчет по формуле (6) дает $x \approx 0.43$. Тогда из формулы (5) получаем следующее уточнение:

$$\langle\cos(\theta)\rangle \approx 1 - \frac{1-0.95}{1+0.43} = 0.965. \tag{7}$$

На первый взгляд может показаться, что это уточнение незначительно, и практически не изменяет найденное экспериментальное значение среднего косинуса угла рассеяния. Однако это не так. Следует учесть, что чем ближе средний косинус угла рассеяния к единице, тем заметнее становится вклад таких уточнений. Например, для важной при описании времен задержек фотонов величины L_{tr} (см. уравнение (1)), подставляя экспериментальные данные и их уточнение, теперь получим

$$L_{tr} = \frac{22.5}{1 - 0.965} = 643\,\mathrm{m}, \tag{8}$$

что заметно отличается от использованной ранее в Байкальском нейтринном телескопе транспортной длины 450 m. Выполненные автором расчеты показывают, что найденное по формуле (8) значение транспортной длины рассеяния гораздо лучше описывает распределение времен задержки фотонов в байкальском эксперименте.

Заключение

Часто на практике вместо полного набора характеристик рассеяния исследователи вынуждены пользоваться более упрощенными величинами, такими, например, как средний косинус угла рассеяния, см., в частности, [8–11]. Такой подход удобен тем, что вместо всей функции рассеяния используется одна интегральная величина, которая, во-первых, менее чувствительная к ошибкам измерения индикатрисы рассеяния и, во-вторых, не требует точного знания функции рассеяния в области малых углов. Однако в сильно анизотропных для рассеяния средах, где преобладает рассеяние света в направлении строго вперед, расчет среднего косинуса угла рассеяния без учета малоугловой области может приводить, как показано в этой работе, к заметной ошибке. Нами предложен подход, который позволяет уточнить значения среднего косинуса угла рассеяния с учетом влияния малоугловой области. Несмотря на простоту, этот подход дает способ получения поправки к экспериментально полученным данным и может быть с успехом применен в различных ситуациях на практике.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Belolaptikov I.A. et al.* // Astr. Phys. 1997. V. 7. P. 263.
[2] *Aynutdinov V. et al.* // Physics of Atomic Nuclei. 2006. V. 69. N 11. P. 1914–1921.
[3] *Aynutdinov V. et al.* // Astrophys. J. 2008. V. 29. P. 366.
[4] *Avrorin A.D. et al.* // EPJ Web of Conferences. 2019. V. 207 P. 01003.
[5] *Balkanov V.A. et al.* // Appl. Opt. 1999. V. 3. P. 68.
[6] *Гапоненко О.Н., Миргазов Р.Р., Таращанский Б.А.* // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. № 08. С. 1069–1076.
[7] *Таращанский Б.А., Гапоненко О.Н., Добрынин В.И.* // Оптика атмосферы и океана. 1994. Т. 7. № 11–12. С. 1508–1515.
[8] *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1.
[9] *O'Sullivan T.D., Cerussi A.E., Cuccia D.J., Tromberg B.J.* // J. Biomed. Optics. 2012. V. 17. P. 071311-(1–14).
[10] *Mutyal N., Radosevich A., Gould B., Rogers J.D., Gomes A., Turzhitsky V., Backman V.* // Optics Express. 2012. V. 20. P. 19643–19657.
[11] *Зимняков Д.А., Ювченко С.А., Исаева А.А., Исаева Е.А., Ушакова О.В.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 5. С. 23.
[12] *Копилевич Ю., Кононенко М.Е., Задорожная Е.И.* // Оптический журн. 2010. Т. 77. № 10. С. 10–14.
[13] *Маньковский В.И.* // Оптика атмосферы и океана. 2018. Т. 31. № 8. С. 634–639.